Еліптичні функциї модулові.

Написав

Володимир Левицкий.

В моїй розвідці про ґрупу модулову [1]) подав я дефініцию еліптичних функций модулових, се-б то функций, що належать до ґрупи субституций:

$$\left(\tau, \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 1,$$

де $\tau = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ ($2\omega_1$ і $2\omega_2$ є первістні періоди функций еліптичних).

Тепер буде моєю задачею представити обширнійше теорию тих функций; займем ся іменно наперед формами модуловими, дальше функцнєю $J(\tau)$, а в кінци єї важнійшими відверненями.

Форми модулові.

2. *Формою модуловою к-тої димензиї називаємо однозначну однородну функцию двох змінних x і y к-тої димензиї, яка остає без зміни, коли єї арґументи піддати якій-небудь субституциї з ґрупи лінеарних однородних субституций; коли-ж ужием иньших субституций, то функция та взагалі зміняє свою вартість.*

Коли форма модулова є однородною функциєю пари періоді первістних $2\omega_1$ і $2\omega_2$ функций еліптичних, то форма модулова називає ся *еліптичною формою модуловою.*

Квот двох форм модулових з однаковими димензиями є *функциєю модуловою* арґументу $\frac{x}{y} = z$. Квот двох форм модулових еліптичних з рівними димензиями є *функциєю модуловою еліптичною.*

---

[1]) Левицкий: Ґрупа модулова. Справоздане дирекциї ц. к. акад. ґімназиї за рік 1894/5 ст. 31.

2. Будемо ся старати тепер представити найважнійші з форм модулових еліптичних.

Як звісно основною функциєю в теориї еліптичних функций Вейерштрасса є $\wp(u)$, що в окруженю точки $u=0$ має вид:

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\nu=2}^{\infty} (2\nu-1)\, c_\nu\, u^{\nu-2}\,, \qquad 1)$$

де:

$$c_\nu = \sum_{\mu\mu'}{}' \frac{1}{(2\mu\omega_1 + 2\mu'\omega_2)^{2\nu}} \qquad \nu=2, 3, \ldots \qquad 2)$$

Значок при сумі значить, що комбінацию ($\mu=0$, $\mu'=0$) в сумі треба відкинути.

Очевидна є річ, що c_ν є формами модуловими (-2ν)-тої дименазиї, бо c_ν не змінюють вартости, наколи зробити на них субституцию:

$$\begin{cases} 2\bar{\omega}_1 = 2p\omega_1 + 2q\omega_2 \\ 2\bar{\omega}_2 = 2p'\omega_1 + 2q'\omega_2 \end{cases} \qquad 3)$$

т. є. наколи $2\omega_1$ і $2\omega_2$ заступимо через $2\bar{\omega}_1$ і $2\bar{\omega}_2$, бо сумоване відбуває ся в c_ν на всіх μ і μ'.

Покажемо, що c_ν є *аналітичними функциями* арґументів ω_1 і ω_2.

Положім:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \tau = \alpha + \beta i,$$

де ω_1 і ω_2 так вибираєм, що часть перворядна:

$$\Re\left(\frac{\omega_1}{\omega_2 i}\right) > 0\,, \qquad 4)$$

т. зн. що β *є все́гда і тільки додатне*:

$$\frac{\tau}{i} = \frac{\alpha}{i} + \beta$$

і виберім з поміж додатних вартостий β лише тії, для яких:

$$\left| e^{\tau\pi i} \right| < 1$$

Напишім тепер:

$$c_\nu = \frac{1}{(2\omega_2)^{2\nu}} \sum_{\mu}{}' \sum_{\mu'}{}' \left(\frac{1}{\mu+\mu'\tau}\right)^{2\nu} =$$

$$= \frac{1}{(2\omega_2)^{2\nu}} \left[\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\mu}\right)^{2\nu} + 2 \sum_{\mu'=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\mu+\mu'\tau}\right)^{2\nu} \right], \qquad 5)$$

де перший вираз відносить ся до всіх $\mu' = 0$, а в другім увзгляднено,

що $$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}' = 2\sum_{1}^{\infty}.$$

Тепер зауважім розвинене:

$$\pi \operatorname{cotg} \tau\mu'\pi = -\pi i \frac{1+e^{2\pi i\tau\mu'}}{1-e^{2\pi i\tau\mu'}}$$

або:

$$\frac{1}{\tau\mu'} + \sum_{\mu=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\tau\mu'+\mu} + \frac{1}{\tau\mu'-\mu}\right\} = -i\pi - 2\pi i\sum_{\lambda=1}^{\infty} e^{2\pi i\tau\mu'\lambda} \quad ^{1})$$

Наколи зріжничкуєм послідне рівнане 2ν рази що до $(\tau\mu')$, одержимо:

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\mu+\mu'\tau}\right)^{2\nu} = (-1)^{2\nu}\frac{(2\pi i)^{2\nu}}{(2\nu-1)!}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\lambda^{2\nu-1} e^{2\pi i\tau\mu'\lambda}$$

Права сторона є збіжна для:

$$\left| e^{2\pi i\tau\mu'\lambda} \right| < 1.$$

З огляду на се можна тепер c_ν написати в виді:

$$c_\nu = \frac{2}{(2\omega_2)^{2\nu}}\left[\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\mu}\right)^{2\nu} + (-1)^{\nu}\frac{(2\pi)^{2\nu}}{(2\nu-1)!}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\lambda^{2\nu-1}\frac{e^{2\pi i\tau\lambda}}{1-e^{2\pi i\tau\lambda}}\right] \quad 6)$$

Умову збіжности сього розвинення $\left| e^{2\pi i\tau} \right| < 1$ сповнилисьмо вже через се, щосьми положили:

$$\Re\left(\frac{\omega_1}{\omega_2 i}\right) = \Re\left(\frac{\tau}{i}\right) > 0.$$

Вираз в клямрі можна проте розвинути після $e^{2\pi i\tau}$ для всіх τ, що лежать в додатній півплощі (τ); c_ν є отже *аналітичними функциями* арґументів ω_1 і ω_2. В долішну півплощу (τ) c_ν *перенести ся не дасть*,

---

¹) Пор.: Biermann: Theorie der analytischen Functionen стор. 323.

бо вираз в клямрі для всіх рациональних τ є безконечно великий, бо тоді $e^{2\pi i\tau} = 1$, маємо проте в знаменнику:

$$1 - e^{2\pi i\tau} = 0.$$

3. З тих форм c_ν для нас найважнійші т. зв. *незмінники* (інварияити) *функций еліптичних* g_2 і g_3, як є також еліптичвими формами модуловими, бо як з теориї функций еліптичних слідує:

$$g_2 = 60\ c_2,\quad g_3 = 140\ c_3.$$

З загальної форми 2) видно, що g_2 є формою модуловою (—4)-тої, g_3 формою модуловою (—6)-тої димензиї.

Утворимо ще форму модулову еліптичну (—12)-тої димензиї. Такою формою є безперечно діскрімінанта функций еліптичних, котра має вид:[1]

$$\Delta\ (\omega,\ \omega_2) = g_2{}^3 - 27\ g_3{}^2. \qquad 7)$$

Перейдім тепер до *абсолютного незмінника* функций еліптичних і форм біквадратових, котрий назначимо знаком $J(\tau)$.

Функция $J(\tau)$.

1. Абсолютний незмінник функций еліптичних має вид:

$$J(\tau) = \frac{g_2{}^3}{\Delta} = \frac{g_2{}^3}{g_2{}^3 - 27 g_3{}^2} \qquad 8)$$

Покажемо, що ся функция є функциєю автоморфічною з ґрупою модуловою, або що она є *функциєю еліптичною модуловою*.

Вираженю на c_ν можна надати еще иньший вид.

А то:

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\mu}\right)^{2\nu} = \frac{(2\pi)^{2\nu}}{2.(2\nu)!}\ B_{2\nu-1},$$

де $B_{2\nu-1}$ є ν-тим числом Bernouilli'oro; тепер:

$$c_\nu = \left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^{2\nu} \frac{1}{(2\nu)!} \left[B_{2\nu-1} + (-1)^{\nu} 4\nu \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda^{2\nu-1} \frac{e^{2\pi i\tau\lambda}}{1 - e^{2\pi i\tau\lambda}} \right] \qquad 9)$$

---

[1]) Пор.: Schwarz: Formeln u. Lehrsätze z. Gebrauche der ellip. Functionen стор. 62.

Діскрімінантою для рівнаня 3-тої степ.

$$4\ s^3 - g_2\ s - g_3 = 0, \text{ де } s = \wp(u),$$

є властиво:

$$\tfrac{1}{16}\ \Delta\ (\omega_1\ \omega_2) = G = (e_3 - e_2)^2\ (e_2 - e_1)^2\ (e_1 - e_3)^2,$$

де: $e_1 = \wp(\omega_1),\ e_2 = \wp(\omega_3) = \wp(\omega_1 + \omega_2),\ e_3 = \wp(\omega_2)$.

Ми знаємо, що так рівнане 6), як і 9) не змінить своєї вартости і свого виду, наколи ужити субституциї 3).

Положім, що:

$$\begin{vmatrix} p & q \\ p' & q' \end{vmatrix} = +1,$$

як се діє ся в ґрупі модуловій, то тоді:

$$\Re\left(\frac{\omega_1}{\omega_2 i}\right) > 0 \quad \text{і} \quad \Re\left(\frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\omega}_2 i}\right) > 0,$$

або, що 6) і 9) задержують свою збіжність в додатній півплощі нового арґументу $\tau' = \frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\omega}_2}$.

Наколи напишемо:

$$c_\nu = \frac{1}{(\omega_2)^{2\nu}} H(\tau),$$

то через субституцию 3) дістанемо:

$$c_\nu = \frac{1}{(\bar{\omega}_2)^{2\nu}} H(\tau'),$$

або:
$$H(\tau) = \left(\frac{\omega_2}{\bar{\omega}_2}\right)^{2\nu} H(\tau'),$$

т. зн., що $H(\tau)$ через субституцию:

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}, \frac{p\omega_1 + q\omega_2}{p'\omega_1 + q'\omega_2}\right) = \left(\tau, \frac{q\tau + p}{q'\tau + p'}\right)$$

з модулом $pq' - p'q = 1$ переходить сама в себе з чинником:

$$\left(\frac{\omega_2}{p'\omega_1 + q'\omega_2}\right)^{2\nu}.$$

$H(\tau)$ є проте *функциєю псевдоавтоморфічною* з ґрупою модуловою. Специяльно:

$$g_2 = 60 \frac{1}{\omega_2^4} H_2(\tau) = 60 \frac{1}{\bar{\omega}_2^4} H_2(\tau')$$

$$g_3 = 140 \frac{1}{\omega_2^6} H_3(\tau) = 140 \frac{1}{\bar{\omega}_2^6} H_3(\tau')$$

$$\Delta = 60^3 \frac{1}{\omega_2^{12}} H_2^3(\tau) - 27.140^2 \frac{1}{\omega_2^{12}} H_3^2(\tau) =$$

$$= 60^3 \frac{1}{\bar{\omega}_2^{12}} H_2^3(\tau') - 27.140^2 \frac{1}{\bar{\omega}_2^{12}} H_3^2(\tau').$$

З відси виходить, що наколи утворимо виражене:

$$J(\tau) = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2},$$

то $J(\tau') = J(\tau)$, або що $J(\tau)$ є *еліптичною функциєю модуловою.*

2. Будемо ся старати тепер представити функцию $J(\tau)$ в такім виді, з котрого можна пізнати місця, де она стає ся зером і безконечностию. На основі рівнаня 6) можна написати:

$$g_2{}^3 = (60\ c_2)^3 = \left(\frac{1}{2\omega_2}\right)^{12} \left\{ 120 \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\mu}\right)^4 + \right.$$

$$\left. + 320\pi^4 \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda^3 \frac{e^{2\pi i\tau\lambda}}{1-e^{2\pi i\tau\lambda}} \right\}^3,$$

а як:

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\mu}\right)^4 = \frac{4}{120}\ \frac{\pi^4}{3} \qquad {}^{1)}$$

проте:

$$g_2{}^3 = \left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^{12} \left\{ \frac{1}{12} + 20 \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda^3 \frac{e^{2\pi i\tau\lambda}}{1-e^{2\pi i\tau\lambda}} \right\}^3$$

Ходить тепер о представлене знаменника:

$$\Delta = 16\ G = 16\ (e_2 - e_3)^2\ (e_2 - e_1)^2\ (e_1 - e_3)^2.$$

До обчисленя сеї функциї ужием таких реляций з теориї функций еліптичних: [2])

$$\sqrt{e_2 - e_3} = \frac{\pi}{2\omega_2}\ 4\ h^{\frac{1}{4}} \prod_n (1-h^{2n})^2 \prod_n (1+h^{2n})^4$$

$$\sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\pi}{2\omega_2} \prod_n (1-h^{2n})^2 \prod_n (1+h^{2n-1})^4$$

$$\sqrt{e_1 - e_2} = \frac{\pi}{2\omega_2} \prod_n (1-h^{2n})^2 \prod_n (1-h^{2n-1})^4$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-h^{2n})\ (1-h^{2n-1})\ (1+h^{2n})\ (1+h^{2n-1}) = \prod_{n=1}^{\infty} (1-h^{2n}),$$

де $h = e^{\pi i\tau}$.

Напишім Δ в виді:

$$\Delta = 16\ (e_1 - e_3)^6 \left(\frac{e_3 - e_2}{e_1 - e^3}\right)^2 \left(\frac{e_1 - e_1}{e_1 - e_3}\right)^2 = 16\ (\varkappa^2\ \varkappa'^2)^2\ (e_1 - e_3)^6,$$

---

[1]) Biermann loc. cit. стор. 326.
[2]) Schwarz loc. cit, стор. 37.

де:

$$\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}=\varkappa^2,\qquad \frac{e_2-e_1}{e_3-e_2}=\varkappa'^2, \tag{10}$$

то позаяк тепер:

$$\varkappa^2=16h\left[\frac{\prod(1+h^{2n})}{\prod(1-h^{2n})}\right]^8$$

$$\varkappa'^2=\left[\frac{\prod(1-h^{2n-1})}{\prod(1+h^{2n-1})}\right]^8$$

то:

$$\Delta=\left(\frac{\omega_2}{\pi}\right)^{12}h^2\prod_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n})^{24}$$

Дістанемо проте:

$$J(\tau)=\frac{g_2^{\,3}}{g_2^{\,3}-27g_3^{\,2}}=\frac{\left\{\frac{1}{12}+20\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3\frac{h^{2n}}{1-h^{2n}}\right\}^3}{h^2\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-h^{2n})^{24}} \tag{11}$$

3. Ґрупою функциї $J(\tau)$ є *безконечна ґрупа*:

$$\left(\tau,\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)\qquad\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=1,$$

а її районом основним є район $CEDD_\infty C_\infty$[1]), де:

$$C=e^{\frac{2\pi i}{3}}=\rho,\ E=i,\ C_\infty=\infty i;$$

розслідім функцию $J(\tau)$ в тих вершках.

Розслідім вперед *вершок* $\tau=\rho$. Як знаєм:

$$g_2=60c_2=\frac{60}{(2\omega_2)^4}\sum_{\mu\mu'}{}'\frac{1}{(\mu+\mu'\tau)^4}$$

Сумоване відбуває ся на всїх $\mu\mu'$, а як c_ν яко функциї аналїтичні є безуслівно збіжні, проте можна в сумі c_ν збирати постепенно по три вирази, як слїдує:[2])

---

[1]) Пор.: Левицкий loc. cit. фіґура.

[2]) Пор.: Hurwitz Mathem. Annalen XVIII стор. 554.

$$\left(\frac{1}{\mu+\mu'\rho}\right)^4 + \left(\frac{1}{-\mu+(\mu-\mu')\rho}\right)^4 + \left(\frac{1}{(\mu-\mu')-\mu\rho}\right)^4 =$$

$$= \left(\frac{1}{\mu+\mu'\rho}\right)^4 \left(1+\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho^2}\right)^{1)} =$$

$$= \left(\frac{1}{\mu+\mu'\rho}\right)^4 \left(1-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0,$$

отже:

$$\sum_{\mu\mu'} \left(\frac{1}{\mu+\mu'\tau}\right)^4_{\tau=\rho} = 0,$$

або:

$$g_2(\rho) = 0.$$

Так само і на рівноважнім місци $D(\tau=-\rho)$

$$g_2(-\rho) = 0.$$

Противно, як легко пересьвідчити ся, є $g_3(\pm\rho) \neq 0$.

Однак $g_3(i) = 0$, бо:

$$g_3 = 140c_3 = \frac{140}{(2\omega_2)^6} \sum_{\mu\mu'}{}' \left(\frac{1}{\mu+\mu'\tau}\right)^6$$

Для $\tau = i$ збираймо по 2 вирази:

$$\left(\frac{1}{\mu+\mu' i}\right)^6 + \left(\frac{1}{-\mu+\mu' i}\right)^6 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu+\mu' i}\right)^6 \left(1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}\right) = 0,$$

отже:

$$g_3(i) = 0,$$

Звідси слїдує, що:

$$J(\pm\rho) = 0, \qquad 12)$$

а як:

$$J(\tau)-1 = \frac{27g_3^2}{\Delta},$$

---

1) $\left(\frac{1}{(\mu-\mu')\varrho-\mu}\right)^4 = \frac{1}{\varrho}\left(\frac{1}{\mu+\mu'\varrho}\right)^4$, бо: $\left(\frac{1}{(\mu+\mu'\varrho)\varrho^{\frac{1}{4}}}\right)^4 = \left(\frac{i}{(\mu+\mu'\varrho)i\varrho^{\frac{1}{4}}}\right)^4$

Коли положимо: $\varrho = e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varrho^{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ і зберемо відповідно вирази, при чім $i^4 = 1$, одержимо: $\left(\frac{1}{(\mu-\mu')i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}(\mu+\mu')+\mu'-\mu}\right)^4 =$

$= \left(\frac{1}{(\mu-\mu')\varrho-\mu}\right)^4$. Анальоґічно і третий вираз.

проте:

$$J(i)-1=0,$$
$$J(i)=1. \qquad 13)$$

Перейдім тепер до вершка $\tau=\infty i$, то там:

$$\frac{\tau}{i}=\frac{\omega_2}{\omega_2 i}=\infty,$$

тоді:

$$\lim_{\tau=\infty i} h = e^{\pi i \tau}\Big\}_{\tau=\infty i} = e^{-\frac{\pi\tau}{i}}\Big\}_{\frac{\tau}{i}=\infty} = 0,$$

т. зн. що в $J(\tau)$ гине знаменник, а чисельник зводить ся до $\frac{1}{12^3}$, або $J(\tau)$ стає ся там *безконечностию.*

Однак тоді:

$$J(\tau)\; h^2 = J(\tau)\, e^{2\pi i\tau}\Big\}_{\tau=\infty i}$$

є скінчене, т. зн. що для функциї $J(\tau)$ точка $\tau=\infty i$ є *точкою сущно особливою.* Поняти се легко, бо в точцї $\tau=\infty i$ сходять ся всї райони трикутні, отже сходять ся всї вершки рівноважні, або $J(\tau)$ в точцї $\tau=\infty i$ принимає ту саму вартість безконечне число разів; точка та мусить проте бути точкою сущно особливою.

Очевидна є річ, що $J(\tau)$ принимає вартість 0 на всїх вершках рівноважних з вершками C і D, вартість 1 на всїх вершках рівноважних з вершком E. Позаяк $J(\tau)$ є функция автоморфічна, проте всї її вартости мусять містити ся в її основнім (фундаментальнім) районі; $J(\tau)$ мусить в районі тім приняти кожду вартість і то кожду тільки оден раз, бо в районі нема двох місць рівноважних. В тім районі $J(\tau)$ нїде не стає ся зером ані безконечностию, бо g_2 і g_3 лише на вершках того району принимають вартість 0.

На *оси другоряднїй* $J(\tau)$ має самі *дїйсні вартости*, бо на оси другоряднїй ($\tau=\beta i$) арґумент сеї функциї має вид:

$$e^{\pi i\tau}=e^{\pi i\beta i}=e^{-\pi\beta};$$

тії вартости, як се з попередного слїдує, находять ся в границях $(1\cdots\infty)$. Рівнож на боках $\tau=\pm\frac{1}{2}+\beta i$ району основного принимає $J(\tau)$ *вартости дїйсні*, бо тоді арґумент:

$$h=e^{\pi i(\pm\frac{1}{2}+\beta i)}=e^{\pm\frac{\pi i}{2}}\; e^{-\pi\beta},$$

а що в $J(\tau)$ приходять самі паристі степени того арґументу, проте чинник $e^{\pm\frac{\pi i}{2}}$ дасть ± 1, тії дійсні вартости находять ся в границях $(0 \cdots \infty)$.

Нарешті на иньших точках району функция $J(\tau)$ має вартість зложену.

4. Виведемо тепер реляциї між функциєю $J(\tau)$, а иньшими величинами з теориї еліптичних функций.

Позаяк:

$$\frac{g_2}{4} = (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2),$$

а окрім сего:

$$\sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}} = \sqrt{\lambda} = \varkappa, \qquad 14)$$

де $\varkappa^2$ називає ся *модулом* функций еліптичних, а:

$$\sqrt{\frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}} = \sqrt{\lambda'} = \varkappa',$$

$$\lambda + \lambda' = 1, \qquad 15)$$

проте можна написати:

$$g_2 = \frac{4}{3}(1 - \lambda + \lambda^2)(e_1 - e_3)^2.$$

А як:

$$\Delta = 16(e_3 - e_2)^2(e_2 - e_1)^2(e_1 - e_3)^2 = 16\lambda^2\lambda'^2(e_1 - e_3)^6 =$$
$$= 16[\lambda(1-\lambda)]^2(e_1 - e_3)^6,$$

проте можна написати $J(\tau)$ в виді:

$$J(\tau) = \frac{4}{27}\frac{(1 - \lambda + \lambda^2)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2} \qquad 16а)$$

або:

$$J(\tau) = \frac{4}{27}\frac{(1 - \varkappa^2 + \varkappa^4)^3}{(\varkappa^2[1-\varkappa^2])^2} \qquad 16б)$$

Функцию $J(\tau)$ можна проте представити рационально через модул $\varkappa^2$ (звідси і назва функций модулових еліптичних).

Для нас важнійша форма 16а); бачимо, що J є *рациональна функция арґументу* λ; навідворіть (наколи не беремо на увагу, що J є функциєю τ) λ є *альґебраїчною функциєю арґументу* J:

$$\lambda = \lambda(J);$$

як з останної форми виходить, функция $\lambda(J)$ має *шість галузий*, бо під одну вартість J підходить шість вартостий λ.

5. Представимо тепер J рационально еще через один параметр μ. Наколи возьмем однородну біквадратову форму:

$$f(z_1 z_2) = az_1^4 + 4bz_1^3 z_2 + 6cz_1^2 z_2^2 + 4dz_1 z_2^3 + ez_2^4,$$

то незмінники її суть:[1])

$$\begin{aligned} g_2 &= ae - 4bd + 3c^2 \\ g_3 &= ace + 2bcd - ad^2 - b^2 e - c^3 \end{aligned} \tag{17}$$

Незмінники ті лишають ся без зміни при всїх субституциях однородних лїнеарних з модулом 1; при тім звісна є річ, що $f(z_1 z_2)$ стоїть під знаком інтеґрованя в інтеґралї елїптичнім I. рода:

$$I = \int \frac{dz}{\sqrt{f(z)}} \qquad z = \frac{z_1}{z_2}$$

В формі Legendre'a:

$$f(z) = (1 - z)(1 - \lambda z^2),$$

де λ є знаний вже нам параметр.

Наколи напишемо $f(z_1\ z_2)$ в видї:

$$f(z_1 z_2) = (\mu_2^2 z_1^2 - \mu_1^2 z_2^2)(\mu_1^2 z_1^2 - \mu_2^2 z_2^2),$$

то на основі рівнань 17) дістанемо:

$$\begin{aligned} 12g_2 &= \mu_1^8 + 14\mu_1^4\mu_2^4 + \mu_2^8 \\ 216g_3 &= \mu_1^{12} - 33\mu_1^8\mu_2^4 - 33\mu_1^4\mu_2^8 + \mu_2^{12} \end{aligned} \tag{18}$$

а діскрімінанта Δ дістане форму:

$$16\Delta = \mu_1^4\mu_2^4(\mu_1^4 - \mu_2^4)^4 \tag{19}$$

Положім $\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$, $z = \frac{z_1}{z_2}$, то інтеґрал елїптичний I. рода, котрий в формі Legendre'a мав вид:

$$I = \int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - \lambda z^2)}}$$

дістане тепер вид:

$$I_1 = \int \frac{dz}{\sqrt{(\mu^2 - z^2)(1 - \mu^2 z^2)}}$$

а через субституцию $z = \mu y$ перейде на інтеґрал:

$$I_2 = \int \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - \mu^4 y^2)}}$$

Бачимо, що μ^4 є так само модулом, як і $\lambda = \varkappa^2$.

---

[1]) Пор. Klein-Fricke: Elliptische Modulfunctionen I. стор. 15.

На основі рівнань 18) і 10) можемо тепер написати $J(\tau)$ (по скороченю чисельника і знаменника через μ_2^{24}) в формі:

$$J(\tau) = \frac{(\mu^4+\mu^{-4}+14)^3}{108(\mu^4+\mu^{-4}-2)^2}. \qquad 20)$$

J є проте *раціональною функцією арґументу* μ; навідворот є μ *альґебраїчною функцією арґументу* J і то — як слідує з рівнань 18) — функцією о 24 галузях.

З порівнаня реляций 16 а) і 20) дістанемо отсю важну реляцию між λ і μ:

$$\lambda = -\left(\frac{\mu^2-1}{2\mu}\right)^2 \qquad 21)$$

Функциї $\lambda(J)$ і $\mu(J)$ мають для теориї тїл правильних Кляйна велику вагу, длятого функциями сими займем ся тепер зі становища аналітичного.

Функция $\lambda(J)$.

1. Дефініцию сеї функциї подали ми вже в горі; тепер покажемо, що та функция належить до *скінченої ґрупи субституций.*

Возьмім скінчену ґрупу о шістьох субституциях:

$$G = \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda, & \frac{1}{\lambda}, & 1-\lambda, \\ \frac{1}{1-\lambda}, & \frac{\lambda-1}{\lambda}, & \frac{\lambda}{\lambda-1} \end{array} \right\}, \text{ або: } \lambda'=\lambda,\ \lambda'=\frac{1}{\lambda},\ \lambda'=1-\lambda, \ldots [1])$$

і утворім добуток:

$$\left(\lambda'-\lambda\right)\left(\lambda'-\frac{1}{\lambda}\right)\left(\lambda'-(1-\lambda)\right)\left(\lambda'-\frac{1}{1-\lambda}\right)\left(\lambda'-\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)\left(\lambda'-\frac{\lambda}{\lambda-1}\right) =$$
$$= \Pi\,(\lambda', \lambda),$$

то добуток сей можна ввести до форми:

$$(\lambda^2-\lambda)^2\left[\frac{(\lambda'^2-\lambda'+1)^3}{(\lambda'^2-\lambda')^2} - \frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{(\lambda^2-\lambda)^2}\right]$$

Звідси заключаєм, що виражене $\frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{(\lambda^2-\lambda)^2}$ не змінює свого виду, коли в нїм заступимо λ через субстутуциї ґрупи G. Коли отже се виражене має вартість $J(\tau)$ для $\lambda = \lambda(J)$, то має ту саму вартість $J(\tau)$

[1]) Пор. Weber Ellipt. Functionen u. alg. Zahlen. стор. 141.

і для $\lambda = \frac{1}{\lambda(J)}$, $\lambda = 1-\lambda(J)$, $\lambda = \frac{1}{1-\lambda(J)}$, $\lambda = \frac{\lambda(J)-1}{\lambda(J)}$, $\lambda = \frac{\lambda(J)}{\lambda(J)-1}$

то зн., що λ, $\frac{1}{\lambda}$, $1-\lambda$, $\frac{1}{1-\lambda}$, $\frac{\lambda-1}{\lambda}$, $\frac{\lambda}{\lambda-1}$ є галузями функциї λ.

Всї прочі галузи виражають ся проте через першу галузь лінеарно, або $J(\tau)$ *виражене через* λ *не змінне ся в лінеарній групі* G.

Пошукаймо тих нових галузий. Слїдують они з рівнань:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\lambda}; \text{ отже } \lambda = \pm 1$$

$$\lambda_2 = 1-\lambda, \text{ отже } \lambda = \tfrac{1}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_3 &= \frac{\lambda-1}{\lambda}, \text{ отже } \lambda^2-\lambda+1=0 \\ \lambda_4 &= \frac{1}{1-\lambda}, \text{ отже } \lambda^2-\lambda+1=0 \end{aligned}\right\} \lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$\lambda_5 = \frac{\lambda}{\lambda-1}, \text{ отже } \lambda^2-2\lambda=0, \text{ т. є. } \lambda = 0,\ 2.$$

Рівнанє 16 a):

$$J(\tau) = \frac{4}{27}\frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{(\lambda^2-\lambda)^2}$$

може проте мати многократні особливі точки в $J = 0$, $J = 1$, $J = \infty$.

2. Побачимо, що то суть *особливі точки многократні*, так що галузи функциї $\lambda(J)$ в тих точках є з собою циклїчно злучені. В тій цїли уважаймо в послїднім рівнаню J за змінну независиму і постараймо ся про цїлковитий образ площі (J) на площі (λ).

Наколи J є дійсне, то і права сторона є дійсна; а коли єї напишемо в видї:

$$\frac{4}{27}(\lambda^2-\lambda)\left[1+\frac{1}{\lambda^2-\lambda}\right]^3$$

то відразу бачимо, що мусить бути дійсне:

$$\lambda^2-\lambda = \lambda(1-\lambda).$$

Положім:

$$\lambda = x+iy,$$

то як:

$$\lambda(1-\lambda) = x-x^2+y^2-iy(2x-1)$$

має бути дійсне, то:

$$y(2x-1) = 0.$$

Бачимо проте, що J є дійсне на обох простих $y = 0$, $x = \frac{1}{2}$, отже на оси перворядній площі (λ) і на лінії рівнобіжній до оси другорядної.

Коли дальше (по поділеню чисельника і знаменника через λ^3) положимо:

$$\frac{27}{4}\,J = \frac{(\lambda+\lambda^{-1}-1)^3}{\lambda+\lambda^{-1}-2} = \frac{[(1-\lambda)+(1-\lambda)^{-1}-1]^3}{(1-\lambda)+(1-\lambda)^{-1}-2},$$

бо за λ можна положити $(1-\lambda)$ на основі ґрупи G, то бачимо, що J є тоді дійсне, коли $\lambda+\lambda^{-1}$ або $(1-\lambda)+(1-\lambda)^{-1}$ є дійсне.

Наколи положимо $\lambda = x+iy$, а часть другорядну зрівнаємо до зера, дістанемо:

$$x^2+y^2-1 = 0.$$
$$(x-1)^2+y^2-1 = 0.$$

Бачимо проте, що *перворядна вісь площі* (J) відповідає на площі (λ) двом простим $y = 0$, $x = \frac{1}{2}$ і двом колам з лучем 1, а средоточками $\lambda = 0$, $\lambda = 1$. (Пор. фіґуру I).

Для $J=0$ дістанемо:

$$\lambda^2-\lambda+1 = 0, \text{ або:}$$
$$\lambda = \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm\frac{\pi i}{3}} \qquad \text{(A)}$$

для $J = 1$ дістанемо:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda = -1\\ \lambda = \frac{1}{2}\\ \lambda = 2\end{array}\right| \qquad \text{(B)}$$

в кінци для $J = \infty$ дістанемо:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda = 0\\ \lambda = +1\\ \lambda = \infty\end{array}\right| \qquad \text{(C)}$$

Таким способом площа (λ) розпала ся на 12 трикутників, утворених з луків; два з них, що сходять ся з собою, представляють образ цілої площі (J), так що один з них є образом додатної, другий від'ємної півплощі (J). Тіняві трикутники представляють додатну півплощу, бо їх вершки, отже вартости $J = 0, 1, \infty$ так по собі слідують, що окружанє тих трикутників, відбуває ся в сторону додатну (додатне окружанє трикутника відбуває ся в сторону противну, як рух вказника на годиннику; на площі (J) додатний напрям є $0 \cdots +1 \cdots +\infty$).

Бачимо дальше, що дійсно точки $J = 0, 1, \infty$ є точками розгалуженя функциї $\lambda(J$; іменно в 2 точках *A* маємо по три пари трикутників, що мають в *A* вершки, а звідси заключаємо:

В точці $J = 0$ *має функция* $\lambda(J)$ *дві точки особливі, в яких сходять ся з собою по три галузи.*

В точках B маємо по дві пари трикутників, т. зн., що:

В точці $J = 1$ *має функция* $\lambda(J)$ *три точки многократні особливі, в которих сходять ся по дві галузи з собою.*

В кінци в трьох точках C маємо по дві пари трикутників, а звідси слідує, що:

Функция $\lambda(J)$ *має в точці* $J = \infty$ *три точки многократні особливі, в котрих сходять ся по дві галузи з собою:*

Кождий трикутник має кути $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$.

Функция $\mu(J)$.

1. Бачилисьмо, що:

$$J = \frac{(\mu^4+\mu^{-4}+14)^3}{108(\mu^4+\mu^{-4}-2)^2}$$

Рівнанє се дістанемо таким способом з рівнаня 16а), що положимо:

$$\lambda = -\left(\frac{\mu^2-1}{2\mu}\right)^2$$

Бачилисьмо дальше, що J в функциї λ не зміняє ся в ґрупі G.

Коли отже в ґрупі G за λ положимо $-\left(\frac{\mu^2-1}{2\mu}\right)^2$, а за λ' положимо $-\left(\frac{\mu'^2-1}{2\mu'}\right)^2$, дістанемо ґрупу H, в якій J в функциї μ не зміняє ся. Ґрупа H має вид:

$$H = \left\{\begin{aligned}
\frac{\mu'^2-1}{2\mu'} &= \pm\frac{\mu^2-1}{2\mu} \\
\frac{\mu'^2-1}{2\mu'} &= \pm\frac{2\mu}{\mu^2-1} \\
\frac{\mu'^2-1}{2\mu'} &= 1 \mp \frac{\mu^2-1}{2\mu} \\
\frac{\mu'^2-1}{2\gamma,} &= \frac{\pm\frac{\mu^2-1}{2\mu}-1}{\frac{\mu^2-1}{2\mu}} \\
\frac{\mu'^2-1}{2\mu'} &= \frac{1}{1\mp\frac{\mu^2-1}{2\mu}} \\
\frac{\mu'^2-1}{2\mu'} &= \frac{\pm\frac{\mu^2-1}{2\mu}}{\pm\frac{\mu^2-1}{2\mu}-1}
\end{aligned}\right\}$$

Кожде з тих рівнань дає чотири субституциї:

$$\mu' = f(\mu),$$

так що ґрупа H по обчисленю представляє ся:

$$\mu' = i^{\varkappa}\mu,\ \frac{i^{\varkappa}}{\mu},\ i^{\varkappa}\frac{\mu+1}{\mu-1},\ i^{\varkappa}\frac{\mu-1}{\mu+1},\ i^{\varkappa}\frac{\mu-i}{\mu+i},\ i^{\varkappa}\frac{\mu+i}{\mu-i};$$

$$\varkappa = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

заключає она в собі 24 лінеарних субституций. Наколи отже μ беремо за одну галузь функциї $\mu(J)$, то прочі галузи в числї 23 виражають ся лінеарно через $\mu(J)$.

2. Ходить нам тепер про особливі многократні точки функциї $\mu(J)$. І тут особливими точками функциї $\mu(J)$ є $J = 0, 1, \infty$, як се з виду сеї функциї виходить. Щоби пізнати близше, які то є точки, зробимо ось-так:

В точках $J = 0, 1, \infty$ має функция λ повторні вартости:

$$\lambda = \pm 1,\ \lambda = \tfrac{1}{2},\ \lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2},\ \lambda = 0.$$

Отже тепер в тих точках має мати також повторні вартости функция $-\left(\frac{\mu^2-1}{2\mu}\right)^2$, т. зн. що в точках $0, 1, \infty$ дістанемо вартости отсї з рівнань:

$$-\left(\frac{\mu^2-1}{2\mu}\right)^2 = \pm 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2},\ 0;$$

так на пр. в точцї $J = \infty$ маємо вартість $\mu = \pm 1$, бо там $\lambda = 0$, отже $\frac{\mu^2-1}{2\mu} = 0$.

Яковість точок многократних $0, 1, \infty$ розслїдимо, наколи розслїдимо образ площі (J) на площі (μ), а властиво перворядної оси площі (J). J є дійсне тодї, коли $\mu^4 + \mu^{-4}$ є дійсне; наколи отже положимо $\mu = x+iy$ і зрівнаємо другорядну часть до зера, дістанемо:

$$xy\ (x+y)(x-y)(x^2+y^2-1) = 0.$$

J зістає проте на площі (μ) дійсне на оси x і y, на двосїчних кута замкненого між осею x і y, і на колї з лучем 1 а средоточкою $\mu = 0$. Малибисьмо отже 16 районів. Однак функция має 24 галузий, мусить отже бути районів $2 \,.\, 24 = 48$ (бо 24 районів відносить ся до додатної, 24 до від'ємної півплощі (J)).

Длятого положім:

$$\frac{\mu^2-1}{2\mu} = \frac{(x+yi)-1}{2(x+iy)}$$

J є дійсне, наколи $\lambda = 1$, або наколи:

$$\left|\frac{\mu^2-1}{2\mu}\right| = \left|\frac{(x+ix)^2-1}{2(x+iy)}\right| = 1.$$

Безвзглядна вартість чисельника має бути рівна безвзглядній вартости знаменника, длятого дістанемо:

$$(x^2+y^2+2x-1)(x^2+y^2-2x-1) = 0.$$

J є дійсне на колах:

$$(x\pm1)^2+y^2 = 2,$$

т. є. на колах о средоточці $\mu = \mp1$, а лучу $\sqrt{2}$.

Позаяк дальше:

$$1-\lambda = \left(\frac{\mu^2+1}{2\mu}\right)^2,$$

то до попередних кіл долучать ся єще два кола:

$$x^2+(y\pm1)^2 = 2,$$

т. є. кола пристайні до попередних з средоточках $\mu = \pm i$.

Дістанемо отже 48 районів (фіґ. II.). З фіґури пізнати ясно яковість точок особливих 0, 1, ∞, а іменно:

В точці $J = 0$ *має* $\mu(J)$ *8 точок особливих, в яких сходять ся по 3 галузи, в точці* $J = 1$ *12 точок особливих, в яких сходять ся по 2 галузи, в точці* $J = \infty$ *6 точок особливих, в яких сходять ся по 4 галузи.*

Кождий трикутник на площі μ, що представляє долішну або горішну половину площі (J), має кути $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$.

Маємо проте слідуючі висліди:

Функция $J(\tau)$ яко функция арґументу τ має безконечну ґрупу модулову, яко функция арґументу λ ґрупу 6 субституций, яко функция арґументу μ ґрупу 24 субституций.

Відворотна фукция $\lambda(J)$ є альґебраічною 6-вартостною функциєю арґументу J; через одну єї галузь представляють ся лінеарно всї прочі галузи. Відворотна функция $\mu(J)$ є альґебраічною 24-вартостною функциєю арґументу J; через одну єї галузь представляють ся лінеарно прочі галузи (в числї 23).

Лишає ся нам розслідити еще відворотну функцию $\tau(J)$.

Функция $\tau(J)$.

1. Є очевидна річ, що наколи J є однозначна функция арґументу τ, то τ є *безконечно-многозначна функция арґументу* J. Слідує се звідси, що $J(\tau)$ є функция модулова арґументу τ, отже має ґрупу:

$$\left(\tau, \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 1;$$

длятого всї галузи функциї τ дадуть ся представити в видї:

$$\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}.$$

Очевидна є також і ся обставина, що точки $J = 0, 1, \infty$ є точками розгалуженя функциї $\tau(J)$ на площі (J), бо в точції $J = \infty$ сходять ся всї галузи функциї $\tau(J)$, в точцї $J = 0$ є $\tau(0) = \rho$, сходять ся отже в тій точцї 3 галузи, бо ρ має три вартости, для $J = 1$ маємо $\tau(1) = e^{\frac{\pi i}{2}} = \pm\sqrt{-1}$, сходять ся там проте 2 галузи.

2. Щоби близше розслїдити характер сеї функциї, займемо ся *рівнанєм ріжничковим період функций елїптичних.*

Як звісно, інтеґрал елїптичний першого рода в нормальній формі Веєрштрасса по дорозї замкненій дає періоду:

$$2\omega = \int \frac{dy}{\sqrt{y^3 - g_2 y - g_3}}.$$

Наколи застосуєм субституцию:

$$y = \frac{g_3}{g_2} z,$$

то дістанемо:

$$2\omega = \int \frac{\frac{g_3}{g_2} dz}{\sqrt{4\frac{g_3^3}{g_2} z^3 - g_2 \frac{g_3}{g_2} z - g_3}} = \int \frac{\sqrt{\frac{g_2}{g_3}}\, dz}{\sqrt{4z^3 - \frac{g_2^3}{g_3}(z+1)}}.$$

Однак:

$$\frac{g_2^3}{g_3} = \frac{27J(\tau)}{J(\tau)-1},$$

отже:

$$2\omega\sqrt{\frac{g_3}{g_2}} = \Omega = \int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - \frac{27J}{J-1}(z+1)}} \qquad 22)$$

Ω назвемо після Кляйна *нормованою періодою* інтеґралу I. рода.

Розслїдім тепер зависимість сеї періоди від функциї J.

Кожда періода дає ся представити лїнеарно однородно через дві первістні періоди:

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{g_3}{g_2}}\, 2\omega_1, \quad \Omega_2 = \sqrt{\frac{g_3}{g_2}}\, 2\omega_2,$$

так що:

$$\Omega = m_1\Omega_1 + m_2\Omega_2 \qquad (\alpha)$$

m_1 і m_2 є які-небудь числа цілі. З відси слїдує:

$$\frac{d\Omega}{dJ} = m_1 \frac{d\Omega_1}{dJ} + m_2 \frac{d\Omega_2}{dJ} \qquad (\beta)$$

$$\frac{d^2\Omega}{dJ^2} = m_1 \frac{d^2\Omega_1}{dJ^2} + m_2 \frac{d^2\Omega_2}{dJ^2} \qquad (\gamma)$$

Наколи елїмінуємо з рівнань (α), (β), (γ) величини m_1 m_2, дістанемо рівнанє:

$$\begin{vmatrix} \Omega & \Omega_1 & \Omega_2 \\ \frac{d\Omega}{dJ} & \frac{d\Omega_1}{dJ} & \frac{d\Omega_2}{dJ} \\ \frac{d^2\Omega}{dJ^2} & \frac{d^2\Omega_1}{dJ^2} & \frac{d^2\Omega_2}{dJ^2} \end{vmatrix} = 0$$

Рівнанє се остоїть ся, яких-небудь ужиємо пар, щоби представити періоду Ω; наколи отже се рівнанє розвинемо після колюмни першої, то сочинники всегда будуть *однозначними* функциями функції J. Дістанемо:

$$\frac{d^2\Omega}{dJ^2} + r_1(J) \frac{d\Omega}{dJ} + r_2(J)\Omega = 0 \qquad 23)$$

Треба еще винайти однозначні сочинники r_1 і r_2.

В тій цїли возьмім інтеґрал елїптичний другого рода по дорозї замкненій:

$$2\eta = \int \frac{ydy}{\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}},$$

то наколи знову зробимо субституцию:

$$y = \frac{g_3}{g_2} z,$$

дістанемо *нормовану періоду*:

$$-H = \int \frac{zdz}{\sqrt{4z^3 + g(z+1)}}, \qquad 24)$$

$$g = \frac{27J}{J-1}. \qquad 25)$$

Положім:

$$\sqrt{4z^3+g(z+1)} = R,$$

то ріжничкуючи Ω і $-H$ після g дістанемо:

$$\frac{d\Omega}{dg} = -\int\frac{dz}{2R^3} - \int\frac{zdz}{2R^3}$$

$$\frac{dH}{dg} = \int\frac{zdz}{2R^3} + \int\frac{z^2dz}{2R^3} \qquad 26)$$

По правій стороні маємо три інтеґрали:

$$\int\frac{z^\alpha dz}{2R^3} \qquad \alpha = 0,\ 1,\ 2.$$

Є то інтеґрали по колах замкнених; квот $\frac{z^\alpha}{R}$, ведений від якоїсь своєї вартости з точки z на колї K по колї K вертає до тої точки з тою самою вартостию, длятого:

$$\int_K d\left(\frac{z^\alpha}{R}\right) = 0.$$

Для $\alpha = 0$ є:

$$d\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{-12z^2-g}{2R^2.\ R}, \text{ отже}$$

$$12\int\frac{z^2dz}{2R^3} + g\int\frac{dz}{2R^3} = 0. \qquad 27)$$

Наколи $\alpha = 1,\ 2$, то:

$$d\left(\frac{z^\alpha}{R}\right) = \frac{2R^2\alpha z^{\alpha-1}-z^\alpha(12z^2+g)}{2R^3}dz,$$

отже для $\alpha = 1$ маємо:

$$d\left(\frac{z}{R}\right) = \frac{dz}{R} - \frac{2gz}{2R^3}\,dz - \frac{3g}{2R^3}dz,$$

а позаяк:

$$\int d\left(\frac{z}{R}\right) = 0,\quad \int\frac{dz}{2R} = \frac{\Omega}{2},$$

то:

$$2g\int\frac{zdz}{2R^3} + 3g\int\frac{dz}{2R^3} = \frac{\Omega}{2} \tag{28}$$

Анальоґічно для $\alpha = 2$:

$$2g\int\frac{z^2dz}{2R^3} + 3g\int\frac{zdz}{2R^3} = \frac{H}{2} \tag{29}$$

Рівнаня 27), 28), 29) дають:

$$\int\frac{z^2dz}{2R^3} = \frac{2H-3\Omega}{8(g+27)}, \int\frac{zdz}{2R^3} = \frac{g\Omega+18H}{4g(g+27)},$$

$$\int\frac{dz}{2R^3} = \frac{g\Omega-6H}{2g(g+27)}.$$

З огляду на се рівнаня 26) перейдуть на:

$$4(g+27)\frac{d\Omega}{dg} + (18+g)\Omega+6H = 0.$$

$$4(g+27)\frac{dH}{dg} + \frac{1}{2}g\Omega-(g+18)H = 0,$$

або, позаяк:

$$g = \frac{27J}{1-J}, \quad dg = \frac{27}{(1-J)^2}dJ,$$

$$\left.\begin{aligned}36J(J-1)\frac{d\Omega}{dJ} &= 3(J+2)\Omega-2(J-1)\,H.\\ 24J(J-1)\frac{dH}{dJ} &= 2J\Omega-2(J+2)\,H.\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Коли зріжничкуєм перше з рівнань 30), то:

$$26J(J-1)\frac{d^2\Omega}{dJ^2} + (6gJ-42)\frac{d\Omega}{dJ} + 2(J-1)\frac{dH}{dJ} - 3\Omega - 2H = 0. \tag{31}$$

Елїмінация величин H і $\frac{dH}{dJ}$ з рівнань 30) і 31) дасть:

$$\frac{d^2\Omega}{dJ^2} + \frac{1}{J}\frac{d\Omega}{dJ} + \frac{\frac{31}{144}J - \frac{1}{36}}{J^2(J-1)^2}\Omega = 0. \tag{32}$$

Наколи порівнаєм се рівнанє з рівнанєм 23), то бачимо, що:

$$r_1(J) = \frac{1}{J}$$

$$r_2(J) = \frac{\frac{31}{144}J - \frac{1}{36}}{J^2(J-1)^2}$$

Сочинники r_1 і r_2 є проте *рациональними функциями функциї* J.

Рівнанє 32) є *рівнанє ріжничкове 2. ряду* о місцях особливих $J = 0, 1, \infty$. Для $J = 0, 1$ є се очевидне, для $J = \infty$ легко ся о тім можна переконати, наколи положимо $J = \frac{1}{J'}$, і розслідимо се рівнанє для $J' = 0$. В окруженю кождої иньшої точки неособливої J_0 представить ся інтеґрал Ω звичайним рядом степенним:

$$\Omega = \mathfrak{P}(J-J_0).$$

Наколи два специяльні інтеґрали рівнаня 32) є $\overline{\Omega}_1$ і $\overline{\Omega}_2$, що творять систем основний, то кождий иньший інтеґрал представить ся лінеарно:

$$\Omega = c_1\Omega_1 + c_2\Omega_2.$$

До тих інтеґралів належать і періоди первістні Ω_1 і Ω_2 на основі рівнаня 23) так, що кождий інтеґрал сего рівнаня дасть ся написати в формі:

$$\Omega = m_1\Omega_1 + m_2\Omega_2;$$

m_1 і m_2 є числа цілї. — Позаяк функция $\tau(J)$ є квотом період $\tau = \frac{\Omega_1(J)}{\Omega_2(J)}$, бо Ω_1 і Ω_2 ріжнять ся від період ω_1 і ω_2 лиш о сталий чинник, длятого наколи хочемо розслідити функцию $\tau(J)$ в окруженю місць $J = 0, 1, \infty$, треба розслідити там функциї $\Omega_1(J)$ і $\Omega_2(J)$ на основі рівнаня 32) (після звісної теориї Фухса). Того робити не будемо, бо се завелоби нас за далеко. Розсліди ті перевів обширно Кляйн[1]) і одержав слїдуючі розвинення для функциї $\tau(J)$ в окруженю точок особливих:

в окруженю $J = 0$:

$$\tau = \rho\,\frac{1+\rho\sqrt[3]{J}\,\mathfrak{P}^{(0)}(J)}{1+\sqrt[3]{J}\,\mathfrak{P}^{(0)}(J)} \text{ для додатної півплощі (J).}$$

$$\tau = -\rho^2\,\frac{1+\sqrt[3]{J}\,\mathfrak{P}^{(0)}(J)}{1+\rho\sqrt[3]{J}\,\mathfrak{P}^{(0)}(J)} \text{ для від'ємної півплощі (J).}$$

[1]) Klein loc. cit. стор. 39—61.

в окруженю $J = 1$:

$$\tau = i\,\frac{1-\sqrt{J-1}}{1+\sqrt{J-1}}\,\frac{\mathfrak{P}^{(1)}(J-1)}{\mathfrak{P}^{(1)}(J-1)}$$

в окруженю $J = \infty$:

$$2\pi i\tau = -\log J - 3\log 12\,\mathfrak{P}^{(\infty)}\left(\frac{1}{J}\right)$$

З рівнаня ріжничкового 32) перейдемо до *рівнаня ріжничкового третого ряду*, котрого інтеґралом є $\tau(J)$.

Два специяльні інтеґрали рівнаня 32) є Ω_1 і Ω_2. Наколи інтеґрали ті вставимо в се рівнане і сочинники при $\frac{d\Omega}{dJ}$ і Ω назначимо через p і q, одержимо два рівнаня:

$$\Omega_1''+p\Omega_1'+q\Omega_1 = 0.$$
$$\Omega_2''+p\Omega_2'+q\Omega_2 = 0.$$

Через елімінацию q дістанемо рівнане:

$$(\Omega_2\Omega_1''-\Omega_1\Omega_2'')+p(\Omega_2\Omega_1'-\Omega_1\Omega_2') = 0. \qquad 33)$$

Позаяк: $\tau = \frac{\Omega_1}{\Omega_2}$, то:

$$\frac{d\tau}{dJ} = \frac{\Omega_2\Omega_1'-\Omega_1\Omega_2'}{\Omega_2^{\,2}} = \tau',$$

а звідси походна льоґаритмічна:

$$\frac{\tau''}{\tau'} = \frac{\Omega_2\Omega_1''-\Omega_1\Omega_2''}{\Omega_2\Omega_1'-\Omega_1\Omega_2'} - 2\,\frac{\Omega_2'}{\Omega_2}$$

або з огляду на 33):

$$-\frac{\tau''}{\tau'} = p+2\frac{\Omega_2'}{\Omega_2}$$

Наколи зріжничкуєм се рівнане з одної сторони, а з другої сторони рівнане се піднесемо до квадрату і поділимо через -2, то дістанемо:

$$\frac{\tau'''}{\tau'} - \left(\frac{\tau''}{\tau'}\right)^2 = -p'-2\frac{\Omega_2''}{\Omega_2}+2\left(\frac{\Omega_2'}{\Omega_2}\right)^2$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau''}{\tau'}\right)^2 = -\frac{1}{2}p^2-2p\frac{\Omega_2'}{\Omega_2}-2\left(\frac{\Omega_2'}{\Omega_2}\right)^2$$

Наколи додамо ті рівнаня і увзглядцемо реляциї, які вжесьмо одержали, то дістанемо:

$$\frac{\tau'''}{\tau'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\tau''}{\tau'}\right)^2 = -p'-\frac{1}{2}p^2-\frac{2}{\Omega_2}\,(\Omega_2''+p\Omega_2') \;-\; 2q-p'-\frac{1}{2}p^2$$

А коли за p i q вставимо вартости і обчислимо p', одержимо рівнане:

$$\frac{\tau'''}{\tau'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\tau''}{\tau'}\right)^2 = \frac{4}{9J^2} + \frac{3}{8(1-J^2)^2} + \frac{23}{72J(J-1)} \qquad 34)$$

Таке рівнане ріжничкове сповняє функция $\tau(J)$.

Після Cayley'а називаємо ліву сторону *шварцианом* функциї $\tau(J)$ і значимо за Кляйном:

$$\frac{\tau'''}{\tau'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\tau''}{\tau'}\right)^2 = [\tau]_J$$

Як з теориї рівнань ріжничкових звістно, шварциян не зміняє своєї вартости, наколи на τ зробимо субституцию ґрупи лінеарної:

$$\left(\tau, \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 1.$$

Найзагальнійший інтеґрал рівнаня 34) буде проте $\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}$; вислід сей вповні годить ся з нашою увагою, що *всї галузи функциї* $\tau(J)$ *виражають ся лїнеарно через одну галузь на основі модулової безконечної ґрупи*.

Правій стороні рівнаня 34) можна надати вид:

$$[\tau]_J = \frac{\nu_1^2-1}{2\nu_1^2(J^2-1)^2} + \frac{\nu_2^2-1}{2\nu_2^2J^2} + \frac{\frac{1}{\nu_1^2}+\frac{1}{\nu_2^2}-\frac{1}{\nu_3^2}-1.}{2J(J-1)} \qquad 35)$$

бо оба рівнаня є схожі для:

$$\nu_1 = 2,\ \nu_2 = 3,\ \nu_3 = \infty.$$

А що загальний інтеґрал рівнаня 35) значимо:

$$s\left(\frac{1}{\nu_1}, \frac{1}{\nu_2}, \frac{1}{\nu_3}, J\right)$$

і називаємо єго *функциєю трикутника* або *функциєю s — Шварца*, проте і функция $\tau(J)$ є функциєю трикутника:

$$\tau(J) = s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{\infty}, J\right).$$

В саму теорию функций Шварца не входимо близше.

Твердженє Picard'а.

Функция $\tau(J)$ має велике значенє для теориї функций трансцендентних, бо при её помочи доказав Picard слїдуюче важне твердженє:

Функция цїлковита трансцендентна $G(x)$ *в конечности не може приняти що найбільше одної лише вартости.*

Бо приймем, що функция $G(x)$ в конечности не може приняти двох вартостий *a* і *b*, то тоді квот:

$$\frac{G(x)-a}{b-a} = g(x)$$

є функция цілковита, котра не може бути ані 0, ані 1, бо $G(x)$ не може бути рівне ані *a*, ані *b*.

Положім:

$$g(x) = J(\tau),$$

то наколи на площі (x) возьмемо дорогу замкнену, що виходить з якоїсь точки x_0 і біжить в конечности, то їй на площі (τ) відповість дорога замкнена s, котра ніде не може переходити через точки 0, 1, ∞, бо тих вартостий $g(x)$ не може приняти; точки 0, 1, ∞ мусять проте лежати за контуром s. Най точці x_0 відповідає на площі (τ) точка τ_0, то наколи τ будемо уважали за функцию *x*:

$$\tau = f(x),$$

то та функция мусить бути однозначна і скінчена, або цілковита арґументу *x*. Очевидно, що тоді і функция $e^{if(x)}$ є функция цілковита, а як:

$$\tau = \alpha+\beta i, \qquad \beta > 0,$$

то:

$$if(x) = \alpha i - \beta, \text{ а:}$$

$$\left| e^{if(x)} \right| = e^{-\beta} < 1,$$

т. з. що беззглядна вартість сеї функциї є стало менша від 1.

Однак $e^{if(x)}$ є функция цілковита, длятого послідна реляция є лиш тоді можлива, коли $f(x) = \text{const}$. Тоді і

$$g(x) = \text{const.},$$

або:

$$\frac{G(x)-a}{b-a} = \text{const.}$$

а що $G(x)$ не може бути const., бо инакше не булаби се функция трансцендентна, проте $G(x)$ в конечности може не приняти що найбільше одної лише вартости. — Твердженє Picard'a є отже доказане.

Реляциї між незмінниками g_2, g_3, Δ і функциєю J.

На основі властностий незмінника J подамо тепер деякі реляциї для форм g_2, g_3, Δ; представимо именно тії форми через $J(\tau)$, а опісля взаїмно через себе.

1. В тій цїли возьмім рівнаня 30):

$$36J(J-1)\frac{d\Omega_\mu}{dJ} = 3(J+2)\Omega_\mu - 2(J-1)H_\mu$$
$$24J(J-1)\frac{dH_\nu}{dJ} = 3J\Omega_\nu - 2(J+2)H_\nu \qquad \begin{matrix}\mu = 1,\ 2\\ \nu = 1,\ 2\end{matrix} \tag{36}$$

Наколи помножимо перше з тих рівнань через $2H_\nu$, друге через $3\Omega_\mu$ і додамо, то дістанемо:

$$72J(J-1)\left(\Omega_\mu\frac{dH_\nu}{dJ} + H_\nu\frac{d\Omega_\mu}{dJ}\right) = 9J\Omega_1\Omega_2 - 4(J-1)H_1H_2$$

Позаяк права сторона є симетрична, то і ліва мусить бути симетрична з огляду на μ і ν, так що:

$$\frac{d(\Omega_1H_2)}{dJ} = \frac{d(\Omega_2H_1)}{dJ},$$ а звідси по з'інтеґрованю;

$$\Omega_1H_2 - \Omega_2H_1 = \omega_1\eta_2 - \omega_2\eta_1 = c. \tag{37}$$

Наколи перше з рівнань 36) напишемо для $\mu = 1$ і $\mu = 2$, то через елїмінацию і порівнанє з рівнанєм 37) дістанемо рівнанє:

$$\Omega_2\frac{d\Omega_1}{dJ} - \Omega_1\frac{d\Omega_2}{dJ} = \frac{c}{18J},$$

а позаяк ліва сторона є нїчо иньчого, як $\Omega_2{}^2\frac{d\tau}{dJ}$, то:

$$18\Omega_2{}^2d\tau = c\frac{dJ}{J} = c\,d\log J.$$

З огляду на істнуючу для ненормованих період релянцию Legendre'a:

$$\omega_1\eta_2 - \omega_2\eta_1 = 2\pi i\ ^{1})$$

можна написати:

$$18\Omega_2{}^2d\tau = 2\pi i\frac{dJ}{J},$$

а що:

$$\Omega_2 = 2\omega_2\sqrt{\frac{g_3}{g_2}},\quad J = \frac{g_2{}^3}{\Delta},\quad \text{то}$$

$$\frac{dJ}{\omega_2{}^2d\tau} = \frac{9g_2{}^2g_3}{\pi i\Delta}. \tag{38}$$

Наколи ще напишемо очевидну реляцию:

$$J : J-1 : 1 = g_2{}^3 : 27g_3{}^2 : \Delta,$$

---

[1]) Пор.: Klein loc. cit. стор. 117.

то з послідних рівнань дістанемо:

$$g_2 = \left(\frac{dJ}{\omega_2{}^2 d\tau}\right)^2 \frac{\pi^2}{3J(1-J)}$$
$$g_3 = \left(\frac{dJ}{\omega_2{}^2 d\tau}\right)^3 \frac{\pi^3 J}{27J^2(1-J)} \qquad 39)$$
$$\Delta = \left(\frac{dJ}{\omega_2{}^2 d\tau}\right)^6 \frac{\pi^6}{27J^4(1-J)^3}.$$

2. Перейдім еще до реляциий між g_2, g_3, Δ.

На основі звістного твердженя Euler'a про функциї однородні дістанемо слідуючі реляциї:

$$\omega_1 \frac{\partial g_2}{\partial \omega_1} + \omega_2 \frac{\partial g_2}{\partial \omega_2} = -4g_2$$
$$\omega_1 \frac{\partial g_3}{\partial \omega_1} + \omega_2 \frac{\partial g_3}{\partial \omega_2} = -6g_3 \qquad 40)$$
$$\omega_1 \frac{\partial \log\Delta}{\partial \omega_1} + \omega_2 \frac{\partial \log\Delta}{\partial \omega_2} = -12^{1)}$$

Наколи возьмемо з $J = \frac{g_2{}^3}{\Delta}$ льоґаритмічну походну взглядом ω_1 і ω_2, то дістанемо:

$$\frac{1}{J} \frac{dJ}{\omega_2{}^2 d\tau} \omega_2 = \frac{3}{g_2} \frac{\partial d_2}{\partial \omega_1} - \frac{\partial \log\Delta}{\partial \omega_1}$$
$$-\frac{1}{J} \frac{dJ}{\omega_2{}^2 d\tau} \omega_1 = \frac{3}{g_2} \frac{\partial g_2}{\partial \omega_2} - \frac{\partial \log\Delta}{\partial \omega_2} \qquad 41)$$

Визначник правих сторін є:

$$T(g_2, \log\Delta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_2}{\partial \omega_1} & \frac{\partial \log\Delta}{\partial \omega_1} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \omega_2} & \frac{\partial \log\Delta}{\partial \omega_2} \end{vmatrix} = -\frac{4g_2}{J} \frac{dJ}{\omega_2{}^2 d\tau} \qquad 42)$$

бо наколи перше з рівнань 39) помножимо через $\frac{\partial \log\Delta}{\partial \omega_2}$, трете через $\frac{\partial g_2}{\partial \omega_2}$, то їх ріжниця є:

$$\omega_1 \, T(g_2, \log\Delta) = -4g_2 \frac{\partial \log\Delta}{\partial \omega_2} + 12 \frac{\partial g_2}{\partial \omega_2},$$

а звідси на основі другого з рівнань 41) слідує від разу форма 42).

[1]) Наколи поділимо через Δ.

А позаяк на основі рівнаня 38).

$$-\frac{4g_2}{J}\frac{dJ}{\omega_2{}^2 d\tau} = -\frac{36g_3}{\pi i},$$

то:

$$g_3(\omega_1\ \omega_2) = -\frac{\pi i}{36}\,T(g_2, \log\Delta) \qquad 43)$$

Анальоґічно наколи возьмем льоґаритмічну походну з функциї:

$$J-1 = \frac{27g_3{}^2}{\Delta}$$

дістанемо:

$$g_2{}^3 = -\frac{\pi i}{2}\,T(g_3, \log\Delta),$$

а в кінци через порівнанє походних льоґаритмічних обох функций J і (J—1) дійдемо до реляциї:

$$\Delta\ (\omega_1\,\omega_2) = \frac{3\pi i}{2}\,T\ (g_2\ g_3) \qquad 44)$$

Ходить еще о визначенє самого g_2 $(\omega_1\ \omega_2)$ (бо до тепер маємо $g_2{}^3$). Наколи возьмемо *визначник* Hesse'го для $\log\Delta$:

$$H\,(\log\Delta) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2\log\Delta}{\partial\omega_1{}^2} & \dfrac{\partial^2\log\Delta}{\partial\omega_1\partial\omega_2} \\ \dfrac{\partial^2\log\Delta}{\partial\omega_1\partial\omega_2} & \dfrac{\partial^2\log\Delta}{\partial\omega_2{}^2} \end{vmatrix}$$

то на основі другого рівнаня 30), котре напишемо для H_1 і H_2:

$$24\,J\,(J-1)\,\frac{dH_1}{dJ} = 3J\Omega_1 - 2(J+2)H_1$$

$$24\,J\,(J-1)\,\frac{dH_2}{dJ} = 3J\Omega_2 - 2(J+2)H_2$$

і реляциї Legendre'а прийдемо в кінци до реляциї:

$$g_2\,(\omega_1\,\omega_2) = \frac{\pi^2}{3}\,H\ (\log\Delta).^{1)}$$

З відси слідує, що g_2 є *визначником* Hesse'го з $\log\Delta$, g_3 *визначником функцийним з* g_2 *і* $\log\Delta$, Δ *визначником функцийним з* g_2 *і* g_3.

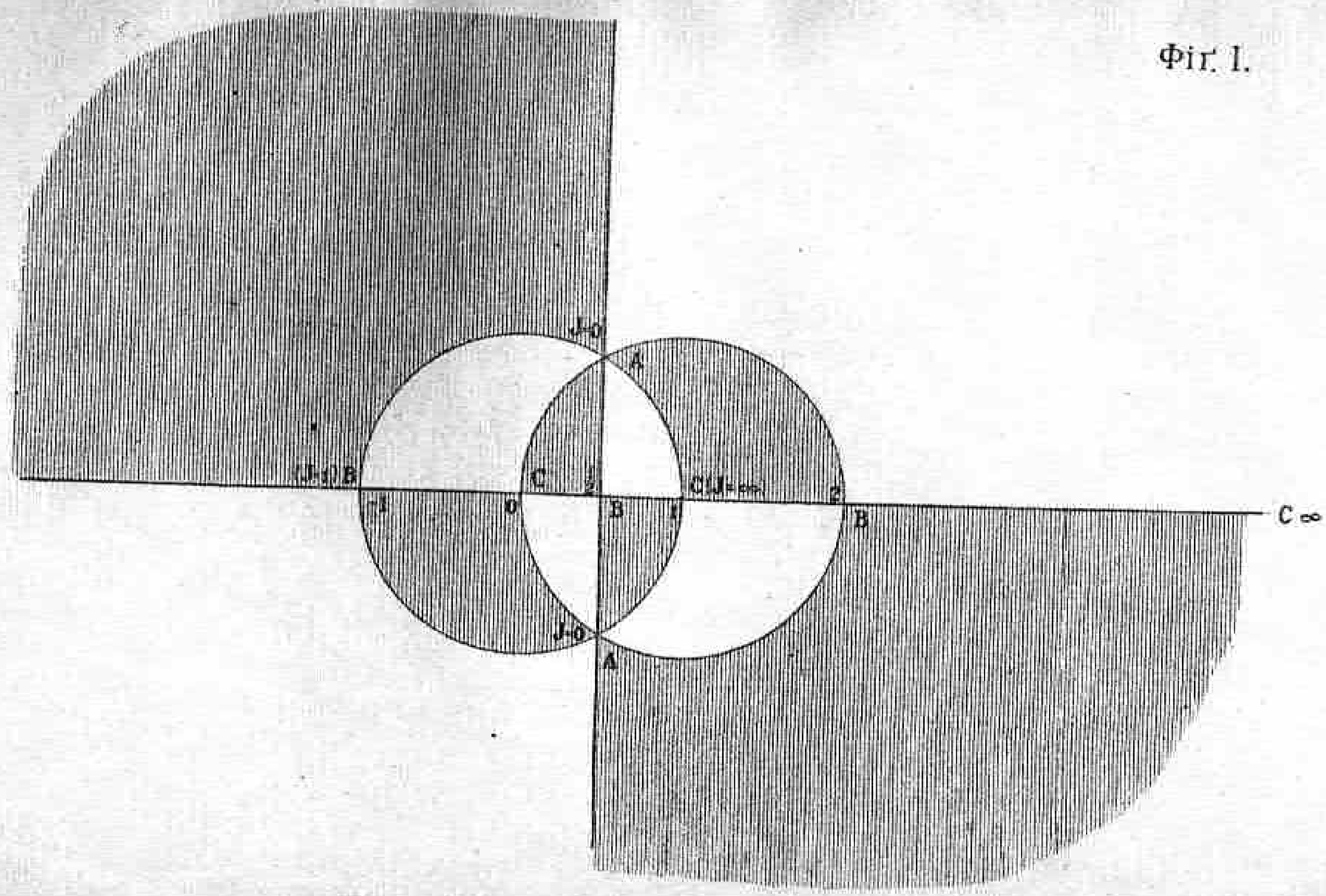
Львів, липень 1895.

[1]) пор. Klein. loc. cit. стор. 123.

Додатки до термінольоґії математичної.

Вартість безглядна, absoluter Betrag. — вартість зложена, complexer Werth. — визначник, детермінанта, Determinante. — вісь другорядна, imaginäre Axe. — вісь перворядна, reelle Axe. — галузь, Zweig. — ґрупа, Gruppe. — ґрупа частна, Untergruppe. — ґрупа частна знаменита ausgezeichnete Untergruppe. — двосїчна, Halbierungslinie. — дїйсний, reell. — збіжність, Convergenz. — збіжність безглядна, absolute Convergenz. — збіжність безуслівна, unbedingte Convergenz. — збіжність рівномірна, gleichmässige Convergenz. — збіжність услівна, bedingte Convergenz. — значок, Index. — інтеґральний рахунок, Integralrechnung. — інтеґрал, Integral. — інтеґровати, integriren. — конечність і безконечність, Endlichkeit u. Unendlichkeit. — лїнеарний, лїнїйний, linear. — мнимий, imaginär. — многозначний, mehrdeutig, vieldeutig. — многократний, vielfach. — многість всюди-густа, überall-dichte Menge. — незмінник, Invariante. — нетяглий, unstetig, discontinuirlich. — обсяг збіжности, Convergenzbereich. — однозначний, eindeutig. — окруженє, Umgebung. — основний, fundamental. — основний район, Fundamentalbereich. — переведенє, Fortsetzung (einer Reihe). — перетворенє, трансформация, Transformation. — періода, нáворот, Periode. — первістна періода, primitive Periode. — півплоща, Halbebene. — підставленє, субституция, Substitution. — площа, Ebene. — повторенє, Iteration. — повторний, mehrfach. — полишка, Residuum. — постійний, constant. — походна, Ableitung. — рахунок ріжничковий, Differentialrechnung. — рівнанє, Gleichung. — рівноважний, äquivalent. — ріжничка, Differential. — ріжничка цїлковита, totales Differential. — ріжничка частна, partielles Differential. — рід, Art. — розвиненє, Entwickelung. — розгалуженє, Verzweigung — ряд, Ordnung, Reihe, Rang. — ряд степенний, Potenz-reihe. — степень, Grad, Potenz. — точка особлива, singuläre Stelle. — точка несущно особлива, ausserwesentlich singuläre Stelle. — точка сущно особлива, wesentlich singuläre Stelle. — тяглий, stetig, continuirlich. — функция, Function. — функция автоморфна, automorphe Function. — функция альґебраічна, algebraische Function. — функция аналітична, analytische Function. — функция еліптична, elliptische Function. — функция рациональна, rationale Function. — функция трасцендентна, transcendente Function — функция цілковита, ganze Function. — частинковий, conform.

Фіг. I.



Фиг. II.