НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ НА ДОБУТКУ ПРОСТОРІВ, ЯКІ Є ДОБУТКАМИ МЕТРИЗОВНИХ МНОЖНИКІВ

Володимир МАСЛЮЧЕНКО, Володимир МИХАЙЛЮК

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
вул. Коцюбинського 2, Чернівці 58012

Редакція отримала статтю 31 жовтня 2003 р.

Встановлено необхідні і достатні умови залежності від певного числа координат нарізно неперервних функцій багатьох змінних, кожна з яких є добутком метризовних множників. У випадку, коли кожна змінна є добутком сепарабельних метризовних просторів, отримано повний опис множин точок розриву таких функцій.

У роботі [1] з допомогою теореми про щільність топологічного добутку і теореми про залежність неперервної функції на добутку компактів від зліченного числа координат досліджувалась залежність від $\aleph$ координат нарізно неперервних функцій на добутку двох просторів, що є добутками компактів. Зокрема, коли X і Y є добутками метризовних компактів, було одержано залежність від зліченного числа координат довільної нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbf{R}$, що дозволило дати повний опис множин точок розриву таких функцій. У [2] було виявлено, що, подібно як для неперервних відображень в [3], залежність нарізно неперервних функцій двох змінних від певного числа координат знаходиться у тісному зв'язку з властивостями добутків, які описуються в термінах сімей відкритих непорожніх множин. У даній роботі ми розглядатимемо нарізно неперервні функції багатьох змінних і, розвиваючи результати з [2], отримаємо необхідні і достатні умови залежності від певного числа координат, які збігаються у випадку, коли кожна змінна є добутком метризовних просторів, і дають можливість описати множину точок розриву нарізно неперервних функцій багатьох змінних, кожна з яких є добутком сепарабельних метризовних просторів.

УДК 515.12, 517.51, 1991 Mathematics Subject Classification 54B10

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ

Нехай $X = \prod\limits_{s \in S} X_s$ – добуток сім'ї множин X_s, Z – довільна множина і $T \subseteq S$. Кажуть, що відображення $f : X \to Z$ *зосереджене на множині* T, якщо $f(x') = f(x'')$, як тільки $x', x'' \in X$ і $x'_{|T} = x''_{|T}$. Якщо до того ж потужність $|T|$ множини T не перевижує кардинального числа $\aleph$, то кажуть, що f *залежить не більше ніж від* $\aleph$ *координат.* Якщо Y – це ще якась множина, то кажуть, що відбраження $g : X \times Y \to Z$ *зосереджене на множині* T *відносно першої змінної*, якщо асоційоване з g відображення $\varphi : X \to Z^Y$, $\varphi(x)(y) = g(x, y)$, зосереджене на множині T, а коли при цьому $|T| \leq \aleph$, то кажуть, що g залежить *не більше ніж від* $\aleph$ *координат відносно першої змінної.*

Нехай $P = X_1 \times \cdots \times X_n$, $X_i = \prod\limits_{s \in S_i} X_{i,s}$, $f : P \to Z$ – деяке відображення. Зафіксуємо деяке $i = 1, \ldots, n$. Відображенню f ми можемо співставити відображення $\tilde{f} : X_i \times \hat{X}_i \to Z$, де $\tilde{f}(x_i, \hat{x}_i) = f(x_1, \ldots, x_n)$, $\hat{X}_i = X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n$, $\hat{x}_i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. Кажуть, що f *зосереджене на множині* $T \subseteq S_i$ *відносно* i*-ї змінної*, якщо $\tilde{f}$ зосереджене на множині T відносно першої змінної, а коли при цьому $|T| \leq \aleph$, то говорять, що f *залежить не більш ніж від* $\aleph$ *координат відносно* i*-ї змінної.* Для скорочення замість точного виразу „залежить не більш ніж від $\aleph$ координат" ми будемо вживати коротший термін „залежить від $\aleph$ координат". Якщо позначити через S пряму суму множин $S_1, \ldots, S_n$ і покласти $Y_s = X_{i,s}$ при $s \in S_i$ і $Y = \prod\limits_{s \in S} Y_s$, то P можна природним чином ототожнити з Y і мислити f як відображення добутку Y в Z. При цьому, якщо кардинал $\aleph$ нескінченний, то $f : Y \to Z$ залежить від $\aleph$ координат тоді і тільки тоді, коли f залежить від $\aleph$ координат відносно i-ї змінної для кожного $i = 1, \ldots, n$.

Нехай X – топологічний простір і $\aleph$ – нескінченний кардинал. Казатимемо, що сім'я $\alpha = (A_i : i \in I)$ підмножин A_i простору X є *локально скінченною*, якщо для кожної точки $x \in X$ існує такий її окіл U, що множина $\{i \in I : A_i \cap U \neq \emptyset\}$ є скінченною, *точково скінченною* чи $\aleph$*-точковою*, якщо для кожного $x \in X$ множина $\{i \in I : x \in A_i\}$ є скінченною чи має потужність, що не перевищує $\aleph$. Крім того, для довільної сім'ї $\alpha = (A_i : i \in I)$ потужність множини I називатимемо потужністю сім'ї α.

Далі важливу роль будуть відігравати наступні властивості топологічного простору X:

($\mathrm{I}_\aleph$) кожна локально скінченна сім'я відкритих непорожніх підмножин простору X має потужність, що не перевищує $\aleph$;

($\mathrm{II}_\aleph$) кожна точково скінченна сім'я відкритих непорожніх підмножин простору X має потужність, що не перевищує $\aleph$;

($\mathrm{III}_\aleph$) кожна $\aleph$-точкова сім'я відкритих непорожніх підмножин простору X має потужність, що не перевищує $\aleph$.

Очевидно, що ($\mathrm{III}_\aleph$)$\Longrightarrow$($\mathrm{II}_\aleph$)$\Longrightarrow$($\mathrm{I}_\aleph$).

Далі ми будемо використовувати такий результат [3, твердження 1]: топологічний добуток $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ має властивість ($\mathrm{I}_\aleph$), ($\mathrm{II}_\aleph$) чи ($\mathrm{III}_\aleph$) тоді і тільки тоді, коли для кожної скінченної підмножини T в S відповідну властивість має добуток $X(T) = \prod\limits_{s\in T} X_s$.

Стосовно властивості ($\mathrm{III}_\aleph$), цей результат можна підсилити з допомогою такого простого спостереження.

Твердження 1. *Добуток $X\times Y$ топологічних просторів X і Y має властивість ($\mathrm{III}_\aleph$) тоді і тільки тоді, коли простори X і Y мають цю властивість.*

Наслідок 1. *Топологічний добуток довільної сім'ї топологічних просторів має властивість ($\mathrm{III}_\aleph$) тоді й тільки тоді, коли цю властивість має кожний його співмножник.*

Вивчимо зараз зв'язки між введеними властивостями. Через $d(X)$ ми позначатимемо *щільність* топологічного простору X, тобто мінімальну потужність його всюди щільних підмножин.

Твердження 2. *Нехай X – топологічний простір і $\aleph$ – нескінченний кардинал. Тоді:*

(i) якщо $d(X) \le \aleph$, то X має властивість ($\mathrm{III}_\aleph$);

(ii) якщо X метризовний, то всі властивості ($\mathrm{I}_\aleph$), ($\mathrm{II}_\aleph$), ($\mathrm{III}_\aleph$) рівносильні умові $d(X) \le \aleph$.

Доведення. (i). Нехай $\alpha = (U_i : i \in I)$ – $\aleph$-точкова сім'я непорожніх відкритих множин в X і A – щільна в X множина, для якої $|A| \le \aleph$. Для $x \in A$ розглянемо множини $I(x) = \{i \in I : x \in U_i\}$, для яких, очевидно, $|I(x)| \le \aleph$. Оскільки U_i – відкриті і непорожні, і $\overline{A} = X$, то $I = \bigcup\limits_{x\in A} I(x)$. Тому $|I| \le \aleph^2 = \aleph$.

(ii). Нехай X – метризовний простір з властивістю ($\mathrm{I}_\aleph$). Відомо [4, с.416], що в X є σ-локально скінченна база $\mathcal{B}$, для якої, зрозуміло, $|\mathcal{B}| \le \aleph$. Тоді і $d(X) \le \aleph$.

Зауважимо, що існують топологічні простори X з $d(X) > \aleph$, які мають властивість ($\mathrm{III}_\aleph$). Таким прикладом є простір $[0,1]^S$, де $|S| > 2^\aleph$.

2. НЕОБХІДНІ УМОВИ

Перейдемо до вивчення умов, при яких нарізно неперервна функція $f : X_1 \times \dots \times X_n \to \mathbf{R}$, де $X_i = \prod\limits_{s \in S_i} X_{i,s}$, $i = 1, \dots, n$, залежить від $\aleph$ координат. Ми будемо використовувати такий результат [2, наслідок 1].

Твердження 3. *Нехай $X = \prod\limits_{s \in S} X_s$ – топологічний добуток сім'ї топологічних просторів X_s, Y – деяка множина, Z – гаусдорфовий топологічний простір і $f : X \times Y \to Z$ – неперервна відносно першої змінної функція. Тоді множина*

$$S_0 = \{s \in S : (\exists y \in Y)(\exists u, v \in X)(u_{|S \setminus \{s\}} = v_{|S \setminus \{s\}} \text{ і } f(u, y) \neq f(v, y))\}$$

є найменшою серед усіх множин, на яких зосереджена f відносно першої змінної.

Надалі ми вважатимемо, що кожний з топологічних просторів X_s і Y_t має принаймні дві точки.

Наступний результат, який узагальнює теорему 2 з [2], дає необхідні умови залежності від $\aleph$ координат.

Теорема 1. *Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал, $|S| > \aleph$, $X = \prod\limits_{s \in S} X_s$ – топологічний добуток сім'ї цілком регулярних топологічних просторів X_s, простори $Y_1, \dots, Y_n$ цілком регулярні і кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y_1 \times \dots \times Y_n \to \mathbf{R}$ залежить від $\aleph$ координат відносно першої змінної. Тоді добуток $X \times Y_1 \times \dots \times Y_n$ має властивість $(I_\aleph)$ і всі простори $X, Y_1, \dots, Y_n$, крім, хіба що одного, мають властивість $(II_\aleph)$.*

Доведення. Припустимо, що серед просторів $X, Y_1, \dots, Y_n$ є два такі, які не мають властивості $(\mathrm{II}_\aleph)$. Тоді серед просторів $Y_1, \dots, Y_n$ є принаймні один такий, що не має властивості $(\mathrm{II}_\aleph)$. Не обмежуючи загальності, ми можемо вважати, що саме простір Y_n не має властивості $(\mathrm{II}_\aleph)$. Виберемо довільну $(n-1)$-елементну множину $\tilde{T} = \{t_1, \dots, t_{n-1}\}$, яка не перетинається з множиною S, і покладемо $T = S \cup \tilde{T}$, $Y = Y_n$, $Z_s = X_s$ для кожного $s \in S$, $Z_{t_k} = Y_k$ при $k = 1, \dots, n-1$, і $Z = \prod\limits_{t \in T} Z_t$. Зрозуміло, що простори Z і Y не мають властивості $(\mathrm{II}_\aleph)$ і є цілком регулярними. Тоді з теореми 2 у [2] випливає, що існує така нарізно неперервна функція $g : Z \times Y \to \mathbf{R}$, яка залежить більше ніж від $\aleph$ координат відносно першої змінної. Тоді за твердженням 3 потужність множини

$$T_0 = \{t \in T : (\exists y \in Y)(\exists u, v \in Z)(u|_{T \setminus \{t\}} = v|_{T \setminus \{t\}} \text{ і } g(u, y) \neq g(v, y))\}$$

більша від $\aleph$. Розглянемо функцію $f : X \times Y_1 \times \cdots \times Y_n \to \mathbf{R}$, для якої $f(x, y_1, \ldots, y_n) = g(z, y)$, де $z = (x, y_1, \ldots, y_{n-1})$ і $y = y_n$. З нарізної неперервності функції g випливає нарізна неперервність функції f. Крім того, легко перевірити, що множина $S_0 = T_0 \cap S$ є найменшою серед тих множин, на яких f зосереджена відносно першої змінної. Оскільки $|T_0| > \aleph$ і множина $\tilde{T}$ є скінченною, то $|S_0| = |T_0 \setminus \tilde{T}| > \aleph$. Отже, функція f залежить більше ніж від $\aleph$ координат відносно першої змінної, що суперечить умові. Подібними міркуваннями на основі тієї ж теореми 2 з [2] можна довести, що добуток $X \times Y_1 \times \cdots \times Y_n$ має властивість ($\mathrm{I}_\aleph$).

3. ДОСТАТНІ УМОВИ

Теорема 2. *Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал, топологічний добуток $X = \prod\limits_{s \in S} X_s$ має властивість ($\mathrm{I}_\aleph$), а простори $Y_1, \ldots, Y_n$ мають властивість ($\mathrm{III}_\aleph$). Тоді кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y_1 \times \cdots \times Y_n \to \mathbf{R}$ залежить від $\aleph$ координат відносно першої змінної.*

Доведення. Нехай $Y = Y_1 \times \cdots \times Y_n$. Розглянемо множину S_0 з формулювання твердження 3. Згідно з цим твердженням, для доведення теореми досить встановити, що $|S_0| \leq \aleph$. Припустимо, що це не так, тобто $|S_0| > \aleph$. Кожній точці s з множини S_0 співставимо точку $y_s = (y_{s,1}, \ldots, y_{s,n}) \in Y$ і функції u_s і v_s з X, такі, що $u_s|_{S \setminus \{s\}} = v_s|_{S \setminus \{s\}}$ і $f(u_s, y_s) \neq f(v_s, y_s)$. Для кожного $k \in \mathbf{N}$ покладемо

$$S_k = \{s \in S_0 : |f(u_s, y_s) - f(v_s, y_s)| > 1/k\}.$$

Зрозуміло, що $S_0 = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} S_k$. Оскільки $|S_0| > \aleph$, то існує такий номер k_0, що $|S_{k_0}| > \aleph$. Покладемо $T_0 = S_{k_0}$ і $\varepsilon = 1/k_0$. З неперервності f відносно другої змінної випливає, що для кожного $s \in T_0$ існує такий відкритий окіл $V_{1,s}$ точки $y_{1,s}$ в просторі Y_1, що

$$|f(u_s, y_1, y_{2,s}, \ldots, y_{n,s}) - f(v_s, y_1, y_{2,s}, \ldots, y_{n,s})| > \varepsilon,$$

як тільки $y_1 \in V_{1,s}$. Сім'я $(V_{1,s} : s \in T_0)$ не є $\aleph$-точковою в Y_1, бо $|T_0| > \aleph$ і Y_1 має властивість ($\mathrm{III}_\aleph$). Тому існує точка $b_1 \in Y_1$, така, що множина $T_1 = \{s \in T_0 : b_1 \in V_{1,s}\}$ має потужність, більшу від $\aleph$. Зауважимо, що для кожного $s \in T_1$ виконується нерівність

$$|f(u_s, b_1, y_{2,s}, \ldots, y_{n,s}) - f(v_s, b_1, y_{2,s}, \ldots, y_{n,s})| > \varepsilon.$$

З неперервності f відносно третьої змінної випливає, що для кожного $s \in T_1$ існує такий відкритий окіл $V_{2,s}$ точки $y_{2,s}$ в просторі Y_2, що

$$|f(u_s, b_1, y_2, y_{3,s}, \dots, y_{n,s}) - f(v_s, b_1, y_2, y_{3,s}, \dots, y_{n,s})| > \varepsilon,$$

як тільки $y_2 \in V_{2,s}$. Сім'я $(V_{2,s} : s \in T_1)$ не є $\aleph$-точковою в Y_2, бо $|T_1| > \aleph$ і Y_2 має властивість (III$_\aleph$). Тому існує така точка $b_2 \in Y_2$, що множина $T_2 = \{s \in T_1 : b_2 \in V_{2,s}\}$ має потужність, більшу від $\aleph$. Тоді для кожного $s \in T_2$ виконується нерівність

$$|f(u_s, b_1, b_2, y_{3,s}, \dots, y_{n,s}) - f(v_s, b_1, b_2, y_{3,s}, \dots, y_{n,s})| > \varepsilon.$$

Зробивши ще $n-2$ такі кроки, ми отримаємо множину $T_n \subseteq S$ і точку $b = (b_1, \dots, b_n) \in Y$, такі, що $|T_n| > \aleph$ і $|f(u_s, b) - f(v_s, b)| > \varepsilon$ для кожного $s \in T_n$. Звідси випливає, що функція $f_b : X \to \mathbf{R}$, $f_b(x) = f(x, b)$, істотно залежить від кожної змінної x_s, де $s \in T_n$. Але функція f_b є неперервною, а добуток X має властивість (I$_\aleph$). Тому за теоремою Нобла–Ульмера [3, теорема 3.2] f_b залежить не більше ніж від $\aleph$ координат, що приводить до суперечності.

Наслідок 2. *Нехай всі топологічні добутки $X_i = \prod\limits_{s \in S_i} X_{i,s}$ при $i = 1, \dots, n$ мають властивість (III$_\aleph$). Тоді кожна нарізно неперервна функція $f : X_1 \times \dots \times X_n \to \mathbf{R}$ залежить від $\aleph$ координат.*

У випадку, коли всі простори $X_{i,s}$ є метризовними, отримуємо одночасно необхідні і достатні умови для того, щоб кожна нарізно неперервна функція $f : X_1 \times \dots \times X_n \to \mathbf{R}$ залежала від $\aleph$ координат.

Теорема 3. *Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал, $X_i = \prod\limits_{s \in S_i} X_{i,s}$ при $i = 1, \dots, n$ – топологічні добутки сімей метризовних просторів $X_{i,s}$, $|S_1| > \aleph$ і $X = X_1 \times \dots \times X_n$. Тоді наступні умови рівносильні:*

(i) кожна нарізно неперервна функція $f : X_1 \times \dots \times X_n \to \mathbf{R}$ залежить від $\aleph$ координат;

(ii) кожна нарізно неперервна функція $f : X_1 \times \dots \times X_n \to \mathbf{R}$ залежить від $\aleph$ координат відносно першої змінної;

(iii) кожна неперервна функція $f : X \to \mathbf{R}$ залежить від $\aleph$ координат;

(iv) X має властивість (I$_\aleph$);

(v) кожен простір $X_{i,s}$ має властивість (I$_\aleph$);

(vi) X має властивість (II$_\aleph$);

(vii) кожен простір $X_{i,s}$ має властивість (II$_\aleph$);

(viii) X має властивість $(III_{\aleph})$;
(ix) кожен простір $X_{i,s}$ має властивість $(III_{\aleph})$;
(x) $d(X_{i,s}) \leq \aleph$ для будь-яких i та s.

Доведення. Імплікація (i)$\Longrightarrow$(ii) очевидна. Імплікація (ii)$\Longrightarrow$(iv) випливає з теореми 1. Умови (iii) та (iv) рівносильні за теоремою Нобла–Ульмера [3, теорема 3.2]. Рівносильність умов (viii) і (ix) випливає з наслідку 1, а рівносильність умов (v), (vii), (ix) і (x) з твердження 2. Оскільки добуток X має одну з властивостей $(\mathrm{I}_{\aleph})$, $(\mathrm{II}_{\aleph})$ чи $(\mathrm{III}_{\aleph})$ тоді і тільки тоді, коли цю ж властивість має кожен його скінченний піддобуток, а добуток скінченної кількості метризовних просторів є метризовним, то з твердження 2 випливає, що властивості (iv), (vi) і (viii) є еквівалентними. Тоді й властивості (iv)–(x) є еквівалентними. Нарешті, імплікація (viii)$\Longrightarrow$(i) одержується на основі наслідків 1 і 2.

4. ОПИС МНОЖИНИ ТОЧОК РОЗРИВУ

Використовуючи отримані результати, ми можемо дати повний опис множин точок розриву нарізно неперервних функцій від n груп зміних, якщо простори $X_{i,s}$ метризовні і сепарабельні. Нагадаємо, що множина E в добутку $X_1 \times \cdots \times X_n$ топологічних просторів $X_1, \ldots, X_n$ є *проективно худою*, якщо для кожного $i = 1, \ldots, n$ проекція множини E, паралельно i-му множнику, є худою множиною, тобто множиною першої категорії, в $X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n$.

Теорема 4. *Нехай $X_i = \prod\limits_{s \in S_i} X_{i,s}$ при $i = 1, ..., n$ – топологічні добутки довільних сімей метризовних сепарабельних просторів $X_{i,s}$, $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ і $E \subseteq X$. Тоді E буде множиною точок розриву деякої нарізно неперервної функції $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to \mathbf{R}$ в тому і тільки в тому разі, коли існують такі не більш ніж зліченні підмножини T_i множин S_i при $i = 1, .., n$ і така проективно худа F_σ-множина E_0 в добутку $Y = Y_1 \times \cdots \times Y_n$, де $Y_i = \prod\limits_{s \in T_i} X_{i,s}$, що $E = \mathrm{pr}^{-1}(E_0)$, де $\mathrm{pr} : X \to Y$ – природна проекція, для якої $\mathrm{pr}(x_1, \ldots, x_n) = (x_{1|_{T_1}}, \ldots, x_{n|_{T_n}})$.*

Доведення. Нехай $f : X \to \mathbf{R}$ – нарізно неперервна функція і множина $D(f)$ точок розриву функції f збігається з E. Оскільки простори $X_{i,s}$ метризовні і $d(X_{i,s}) \leq \aleph_0$, то на основі теореми 3 функція f залежить від $\aleph_0$ координат. Тоді для кожного $i = 1, \ldots, n$ в S_i можна вибрати таку не більш ніж зліченну підмножину T_i, що $f = f_0 \circ \mathrm{pr}$, де $f_0 : Y \to \mathbf{R}$ – деяка функція, а pr і Y означають те ж, що і у формулюванні теореми.

Відображення $\mathrm{pr} : X \to Y$ неперервне і відкрите, тому f_0 є нарізно неперервною функцією і $D(f) = \mathrm{pr}^{-1}(D(f_0))$. Нехай $D(f_0) = E_0$. Оскільки простори $Y_1, \dots, Y_n$ метризовні і сепарабельні, то множина E_0 є проективно худою F_σ–множиною в просторі Y (див. теорему 2 у [5]) і для неї $E = \mathrm{pr}^{-1}(E_0)$. Таким чином, необхідність доведена.

Для доведення достатності зауважимо, що з теореми 2 у[5] випливає, що для проективно худої F_σ-множини E_0 в Y існує така нарізно неперервна функція $f_0 : Y \to \mathbf{R}$, що $D(f_0) = E_0$. Тоді функція $f = f_0 \circ \mathrm{pr} : X \to \mathbf{R}$ також буде нарізно неперервною і для неї $D(f) = \mathrm{pr}^{-1}(E_0) = E$.

[1] *Маслюченко В. К., Михайлюк В. В.* Нарізно непрервні функції на добутках компактів та їх залежність від **n** змінних // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 3. – С. 344–350.

[2] *Михайлюк В. В.* Залежність від **n** координат нарізно неперервних функцій на добутках компактів // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 6. – С. 822–829.

[3] *Noble N., Ulmer M.* Factoring functions on Cartesian products //Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – **163**, P. 329–339.

[4] *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.

[5] *Маслюченко В. К., Михайлюк В. В.* Характеризація множин точок розриву нарізно неперервних функцій багатьох змінних на добутках метризовних просторів // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 6. – С. 740–747.

SEPARATELY CONTINUOUS FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES ON PRODUCTS OF SPACES WHICH ARE PRODUCTS OF METRIZABLE FACTORS

Volodymyr MASLYUCHENKO, Volodymyr MYKHAYLYUK

Chernivtsi National University
2 Kotsubynskogo Str., Chernivtsi 58012, Ukraine

We obtain necessary and sufficient conditions of dependence on $\aleph$ coordinates for functions of several variables each of which is a product of metrizable factors. The set of discontinuity points of such functions is characterized in the case when each variable is a product of separable metrizable spaces.