НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ З КЛАСІВ $W^r_{\beta,\infty}$ ТРИГАРМОНІЙНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА

Інна КАЛЬЧУК, Уляна ГРАБОВА

Волинський національний університет імені Лесі Українки
просп. Волі, 13, Луцьк 43025

Редакція отримала статтю 26 листопада 2010 р.

Отримано асимптотичні рівності для точних верхніх меж відхилень тригармонійних інтегралів Пуассона від функцій з класів $W^r_{\beta,\infty}$ в рівномірній метриці.

1 Постановка задачі та деякі історичні відомості

Нехай C — простір 2π–періодичних неперервних функцій, у якому норма задається за допомогою рівності $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$; L_∞ — простір 2π–періодичних вимірних суттєво обмежених функцій з нормою $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}\limits_t |f(t)|$; L — простір 2π–періодичних сумовних на періоді функцій, де норма задана наступним чином $\|f\|_L = \|f\|_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$.

Нехай $f(x) \in L$ і

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

— ряд Фур'є функції $f(x)$.

УДК 517.5, MSC 2000: 41A35, 41A45

Нехай $r>0$ і β — фіксоване дійсне число. Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^r \left(a_k \cos\left(kx+\frac{\beta\pi}{2}\right)+b_k \sin\left(kx+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції $\varphi(x)$, то цю функцію називають (r,β)–похідною функції $f(x)$ і позначають через $f_\beta^r(x)$.

Множину усіх функцій $f(x)$, які задовольняють таку умову, позначають через W_β^r.

Класи W_β^r були введені Б. Надем [1], а функцію $f_\beta^r(x)$ називають (r,β)–похідною в сенсі Вейля–Надя.

Якщо $f(x)\in W_\beta^r$ та, крім того, $\|f_\beta^r(\cdot)\|_\infty \le 1$, то кажуть, що функція $f(x)$ належить класу $W_{\beta,\infty}^r$.

У випадку $\beta=r, r\in N$, класи $W_{\beta,\infty}^r$ співпадають з класами Соболєва W_∞^r, а у випадку $\beta=r+1, r\in N$, – з класами спряжених функцій $\overline{W}_\infty^r$.

Нехай $U(\rho;x)=U_n(\rho;x)$ – полігармонійна функція порядку n в одиничному крузі $|z|<1$, $z=\rho e^{ix}$, тобто є розв'язком рівняння

$$\Delta^n U(\rho;x)=0, \tag{1}$$

де

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

— оператор Лапласа в полярних координатах.

Розв'язок рівняння (1) із заданими граничними умовами

$$U(\rho;x)\Big|_{\rho=1}=f(x);\ \ \frac{\partial^k}{\partial\rho^k}U(\rho;x)\Big|_{\rho=1}=0,\ \ k=\overline{1,n-1}, \tag{2}$$

де $f(x)$ — сумовна 2π-періодична функція, надалі позначатимемо $P_n(\rho;f;x)=U_n(\rho;f;x),\ n\in N$.

В монографії [2] (див.(3.127.5)) показано, що розв'язок крайової задачі (1), (2) можна записати у вигляді

$$P_n(\rho;f;x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i(\rho;n)\left(a_i\cos ix+b_i\sin ix\right),\ 0\le\rho<1,$$

де

$$\lambda_i(\rho;n)=\rho^i\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\rho^2\right)^k Q(k;i),$$

$$Q(k;i)=\frac{i(i+2)(i+4)\dots(i+2k-2)}{k!2^k},\ i=0,1,\dots,\ (Q(k;0)=1)\,.$$

Поклавши $\rho=e^{-\frac{1}{\delta}},\ \delta>0$, величину $P_n(\rho;f;x)$ запишемо у вигляді

$$P_n(\delta;f;x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i(\delta;n)\left(a_i\cos ix+b_i\sin ix\right), \tag{3}$$

$$\lambda_i\left(\delta;n\right)=e^{-\frac{i}{\delta}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^kQ(k;i).$$

Покладаючи в (3) $n=1,2,3$ отримаємо:
при $n=1$ — інтеграл Пуассона функції f

$$P_1(\delta;f;x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\frac{k}{\delta}}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right),\delta>0,$$

при $n=2$ — бігармонійний інтеграл Пуассона функції f

$$P_2(\delta;f;x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{k}{2}(1-e^{-\frac{2}{\delta}})\right)e^{-\frac{k}{\delta}}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right),\delta>0,$$

при $n=3$ — тригармонійний інтеграл Пуассона функції f

$$P_3(\delta;f;x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(\delta)\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right),\delta>0,$$

де

$$\lambda_k(\delta)=\left(1+\frac{1}{4}(3-e^{-\frac{2}{\delta}})(1-e^{-\frac{2}{\delta}})k+\frac{1}{8}(1-e^{-\frac{2}{\delta}})^2k^2\right)e^{-\frac{k}{\delta}}.$$

Позначимо

$$\mathcal{E}\left(W^r_{\beta,\infty};P_n(\delta)\right)_C=\sup_{f\in W^r_{\beta,\infty}}\|f(x)-P_n(\delta;f;x)\|_C.$$

Якщо в явному вигляді знайдена така функція $\varphi(\delta)=\varphi(\mathfrak{N};\delta)$, що $\mathcal{E}\left(\mathfrak{N};P_n(\delta)\right)_C=\varphi\left(\delta\right)+o\left(\varphi\left(\delta\right)\right)$ при $\delta\to\infty$, то згідно [3, с. 198] говорять, що розв'язано задачу Колмогорова–Нікольського для класу $\mathfrak{N}$ та інтегралу $P_n(\delta;f;x)$ в рівномірній метриці.

Апроксимативні властивості методу наближення інтегралами Пуассона на класах $W^r_\infty, r\in N$, $\overline{W}^r_\infty, r\in N$ та $W^r_{\beta,\infty}$, $r>0$, $\beta\in R$, вивчалися в працях І.П. Натансона [4], О.П. Тімана [5], Б. Надя [6], Е.Л. Штарка [7], В.О. Баскакова [8, 9], Л.І. Баусова [10], К.М. Жигалла і Ю.І. Харкевича [11, 12] та ін., а апроксимативні властивості бігармонійних інтегралів Пуассона вивчалися на класах $W^r_\infty (r \in N)$ та $\overline{W}^r_\infty (r \in N \setminus \{1\})$ в працях С. Канієва [13], P. Pych [14], Т.І. Аманова та Л.П. Фалалєєва [15], К.М. Жигалла та Ю.І. Харкевича [16, 17] та ін.

Оцінки відхилень довільних полігармонійних інтегралів Пуассона $P_n(\delta; f; x)$ в метриці простору $S^p,\ 1 \le p < \infty$, встановлені М.П. Тіманом в [2, с. 248–260].

Що ж стосується питання про апроксимативні властивості тригармонійних інтегралів Пуассона на класах Вейля–Надя з точки зору задачі Колмогорова–Нікольського, то це питання до цього часу залишається відкритим. Тому становить певний інтерес відшукання асимптотичних рівностей для величин $\mathcal{E}\left(W^r_{\beta,\infty}; P_3(\delta)\right)_C$. Саме це питання і розглядається в даній статті.

Для тригармонійного інтеграла Пуассона покладемо

$$\tau(u) = \begin{cases} \left(1 - \left(1 + \gamma u + \theta u^2\right) e^{-u}\right) \delta^r, & 0 \le u \le \frac{1}{\delta}, \\ \left(1 - \left(1 + \gamma u + \theta u^2\right) e^{-u}\right) u^{-r}, & u \ge \frac{1}{\delta}, \end{cases} \tag{4}$$

де

$$\gamma = \frac{1}{4}(3 - e^{-\frac{2}{\delta}})(1 - e^{-\frac{2}{\delta}})\delta,$$

$$\theta = \frac{1}{8}(1 - e^{-\frac{2}{\delta}})^2 \delta^2.$$

Якщо перетворення Фур'є функції $\tau(u)$ вигляду

$$\widehat{\tau}_\beta(t) = \widehat{\tau}(t; \beta) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) \tag{5}$$

є сумовним на всій дійсні осі, то аналогічно [3, с. 183] можна показати, що для будь-якої функції $f \in W^r_{\beta\infty}$ при всіх $x \in R$ справедлива рівність

$$f(x) - P_3(\delta; f; x) = \frac{1}{\delta^r} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^r_\beta\left(x + \frac{t}{\delta}\right) \widehat{\tau}_\beta(t) dt. \tag{6}$$

2 Асимптотичні рівності для точних верхніх меж відхилень тригармонійних інтегралів Пуассона від функцій з класів $W^r_{\beta,\infty}$

Має місце наступне твердження:

Теорема 1. *При $r > 3$ і $\delta \to \infty$ має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(W^r_{\beta,\infty}; P_3(\delta)\right)_C = \frac{1}{\delta^3} \sup_{f \in W^r_{\beta,\infty}} \left\| \frac{4}{3} f_0^{(1)}(x) + f_0^{(2)}(x) + \frac{1}{6} f_0^{(3)}(x) \right\|_C +$$

$$+ O\left(\frac{1}{\delta^r} + \frac{1}{\delta^4}\right), \tag{7}$$

де $f_0^{(1)}(x), f_0^{(2)}(x)$ і $f_0^{(3)}(x)$, відповідно, $(1,0)-$, $(2,0)-$ і $(3,0)-$похідні в сенсі Вейля–Надя.

Доведення. Подамо функцію $\tau(u)$, що задана співвідношенням (4), у вигляді $\tau(u) = \varphi(u) + \mu(u)$, де

$$\varphi(u) = \begin{cases} \left(\dfrac{4u}{3\delta^2} + \dfrac{u^2}{\delta} + \dfrac{u^3}{6}\right)\delta^r, & 0 \le u \le \frac{1}{\delta}, \\ \left(\dfrac{4}{3\delta^2}u + \dfrac{1}{\delta}u^2 + \dfrac{1}{6}u^3\right)u^{-r}, & u \ge \frac{1}{\delta}, \end{cases} \tag{8}$$

$$\mu(u) = \begin{cases} (1 - \xi - \eta)\,\delta^r, & 0 \le u \le \frac{1}{\delta}, \\ (1 - \xi - \eta)\,u^{-r}, & u \ge \frac{1}{\delta}, \end{cases} \tag{9}$$

де

$$\xi = [1 + \gamma u + \theta u^2]e^{-u}, \quad \eta = \frac{4u}{3\delta^2} - \frac{u^2}{\delta} - \frac{u^3}{6}.$$

Переконаємося в сумовності перетворень $\widehat{\varphi}_\beta(t)$ і $\widehat{\mu}_\beta(t)$ вигляду (5) функцій $\varphi(u)$ та $\mu(u)$, тобто покажемо збіжність інтегралів

$$A(\varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} \varphi(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)\, du \right| dt,$$

$$A(\mu) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} \mu(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)\, du \right| dt.$$

Для того, щоб оцінити величину $A(\varphi)$, згідно теореми 1 зі статті Л.І. Баусова [10, с. 24], досить знайти оцінки наступних інтегралів

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} u\left|d\varphi'(u)\right|, \qquad \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} |u-1|\left|d\varphi'(u)\right|, \tag{10}$$

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int\limits_0^{\infty}\frac{|\varphi(u)|}{u}du, \qquad \int\limits_0^{1}\frac{|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)|}{u}du. \tag{11}$$

Для оцінки першого інтеграла з (10), розіб'ємо проміжок $[0,\frac{1}{2}]$ на дві частини: $[0,\frac{1}{\delta}]$, та $[\frac{1}{\delta},\frac{1}{2}]$. Тоді при $u\in[0,\frac{1}{\delta}]$ матимемо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}} u|d\varphi'(u)| = \int\limits_0^{\frac{1}{\delta}}\Big(\frac{2}{\delta}u+u^2\Big)\delta^r du = O(\delta^{r-3}). \tag{12}$$

Оскільки при $u\geq\frac{1}{\delta}$, згідно (8),

$$|d\varphi'(u)| \leq \bigg(\Big(\frac{2}{\delta}+u\Big)u^{-r}+2r\Big(\frac{4}{3\delta^2}+\frac{2}{\delta}u+\frac{1}{2}u^2\Big)u^{-r-1}+$$

$$+r(r+1)\Big(\frac{4}{3\delta^2}u+\frac{1}{\delta}u^2+\frac{1}{6}u^3\Big)u^{-r-2}\bigg)du, \tag{13}$$

то

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u|d\varphi'(u)| \leq \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\delta}+u\right)u^{-r+1}du+2r\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{4}{3\delta^2}+\frac{2}{\delta}u+\frac{1}{2}u^2\right)u^{-r}du+$$

$$+r(r+1)\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{4}{3\delta^2}u+\frac{1}{\delta}u^2+\frac{1}{6}u^3\right)u^{-r-1}du = O\left(1+\delta^{r-3}\right). \tag{14}$$

Із співвідношень (12) та (14) випливає

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} u|d\varphi'(u)| = O(1+\delta^{r-3}). \tag{15}$$

Враховуючи нерівність (13), при $r > 3$ одержимо оцінку другого інтеграла з (10)

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} |u-1||d\varphi'(u)| \leq \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} u|d\varphi'(u)| = O(1). \tag{16}$$

Для того, щоб оцінити перший інтеграл з (11), розіб'ємо проміжок $[0,\infty)$ на дві частини: $[0,\frac{1}{\delta}]$ та $[\frac{1}{\delta},\infty]$. Враховуючи рівність (8) та умову теореми, отримаємо

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{|\varphi(u)|}{u} du = \int\limits_{0}^{\frac{1}{\delta}} \left(\frac{4}{3\delta^2} + \frac{1}{\delta}u + \frac{1}{6}u^2\right)\delta^r du +$$

$$+ \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \left(\frac{4}{3\delta^2} + \frac{1}{\delta}u + \frac{1}{6}u^2\right) u^{-r} du = O(1+\delta^{r-3}). \tag{17}$$

Для оцінки другого інтеграла з (11) відмітимо, що при

$$\lambda(u) = 1 - \frac{4}{3\delta^2}u - \frac{1}{\delta}u^2 - \frac{1}{6}u^3$$

і $\delta \to \infty$ має місце рівність

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)|}{u} du = \int\limits_{0}^{1} \frac{|\lambda(1-u)-\lambda(1+u)|}{u} du +$$

$$+ O\left(|\varphi(0)| + |\varphi(1)| + \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} u|d\varphi'(u)| + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} |u-1||d\varphi'(u)|\right).$$

Оскільки

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{|\lambda(1-u)-\lambda(1+u)|}{u} du = O(1),$$

то, враховуючи співвідношення (15) і (16), отримаємо

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)|}{u} du = O(1+\delta^{r-3}). \tag{18}$$

Аналогічно, щоб оцінити величину $A(\mu)$, згідно [10, с. 24, теорема 1] необхідно і достатньо, щоб збігалися інтеграли

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u \left|d\mu'(u)\right|, \qquad \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} |u-1| \left|d\mu'(u)\right|, \tag{19}$$

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \int_0^{\infty} \frac{|\mu(u)|}{u} du, \qquad \int_0^1 \frac{|\mu(1-u)-\mu(1+u)|}{u} du. \tag{20}$$

Для оцінки інтегралів (19) розглянемо функцію

$$\eta(u) = 1-(1+\gamma u+\theta u^2)e^{-u} - \frac{4}{3\delta^2}u - \frac{1}{\delta}u^2 - \frac{1}{6}u^3.$$

Оскільки

$$\eta'(u) = e^{-u} - \gamma e^{-u} + \gamma u e^{-u} - 2\theta u e^{-u} + \theta u^2 e^{-u} - \frac{4}{3\delta^2} - \frac{2}{\delta}u - \frac{1}{2}u^2,$$

$$\eta''(u) = -e^{-u} + 2\gamma e^{-u} - \gamma u e^{-u} - 2\theta e^{-u} + 4\theta u e^{-u} - \theta u^2 e^{-u} - \frac{2}{\delta} - u,$$

$$\eta(0)=0,\ \eta'(0) = 1-\gamma-\frac{4}{3\delta^2} < 0,\ \eta''(0) = -1+2\gamma-2\theta-\frac{2}{\delta} < 0,$$

то можна показати, що при $u \geq 0$

$$\eta(u) \leq 0, \quad \eta'(u) < 0, \quad \eta''(u) < 0. \tag{21}$$

Враховуючи (21) та у випадку $u \geq 0$ нерівності

$$1-u \leq e^{-u} \leq 1, \quad 1-u+\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{6} \leq e^{-u} \leq 1-u+\frac{u^2}{2},$$

$$e^{-u} \leq 1-u+\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{6}+\frac{u^4}{24}, \tag{22}$$

одержимо

$$|\eta(u)| \leq u\Big(\gamma-1+\frac{4}{3\delta^2}\Big) + u^2\Big(\frac{1}{2}-\gamma+\theta+\frac{1}{\delta}\Big) + u^3\Big(\frac{\gamma}{2}-\theta\Big) + u^4\Big(\frac{1}{24}+\frac{\theta}{2}\Big),$$

$$\left|\eta'(u)\right| \leq \Big(\gamma-1+\frac{4}{3\delta^2}\Big) + \frac{u}{2}\Big(\frac{1}{2}-\gamma+\theta+\frac{1}{\delta}\Big) + 3u^2\Big(\frac{\gamma}{2}-\theta\Big) + u^3\Big(\frac{1}{6}+2\theta\Big),$$

$$\left|\eta''(u)\right| \le 2\Big(\frac{1}{2} - \gamma + \theta + \frac{1}{\delta}\Big) + 6u\Big(\frac{\gamma}{2} - \theta\Big) + u^2\Big(\frac{1}{2} - \gamma + 6\theta\Big).$$

Використовуючи також оцінки

$$\gamma - 1 + \frac{4}{3\delta^2} \le \frac{3}{\delta^3}, \quad \frac{1}{2} - \gamma + \theta + \frac{1}{\delta} \le \frac{3}{\delta^2}, \quad \frac{\gamma}{2} - \theta \le \frac{2}{\delta},$$

$$\frac{1}{24} + \frac{\theta}{2} \le 1, \quad \frac{1}{2} - \gamma + 6\theta \le 3, \quad \frac{1}{6} + 2\theta \le 2,$$

знаходимо

$$|\eta(u)| \le \frac{3}{\delta^3}u + \frac{3}{\delta^2}u^2 + \frac{2}{\delta}u^3 + u^4, \tag{23}$$

$$\left|\eta'(u)\right| \le \frac{3}{\delta^3} + \frac{3}{2\delta^2}u + \frac{6}{\delta}u^2 + 2u^3, \tag{24}$$

$$\left|\eta''(u)\right| \le \frac{6}{\delta^2} + \frac{12}{\delta}u + 3u^2. \tag{25}$$

Розглянемо перший інтеграл в (19). Розіб'ємо проміжок інтегрування на дві частини: $[0, \frac{1}{\delta}]$ та $[\frac{1}{\delta}, \frac{1}{2}]$. Враховуючи рівність (9) та нерівності (21), (25), отримаємо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}} u|d\mu'(u)| \le \int\limits_0^{\frac{1}{\delta}} \left(\frac{6}{\delta^2}u + \frac{12}{\delta}u^2 + 3u^3\right)\delta^r du = O(\delta^{r-4}). \tag{26}$$

Оскільки при $u \ge \frac{1}{\delta}$

$$|d\mu'(u)| \le \big(r(r+1)u^{-r-2}|\eta(u)| + 2ru^{-r-1}|\eta'(u)| + u^{-r}|\eta''(u)|\big)\,du, \tag{27}$$

то, врахувавши нерівності (23) – (25), одержимо

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} u|d\mu'(u)| \le r(r+1)\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{\delta^3}u + \frac{3}{\delta^2}u^2 + \frac{2}{\delta}u^3 + u^4\right)u^{r-1}du +$$

$$+2r\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{\delta^3} + \frac{3}{2\delta^2}u + \frac{6}{\delta}u^2 + 2u^3\right)u^{-r}du +$$

$$+\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{6}{\delta^2} + \frac{12}{\delta}u + 3u^2\right)u^{-r+1}du = O(1 + \delta^{r-4}). \tag{28}$$

Із (26) і (28) випливає асимптотична рівність

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} u|d\mu'(u)| = O(1+\delta^{r-4}). \tag{29}$$

Для оцінки другого інтеграла з (19) використаємо співвідношення (27), нерівності (21), (22), а також оцінки

$$e^{-u}[(-1+\gamma)+u(-1+2\theta)-\theta u^2] \leq 2, \quad u \geq 0,$$

$$e^{-u}[(1-2\gamma+2\theta)+\theta u^2] \leq 2, \quad u \geq 0.$$

Отримаємо, що

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} |u-1||d\mu'(u)| \leq \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} u|d\mu'(u)| \leq$$

$$\leq r(r+1)\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}\left(\gamma u+\theta u^2+\frac{4}{3\delta^2}u+\frac{1}{\delta}u^2+\frac{1}{6}u^3\right)u^{-r-1}du+$$

$$+2r\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}\left(2+\frac{4}{3\delta^2}+\frac{2}{\delta}u+\frac{1}{2}u^2\right)u^{-r}du+$$

$$+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}\left(2+\frac{2}{\delta}+u\right)u^{-r+1}du = O(1). \tag{30}$$

Для того, щоб оцінити перший інтеграл з (20) розіб'ємо проміжок $[0,\infty)$ на дві частини: $[0,\frac{1}{\delta}]$ та $[\frac{1}{\delta},\infty]$. Враховуючи спочатку рівність (9) і першу нерівність з (21), а потім (23), (22), переконуємося, що при $\delta\to\infty$ мають місце наступні оцінки:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}} \frac{|\mu(u)|}{u}du = \delta^r\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}}|\eta(u)|\frac{du}{u} \leq \delta^r\int\limits_0^{\frac{1}{\delta}}\left(\frac{3}{\delta^3}u+\frac{3}{\delta^2}u^2+\frac{2}{\delta}u^3+u^4\right)\frac{du}{u} = O(\delta^{r-4}),$$

$$\int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \frac{|\mu(u)|}{u}du = \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} |\eta(u)|u^{-r-1}du \leq$$

$$\leq \int\limits_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \left(\frac{3}{\delta^3} u + \frac{3}{\delta^2} u^2 + \frac{2}{\delta} u^3 + u^4 \right) u^{-r-1} du = O(\delta^{r-4}).$$

Звідки

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{|\mu(u)|}{u} du = O(\delta^{r-4}). \qquad (31)$$

Для того, щоб оцінити другий інтеграл з (20), відмітимо, що при

$$\lambda(u) = (1 + \gamma u + \theta u^2) e^{-u} + \frac{4}{3\delta^2} u + \frac{1}{\delta} u^2 + \frac{1}{6} u^3$$

і $\delta \to \infty$ має місце рівність

$$\int\limits_0^1 \frac{|\mu(1-u) - \mu(1+u)|}{u} du = \int\limits_0^1 \frac{|\lambda(1-u) - \lambda(1+u)|}{u} du +$$

$$+ O\left(|\mu(0)| + |\mu(1)| + \int\limits_0^{\frac{1}{2}} u |d\mu'(u)| + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} |u-1| |d\mu'(u)| \right). \qquad (32)$$

Оскільки

$$\int\limits_0^1 \frac{|\lambda(1-u) - \lambda(1+u)|}{u} du = O(1),$$

то, враховуючи співвідношення (29) і (30), із (32) отримаємо

$$\int\limits_0^1 \frac{|\mu(1-u) - \mu(1+u)|}{u} du = O\left(1 + \delta^{r-4}\right). \qquad (33)$$

Отже, ми переконалися в збіжності інтегралів $A(\varphi)$ та $A(\mu)$, тобто в сумовності перетворень $\widehat{\varphi}_\beta(t)$ та $\widehat{\mu}_\beta(t)$.

Із співвідношень (29) – (31) і (33), згідно [10, с. 24, теорема 1] випливає оцінка

$$A(\mu) = O(1 + \delta^{r-4}). \qquad (34)$$

Враховуючи рівність (6), одержимо

$$\mathcal{E}\left(W^r_{\beta,\infty}; P_3(\delta)\right)_C = \sup_{f \in W^r_{\beta,\infty}} \left\| \delta^{-r} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^r_\beta \left(x + \frac{t}{\delta} \right) \widehat{\tau}_\beta(t) dt \right\|_C =$$

$$= \sup_{f\in W^r_{\beta,\infty}} \left\| \delta^{-r} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^r_\beta\left(x+\frac{t}{\delta}\right)(\widehat{\varphi}_\beta(t)+\widehat{\mu}_\beta(t))dt \right\|_C =$$

$$= \sup_{f\in W^r_{\beta,\infty}} \left\| \delta^{-r} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^r_\beta\left(x+\frac{t}{\delta}\right)\widehat{\varphi}_\beta(t)dt \right\|_C + O\left(\delta^{-r}A(\mu)\right). \qquad (35)$$

Аналогічно [10, формула (1.6)] можна показати, що ряд Фур'є функції

$f_\varphi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^r_\beta\left(x+\frac{t}{\delta}\right)\widehat{\varphi}_\beta(t)dt$

має вигляд

$$S\left[f_\varphi\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3}k+k^2+\frac{1}{6}k^3\right)\delta^{r-3}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right),$$

де a_k, b_k — коефіцієнти Фур'є функції f.

Тому

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^r_\beta\left(x+\frac{t}{\delta}\right)\widehat{\varphi}_\beta(t)dt = \left(\frac{4}{3}f_0^{(1)}(x)+f_0^{(2)}+\frac{1}{6}f_0^{(3)}\right)\delta^{r-3}. \qquad (36)$$

Підставляючи (34) та (36) в (35) отримаємо рівність (7). □

3 Висновки

Досліджено апроксимативні характеристики тригармонійних інтегралів Пуассона на класах Вейля-Надя, а саме: знайдено розв'язок задачі Колмогорова-Нікольського для класу $W^r_{\beta,\infty}$ та тригармонійного інтеграла Пуассона в рівномірній метриці.

Порівняльний аналіз отриманих результатів із результатами праць [4-17] дозволяє зробити висновок про те, що тригармонійні інтеграли здійснюють краще наближення класів $W^r_{\beta,\infty}$ порівняно з інтегралами Пуассона та бігармонійними інтегралами Пуассона.

[1] *Nagy B.* Über gewise Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen,I.//Periodischer Fall, Berichte der math. phys. KL. Akademie. zu – Leipzig, 1938. – **90**. – C. 103–134.

[2] *Тиман М.Ф.* Аппроксимация и свойства периодических функций. – К.: Наук. думка, 2009. – 376 с.

[3] *Степанец А.И.* Методы теориии приближения. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч.І. – 427 с.

[4] *Натансон И.П.* О порядке приближения непрерывной 2π-периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона // Докл. АН СССР. – 1950. – **72**, № 1. – С. 11–14.

[5] *Тиман А.Ф.* Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона // Докл. АН СССР. – 1950. – **74**, № 1. — С. 17–20.

[6] *Sz.–Nagy B.* Sur l'ordre de l'approximation d'une fonction par son integrale de Poisson // Acta Math. Acad. Sci Hungar. – 1950. – **1**. – P. 183–188.

[7] *Штарк Э.Л.* Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из *Lip*1 от их сингулярного интеграла Абеля–Пуассона // Мат. заметки. – 1973. – **13**, № 1. – С. 21–28.

[8] *Баскаков В.А.* Асимптотические оценки приближения сопряжённых функций сопряжёнными интегралами Абеля–Пуассона // Применение функционального анализа в теории приближений. – Калинин. – 1975. – Вып. 5. – С. 14–20.

[9] *Баскаков В.А.* О некоторых свойствах операторов типа операторов Абеля–Пуассона // Мат. заметки. – 1975. – **17**, № 2. – С. 169–180.

[10] *Баусов Л.И.* Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами. I //Изв. вузов. – 1965. – **46**, № 3. –С. 15–31.

[11] *Жигалло К.М., Харкевич Ю.І.* Повна асимптотика відхилення від класу диференційовних функцій множини їх гармонійних інтегралів Пуассона // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 1. – С. 43–52.

[12] *Жигалло К.М., Харкевич Ю.І.* Наближення спряжених диференційовних функцій їх інтегралами Абеля–Пуассона // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 1. – С. 73–82.

[13] *Каниев С.* Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений // Докл. АН СССР. – 1963. – **153**, № 5. – С. 995–998.

[14] *Pych P.* On a biharmonic function in unit dise // Ann. pol. math. – 1968. – **20**, № 3. – P. 203–213.

[15] *Аманов Т.И, Фалалеев Л.П.* Приближение дифференцируемых функций операторами типа Абеля–Пуассона // 5-е Советско–Чехословатское совещание по применению методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики (Алма–Ата, 1976): Тр. совещания. – Новосибирск, 1979. – С. 13–16.

[16] *Жигалло К.М., Харкевич Ю.І.* Наближення диференційовних періодичних функцій їх бігармонійними інтегралами Пуассона // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 9. – С. 1213–1219.

[17] *Жигалло К.М., Харкевич Ю.І.* Наближення спряжених диференційовних функцій бігармонійними інтегралами Пуассона // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 3. – С. 333–345.

APPROXIMATION OF FUNCTION FROM CLASSES $W^r_{\beta,\infty}$ BY THREEHARMONIC POISSON INTEGRALS

Inna KALCHUK, Ulyana GRABOVA

Lesya Ukrainka Volyn' National University
prospekt Voli, 13, Lutsk 43025

There are obtained asymptotic equalities for exact upper bounds of deviation of threeharmonic Poisson integrals from functions of classes $W^r_{\beta,\infty}$ in uniform metric.