Q-УМОВНА ІНВАРІАНТНІСТЬ НЕЛІНІЙНИХ (1+2)–ВИМІРНИХ РІВНЯНЬ РЕАКЦІЇ – ДИФУЗІЇ

©2010 р. Наталія ІЧАНСЬКА

Полтавський національний технічний університет
імені Юрія Кондратюка
Першотравневий проспект, 24, Полтава 36011

Редакція отримала статтю 10 вересня 2010 р.

Проведено повний опис операторів Q-умовної інваріантності класу (1+2)-вимірних нелінійних рівнянь реакції – дифузії. Отримані оператори використано для побудови анзаців, проведення редукції даних рівнянь до звичайних диференціальних рівнянь.

1 Вступ

У теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними важливу роль відіграють рівняння, яким притаманні нетривіальні симетрійні властивості. Як правило, такі рівняння плідно використовуються для математичного моделювання об'єктів, явищ і процесів у різних наукових галузях, і саме вони стимулюють виникнення та розвиток нових понять і методів теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Одним з таких рівнянь є лінійне рівняння теплопровідності. У 1969 році Блумен і Коул [1] саме на прикладі лінійного (1+1)-вимірного рівняння теплопровідності ввели поняття некласичної симетрії диференціального рівняння з частинними похідними. Така симетрія узагальнюється поняттям умовної симетрії, яке введене в [2] (див. також [3–11]). Метод умовної симетрії дає можливість одержувати такі підмножини розв'язків

УДК 517.9:519.46, MSC 2000: 58J70, 35A30

диференціальних рівнянь, симетрія яких ширша, а іноді зовсім відрізняється від симетрії всієї множини розв'язків.

Задача дослідження Q-умовної інварінтності лінійного рівняння теплопровідності розглядалася багатьма авторами, як для випадку (1+1)-вимірного [1, 12–15], так і $(1+n)$-вимірного рівняння [16].

Не менш цікавим для дослідження є нелінійне рівняння теплопровідності. Дослідженню його умовних симетрій присвячена ціла низка робіт. Зокрема, в працях В.І. Фущича та його учнів [6,7,17–20] були досліджені умовна та Q-умовна симетрії одновимірних (1+1) – нелінійних рівнянь теплопровідності

$$H(u)u_0 + u_{11} = F(u). \tag{1}$$

Ця стаття присвячена дослідженню Q-умовної симетрії нелінійних (1+2) – вимірних рівнянь теплопровідності:

$$H(u)u_0 + \triangle u = F(u), \tag{2}$$

де $u = u(x) \in \mathbb{R}^1, x = (x_0, \vec{x}), \vec{x} \in \mathbb{R}^2; H(u),\ F(u)$ — довільні гладкі функції.

Будь-яке рівняння (2) за допомогою заміни $u \to \int H(u)du$ можна привести до рівняння

$$u_0 + \nabla(g(u)\nabla u) = f(u), \tag{3}$$

відомого в літературі під назвою нелінійне рівняння реакції – дифузії, де функції g та f певним чином виражаються через функції F та H.

Дослідимо Q-умовну інваріантність рівняння (2) відносно оператора

$$Q = A(x,u)\partial_0 + B^a(x,u)\partial_a + C(x,u)\partial_u, \tag{4}$$

де A, B^a, C — довільні гладкі функції, $a = 1,2$. Поставимо задачу: провести повний опис операторів (4), відносно яких за умови $H \neq 0$, рівняння (2) є Q-умовно інваріантними.

Зауваження.

1. Дослідження Q-умовної інваріантності рівняння (2) буде проводитися з точністю до перетворень еквівалентності.

2. Будь-який оператор ліївської інваріантності є також оператором Q-умовної інваріантності, тому в першому параграфі наведено результати вичерпної групової класифікації в класі рівнянь (2), а в наступних

параграфах знайдені оператори Q-умовної інваріантності, які не є еквівалентними ліївським.

3. Функції H та F, при яких рівняння (2) зводяться локальною заміною до лінійного рівняння теплопровідності, ми також не розглядаємо, так як це рівняння досліджено в [16].

2 Групова класифікація

Ліївська симетрія нелінійного рівняння реакції – дифузії вигляду (3) добре вивчена для довільної кількості просторових змінних n. Цій темі присвячена ціла низка статей [21–24], де знайдено максимальну алгебру інваріантності рівнянь (3) в залежності від вигляду функцій g, f та кількості просторових змінних n. В згаданих вище працях групова класифікація проводилася лише з точністю до перетворень з основної групи еквівалентності без врахування додаткових перетворень еквівалентності. Для (1+1)-вимірних рівнянь (3) групова класифікація разом з додатковими перетвореннями еквівалентності наведена в [25]. В цьому підрозділі проведено групову класифікацію класу (1+2)-вимірних рівнянь вигляду (2) з урахуванням додаткових перетворень еквівалентності.

Теорема 1. *Максимальною локальною групою $G^{\sim}$ точкових перетворень еквівалентності рівнянь (2) є група, що задається перетвореннями*

$$\begin{aligned} &x_0 \to \beta_0 x_0 + \alpha_0, \quad x_a \to \beta_1 x_a + \gamma_{ab} x_b + \alpha_a, \quad u \to \beta_2 u + \alpha_3, \\ &H \to \beta_0 \beta_1^{-2} H, \qquad F \to \beta_2 \beta_1^{-2} F, \end{aligned} \tag{5}$$

де $\beta_0, \beta_2 \neq 0$, $\beta_1 > 0$, α_l, γ_{ab} — сталі, $(\gamma_{ab}) \in O(2)$, $a, b = 1, 2$, $l = \overline{0,3}$.

Доведення. Так як функції H та F залежать тільки від u, то для них справедливі умови

$$H_{x_\mu} = 0, \quad F_{x_\mu} = 0, \quad H_{u_\mu} = 0, \quad F_{u_\mu} = 0. \tag{6}$$

Розглянемо оператор еквівалентності

$$E = \xi^0 \partial_0 + \xi^a \partial_a + \eta \partial_u + \zeta^1 \partial_H + \zeta^2 \partial_F,$$

ξ^μ, η — функції від x, u, ζ^a — функції від x, u, H, F. З умови інваріантності рівнянь (2) та (6) відносно оператора E, одержуємо систему визначальних рівнянь на коефіцієнти цього оператора:

$$\begin{aligned}&\xi^0_a = 0,\ \xi^0_u = 0,\ \xi^a_0 = \xi^a_u = 0,\ \xi^1_1 = \xi^2_2,\ \xi^1_2 = -\xi^2_1,\ \eta_{uu} = 0, \eta_\mu = 0,\\ &\zeta^a_\mu = 0,\ \zeta^1 = (\xi^0_0 - 2\xi^1_1)H,\ \zeta^2 = (\eta_u - 2\xi^1_1)F.\end{aligned} \tag{7}$$

Загальним розв'язком системи (7) є функції

$$\begin{aligned}&\xi^0 = \varkappa_0 x_0 + d_0,\ \xi^a = \varkappa_1 x_a + c_{ab}x_b + d_a,\ \eta = \varkappa_2 u + d_3,\ c_{ab} + c_{ba} = 0,\\ &\zeta^1 = (\varkappa_0 - 2\varkappa_1)H,\ \zeta^2 = (\varkappa_2 - 2\varkappa_1)F.\end{aligned}$$

Отже, алгеброю Лі групи $G^\sim$ є алгебра

$$A^\sim = \langle \partial_0, \partial_a, J_{12} = x_2\partial_1 - x_1\partial_2, x_0\partial_0 + H\partial_H, x_a\partial_a - 2F\partial_F, u\partial_u + F\partial_F\rangle.$$

Це означає, що зв'язна компонента одиниці в $G^\sim$ задається перетвореннями

$$\begin{aligned}&x_0 \to e^{\theta_5}x_0 + \theta_1,\\ &x_1 \to e^{\theta_6}(x_1\cos\theta_8 - x_2\sin\theta_8) + \theta_2,\\ &x_2 \to e^{\theta_6}(x_1\sin\theta_8 + x_2\cos\theta_8) + \theta_3,\\ &u \to e^{\theta_7}u + \theta_4,\ \ H \to e^{\theta_5 - 2\theta_6}H,\ \ F \to e^{\theta_7 - 2\theta_6}F.\end{aligned} \tag{8}$$

Крім неперервних перетворень еквівалентності (8), клас рівнянь (2) також допускає наступні дискретні перетворення:

$$\begin{aligned}&x_0 \to x_0, \quad x_1 \to -x_1, \quad x_2 \to x_2, \quad u \to u, \quad H \to H, \quad F \to F;\\ &x_0 \to x_0, \quad x_a \to x_a, \quad u \to -u, \quad H \to H, \quad F \to -F;\\ &x_0 \to -x_0, \quad x_a \to x_a, \quad u \to u, \quad H \to -H, \quad F \to F.\end{aligned}$$

Разом неперервні та дискретні перетворення задають перетворення вигляду (5), які вичерпно описують всі перетворення групи еквівалентності $G^\sim$.

Теорему 1 доведено.

Використовуючи результати, що одержані в [22, 25] для рівнянь (3), ми можемо отримати групову класифікацію для класу рівнянь (2). Результати цієї класифікації подамо у вигляді наступної теореми.

Теорема 2. *Для будь-яких значень функцій H та F з точністю до перетворень (5) групова класифікація нелінійних рівнянь (2) вичерпно описується випадками, що наведені в таблиці 1.*

Зауваження. Зазначимо також, що локальними перетвореннями

$$u \to e^{\lambda_0 x_0} u,\ x_0 \to \tfrac{1}{\lambda_0 k} e^{\lambda_0 k x_0} \quad \text{та} \quad u \to u - \lambda_0 x_0,\ x_0 \to -\tfrac{1}{\lambda_0} e^{-\lambda_0 x_0} \tag{9}$$

рівняння

$$u^k u_0 + \triangle u = \lambda_0 u^{k+1} + \lambda u, \quad e^u u_0 + \triangle u = \lambda_0 e^u + \lambda \tag{10}$$

зводяться, відповідно, до рівнянь $u^k u_0 + \triangle u = \lambda u$, $e^u u_0 + \triangle u = \lambda$. Тому в таблиці 1 випадки, що мають один номер зводяться один до другого, а саме $3a \to 3\,(k = 1,\ m = 0)$, $4a \to 4\,(m = 1)$, $6a \to 6$, $7a \to 7$.

Таблиця 1. Ліївська симетрія рівняння (2)

№	$H(u)$	$F(u)$	Ліївська симетрія	Зауваження
1	$\forall$	$\forall$	$A = \langle \partial_0,\ \partial_a,\ J_{12} = x_1\partial_2 - x_2\partial_1 \rangle$	
2	$\forall$	0	$A + \langle D = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a \rangle$	
3	e^{ku}	λe^{mu}	$A + \langle D_1 \rangle$	$m \neq k$
3a	e^u	$\lambda_0 e^u + \lambda$	$A + \langle D_4 = e^{\lambda_0 x_0}(\partial_0 + \lambda_0 \partial_u) \rangle$	$\lambda \neq 0$
4	u^k	λu^m	$A + \langle D_2 \rangle$	$(k, m) \neq (0, 0)$, $m \neq k + 1$
4a	u^k	$\lambda_0 u^{k+1} + \lambda u$	$A + \langle D_5 = e^{-\lambda_0 k x_0}(\partial_0 - \lambda_0 u \partial_u) \rangle$	$\lambda \neq 0$
5	1	$\lambda u \ln u$	$A + \left\langle e^{\lambda x_0}(\partial_a + \frac{\lambda}{2} x_a u \partial_u),\ e^{\lambda x_0} u \partial_u \right\rangle$	
6	u^k	0	$A + \langle D,\ D_3 = k x_a \partial_a - 2u\partial_u \rangle$	$k \neq 0$
6a	u^k	$\lambda_0 u^{k+1}$	$A + \langle D_3,\ D_5 \rangle$	$k \neq 0$
7	e^u	0	$\langle \partial_0,\ x_0\partial_0 + \partial_u,\ \xi^a(\vec{x})\partial_a - 2\xi^1_1 \partial_u \rangle$	$\xi^1_2 + \xi^2_1 = 0$, $\xi^1_1 = \xi^2_2$
7a	e^u	$\lambda_0 e^u$	$A + \langle D_4,\ \xi^a(\vec{x})\partial_a - 2\xi^1_1 \partial_u \rangle$	$\xi^1_2 + \xi^2_1 = 0$, $\xi^1_1 = \xi^2_2$

Тут $D_1 = 2(m - k)x_0\partial_0 + m x_a \partial_a - 2\partial_u$, $D_2 = 2(m - k - 1)x_0\partial_0 + (m - 1)x_a\partial_a - 2u\partial_u$, $\lambda_0 \neq 0, \lambda \neq 0, m, k$ — сталі, $\lambda \in \{-1; 1\} \bmod G^{\sim}$. У випадку 3 стала $k \in \{0; 1\} \bmod G^{\sim}$ та $m \in \{0; 1\} \bmod G^{\sim}$. У випадках 1 та 2, наведені алгебри є максимальними, якщо рівняння не є еквівалентним рівнянням, наведеним у випадках 3–7.

3 Класифікація операторів Q-умовної симетрії

Дослідимо Q-умовну симетрію рівнянь вигляду (2) відносно операторів (4), тобто інволютивних множин, що складаються з одного оператора.

З точністю до відношення еквівалентності на операторах Q-умовної симетрії та перетворень з ядра основних груп рівнянь (2), а саме, поворотів змінних x_1 і x_2, можна вирізняти два нееквівалентні класи операторів:

$$Q = \partial_0 + B^a(x,u)\partial_a + C(x,u)\partial_u, \tag{11}$$

$$Q = \partial_1 + B(x,u)\partial_2 + C(x,u)\partial_u, \tag{12}$$

де B^a, C, B — довільні гладкі функції, $a = 1, 2$. Достатньо вважати, що коефіцієнт при ∂_1 не дорівнює нулю, оскільки будь-яке рівняння з нашого класу є інваріантним відносно поворотів.

Теорема 3. *Рівняння (2) є Q-умовно інваріантним відносно оператора (11), якщо функції B^a, C задовольняють наступним умовам*

$$\begin{aligned}
&B^a_u = 0, \quad C_{uu} = 0, \quad B^1_1 = B^2_2, \quad B^1_2 = -B^2_1,\\
&\dot{H}C^2 - \dot{F}C + HC_0 + \triangle C + FC_u - 2B^2_2(F - HC) = 0,\\
&\dot{H}CB^a + HB^a_0 - 2C_{au} + 2HB^aB^1_1 = 0
\end{aligned} \tag{13}$$

та оператора (12), якщо

$$\begin{aligned}
&B_u = 0, C_{uu} = 0, (B^2+1)C\dot{H} = 2(BB_1 - B_2)H,\\
&B_0H = -2BC_{1u} + 2C_{2u} + 2B_1C_u - \triangle B +\\
&+\frac{2}{B^2+1}[BB_aB_a - 2(B_1 + BB_2)C_u],\\
&C\dot{F} - C_uF = C_0H + 2CC_{1u} + \triangle C -\\
&-\frac{2}{B^2+1}[(C_1 + CC_u - F)(BB_1 - B_2) + (B_1 + BB_2)C_2].
\end{aligned} \tag{14}$$

Доведення грунтується на критерії Q-умовної інваріантності. В цьому випадку функція $S = Hu_0 + \triangle u - F$, а множина диференціальних наслідків складається з трьох рівнянь. Оскільки функції B^a, C, H, F не залежать від похідних, то ми можемо розщепити по незв'язним похідним. Розщеплення суттєво розрізняється для операторів (11) та (12). Після стандартних перетворень, в результаті одержимо рівності (13) та (14). Теорема 3 доведена.

Для того, щоб отримати остаточні результати, нам треба знайти загальні розв'язки систем (13) та (14) з точністю до перетворень еквівалентності (5). Має місце наступне твердження.

Теорема 4. *Будь-який оператор (4) Q-умовної симетрії нелінійного рівняння (2) або є еквівалентним оператору лiївської симетрії цього рівняння, або з точністю до перетворень з групи еквівалентності (5) та додаткових перетворень (9) є еквівалентним одному з операторів, що наведені в таблиці 2.*

Таблиця 2. Оператори Q – умовної інваріантності рівняння (2)

$H(u)$	$F(u)$	Оператори Q	Зауваження
$\forall$	$(\lambda_1 u + \lambda_2)[H + \lambda_0]$	$\partial_0 + (\lambda_1 u + \lambda_2)\partial_u$	$(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$
u	$\lambda_2 u^2 + \lambda_1 u + \lambda_0$	$\partial_0 + [\lambda_2 u - b(\vec{x})]\partial_u$	$\triangle b = b^2 + \lambda_1 b + \lambda_2 \lambda_0$
1	$\lambda u \ln u,\ \lambda \neq 0$	$\partial_1 + a(x_0, x_1) u \partial_u$	$a_0 + a_{11} = -2aa_1 + \lambda a$

Тут λ, λ_0, λ_1, λ_2 — довільні сталі.

Доведення теореми 4 є громіздким, тому його викладу присвячено два наступних параграфи. При цьому в першому параграфі розглянуто оператори вигляду (11), а в другому — (12).

Теорема 4 дає повне розв'язання задачі опису операторів (4) Q-умовної інваріантності рівняння (2) за умови $H \neq 0$. Зауважимо, що раніше ця задача розглядалася в [26] тільки для класу операторів вигляду (11). Результати з [26] не є вичерпними і містяться серед результатів наведених в таблиці 2.

4 Доведення теореми 4 для класу операторів (11)

Щоб побудувати всі можливі оператори (11) Q-умовної інваріантності рівняння (2), потрібно знайти загальні розв'язки системи (13). Перепишемо систему (13) у такому вигляді

$$B^a = B^a(x), \quad C = \alpha(x)u + b(x), \quad B^1_1 = B^2_2, \quad B^1_2 = -B^2_1, \tag{15}$$

$$\begin{gathered} (\alpha u + b)B^a \dot{H} + (B^a_0 + 2B^1_1 B^a)H = 2\alpha_a, \\ (\alpha u + b)\dot{F} + (2B^1_1 - \alpha)F = (\alpha u + b)^2 \dot{H} + \\ +[(\alpha_0 + 2B^1_1 \alpha)u + b_0 + 2B^1_1 b]H + u\triangle\alpha + \triangle b. \end{gathered} \tag{16}$$

Проаналізуємо структуру рівнянь системи (16) по змінній u. Оскільки функції, що входять до цієї системи залежать від різних невідомих, то, ввівши припущення

$$
\begin{aligned}
&\alpha B^a = s_1\Phi^a(x),\ bB^a = s_2\Phi^a(x),\\
&B_0^a + 2B_1^1 B^a = -s_3\Phi^a(x),\ 2\alpha_a = s_4\Phi^a(x),\\
&\alpha = m_1\varphi(x),\ b = m_2\varphi(x),\ 2B_1^1 - \alpha = -m_3\varphi(x) + k_3\varphi^2(x),\\
&\alpha_0 + 2B_1^1\alpha = m_4\varphi(x) + k_4\varphi^2(x),\ b_0 + 2B_1^1 b = m_5\varphi(x) + k_5\varphi^2(x),\\
&\triangle\alpha = m_6\varphi(x) + k_6\varphi^2(x),\ \triangle b = m_7\varphi(x) + k_7\varphi^2(x),
\end{aligned}
\tag{17}
$$

де s_i, m_i, k_i — довільні сталі, а $\varphi(x), \Phi^a(x)$ — довільні гладкі функції, $i = \overline{1,5}$, отримаємо рівняння

$$
\begin{aligned}
&(s_1u + s_2)\dot{H} - (s_3H + s_4) = 0,\\
&(m_1u + m_2)\dot{F} - m_3F - (m_4u + m_5)H - m_6u - m_7 =\\
&= \varphi(x)[-k_3F + (m_1u + m_2)^2\dot{H} + (k_4u + k_5)H + k_6u + k_7],
\end{aligned}
\tag{18}
$$

які ми назвемо структурними для функцій $H(u)$ та $F(u)$.

Проаналізувавши перше рівняння системи (18), ми бачимо, що у випадку довільної функції H необхідно накласти умови

$$
s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 0. \tag{19}
$$

З (17) випливає, що умови (19) можливі в двох випадках $\alpha = b = 0$ або $B^a = \alpha_a = 0$. Друге рівняння (18) не залежить від змінної x в випадках $(\alpha, b) = \mathrm{const}$ або $H = \mathrm{const}$. В протилежному випадку друге рівняння (18) розіб'ється на систему двох рівнянь

$$
\begin{aligned}
&(m_1u + m_2)\dot{F} - m_3F = (m_4u + m_5)H + m_6u + m_7,\\
&k_3F = (m_1u + m_2)^2\dot{H} + (k_4u + k_5)H + k_6u + k_7.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Таким чином, розв'язання системи рівнянь (18) зводиться до п'яти різних випадків: **I.** $\alpha = b = 0$; **II.** $B^a = \alpha_a = 0$; **III.** $(\alpha, b) = \mathrm{const}$, $(\alpha, b) \neq (0, 0)$, $B^a \neq 0$; **IV.** $H = \mathrm{const}$, так як рівняння $\lambda u_0 + \triangle u = F(u)$ заміною $x_0 \to \lambda x_0$ зводиться до рівняння $u_0 + \triangle u = F(u)$, то можна вважати $H = 1$; **V.** $H \neq \mathrm{const}$, $(\alpha, b) \neq \mathrm{const}$.

Розглянемо кожен з цих випадків окремо.

I. Нехай $\alpha = b = 0$. Тоді система рівнянь (15), (16) зводиться до системи

$$
B_1^1 = B_2^2,\ B_2^1 = -B_1^2,\ B_0^a + 2B_1^1 B^a = 0,\ B_1^1 F = 0, \tag{21}
$$

розв'язки якої залежать від значення функції F.

При $F \neq 0$ рівняння (21) задають систему $B_1^1 = B_2^2 = 0$, $B_0^a = 0$, $B_2^1 = -B_1^2$. Легко перевірити, що загальним розв'язком цієї системи є такі функції B^a, які породжують лінійну комбінацію ліївських операторів, а саме зсувів та поворотів по просторових координатах.

При $F = 0$ систему рівнянь (21) перепишемо наступним чином:

$$B_1^1 = B_2^2,\ B_2^1 = -B_1^2, \tag{22}$$

$$B_0^a + 2B_1^1 B^a = 0. \tag{23}$$

Загальний розв'язок системи рівнянь (23) має вигляд:

$$\varkappa(2x_0 B^1 - x_1) = \varphi^1(x_2,\ B^1), \quad \varkappa(2x_0 B^2 - x_2) = \varphi^2(x_1,\ B^2), \tag{24}$$

де φ^1, φ^2 — довільні гладкі функції, $\varkappa$ — довільна стала.

Підставивши (24) в рівняння (22), одержимо

$$\varphi^a = -d_0 B^a + C_{ab}x_b + d_a, \tag{25}$$

де $d_0, d_a, C_{ab} = -C_{ba}$ — довільні сталі, $a, b = 1, 2$, $a \neq b$. З (24) та (25) одержуємо загальний розв'язок системи (22), (23) у вигляді

$$B^a = \frac{\varkappa x_a + C_{ab}x_b + d_a}{2\varkappa x_0 + d_0}. \tag{26}$$

Після підстановки знайдених функцій B^a в (11) отримаємо Q-умовний оператор, який є еквівалентний лінійній комбінації ліївських операторів $Q = d_0\partial_0 + d_a\partial_a + C_{12}J_{12} + \varkappa D$, наведених в таблиці 1.

II. Нехай $B^a = 0,\ \alpha = \alpha(x_0)$**.** З системи (16) одержимо

$$(\alpha u + b)\dot{F} - \alpha F = (\alpha u + b)^2 \dot{H} + (\dot{\alpha} u + b_0)H + \triangle b, \tag{27}$$

де $b = b(x_0, x_1, x_2)$, $F = F(u)$, $H = H(u)$ — довільні гладкі функції, що підлягають визначенню. Друге рівняння системи (18) набуде вигляду

$$\begin{aligned} &(m_1 u + m_2)\dot{F} - m_1 F - (m_4 u + m_5)H - m_7 = \\ &= \varphi(x)[(m_1 u + m_2)^2 \dot{H} + (k_4 u + k_5)H + k_7]. \end{aligned} \tag{28}$$

Аналогічно, як і для системи (18), можливі такі випадки:

II.1. $(\alpha, b) = (\lambda_1, \lambda_2) = \mathrm{const}$. Тоді рівняння (28) має вигляд диференціального лінійного рівняння першого порядку відносно функції F

$$(\lambda_1 u + \lambda_2)\dot{F} - \lambda_1 F = (\lambda_1 u + \lambda_1)^2 \dot{H},$$

яке інтегрується при довільній функції H: $F = (\lambda_1 u + \lambda_2)(H + \lambda_0)$, де λ_0 — стала інтегрування. Оператор (11) має вигляд $Q = \partial_0 + (\lambda_1 u + \lambda_2)\partial_u$, що відповідає пункту 1 таблиці 2.

II.2. $(\alpha, b) \neq \mathrm{const}$. Тоді з рівняння (28) випливають умови

$$\begin{aligned} &(m_1 u + m_2)\dot{F} - m_1 F - (m_4 u + m_5)H - m_7 = 0, \\ &(m_1 u + m_2)^2 \dot{H} + (k_4 u + k_5)H + k_7 = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Розв'язки системи рівнянь (29) з точністю до локальних перетворень (5), (9) задають такі суттєво різні випадки:

$$\begin{array}{ll} H = 1, & F = \lambda u \ln u, \quad \lambda \neq 0; \\ H = e^u + \lambda_1, & F = \lambda_2 e^u + \lambda_3 u + \lambda_4; \\ H = u, & F = \lambda_2 u^2 + \lambda_1 u + \lambda_0, \quad \lambda_2 \neq 0; \\ H = u^m, \quad m \neq 0, 1, & F = \lambda u. \end{array}$$

Для кожного з випадків, підставивши відповідні функції H та F в рівняння (27), отримаємо системи рівнянь відносно функцій α та b.

Для першого випадку функції α та b повинні задовольняти рівняння $b = 0$, $\dot{\alpha} = \lambda \alpha$, розв'язком яких є функції $b = 0$, $\alpha = \lambda_1 e^{\lambda x_0}$, що задають оператор $Q = \partial_0 + \lambda_1 e^{\lambda x_0} u \partial_u$, який є ліївським (див. пункт 8 в таблиці 1).

У другому випадку після підстановки відповідних функцій H та F в (27), отримаємо рівняння $\alpha = 0$, $b_0 + (b - \lambda_2)b = 0$, $\lambda_1 b_0 + \triangle b = \lambda_3 b$, розв'язок яких залежить від значення сталої λ_2. В результаті отримуємо:

1. При $\lambda_2 = 0$, $\alpha = 0$, $b = \frac{1}{x_0 + d_0}$, $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$:

   $H = e^u$, $F = \lambda_4$, $Q = (x_0 + d_0)\partial_0 + \partial_u$;

2. При $\lambda_2 \neq 0$, $\alpha = 0$, $b = \frac{\lambda_2}{1 + \lambda_5 e^{-\lambda_2 x_0}}$, $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$:

   $H = e^u$, $F = \lambda_2 e^u + \lambda_4$, $Q = (1 + \lambda_5 e^{-\lambda_2 x_0})\partial_0 + \lambda_2 \partial_u$.

Знайдені оператори з точністю до локальних перетворень (9), (5) є ліївські (пункт 4 в таблиці 1).

Коли $H = u$, $F = \lambda_2 u^2 + \lambda_1 u + \lambda_0$, з системи (27) отримуємо рівняння $\dot{\alpha} + (\alpha - \lambda_2)\alpha = 0$, $b_0 + 2(\alpha - \lambda_2)b = 0$, $\triangle b + b^2 = \lambda_1 b - \lambda_0 \alpha$ після розв'язання яких маємо:

1. $\alpha = \dfrac{1}{x_0+d_0}$, $b=0$, $\lambda_2=\lambda_0=0$: $Q=(x_0+d_0)\partial_0+u\partial_u$. Отриманий оператор є еквівалентним лiївському з таблиці 1 (пункт 6);

2. $\alpha=\lambda_2$, $b=-b(\vec{x})$: $Q=\partial_0+[\lambda_2 u-b(\vec{x})]\partial_u$, де b — розв'язок рівняння $\triangle b=b^2+\lambda_1 b+\lambda_0\lambda_2$. Отриманий оператор є Q-умовним, який наведено в таблиці 2 пункт 2.

Залишилося розглянути пару функцій $H=u^m$, $F=\lambda u$, $m\neq 0,1$. З (27) отримуємо рівняння $b=0$, $\dot{\alpha}+m\alpha^2=0$. Розв'язок яких з врахуванням формул (11) породжує оператор еквівалентний лiївському $Q=(mx_0+d_0)\partial_0+u\partial_u$, що наведений в таблиці 1 під номером 6.

III. Нехай $(\alpha,b)=(m_1,m_2)=$ **const.** Система рівнянь (16) в даному випадку зводиться до системи

$$\begin{aligned}&B_1^1=B_2^2,\ B_2^1=-B_1^2,\\&(m_1u+m_2)B^a\dot{H}+(B_0^a+2B_1^1B^a)H=0,\end{aligned}\tag{30}$$

$$(m_1u+m_2)[\dot{F}-(m_1u+m_2)\dot{H}]-m_1F=2B_1^1[(m_1u+m_2)H-F].$$

Останнє рівняння системи (30) після заміни $G(u)=F-(m_1u+m_2)H$ набуде вигляду $(m_1u+m_2)\dot{G}=(m_1-2B_1^1)G$. Якщо розділити змінні та проінтегрувати це рівняння, то отримаємо такі суттєво різні підвипадки:

III.1. $G\neq 0$. Тоді $2B_1^1=-\lambda$, $(m_1u+m_2)\dot{G}=(m_1+\lambda)G$, де λ — довільна стала. В залежності від співвідношень між m_1 і m_2 з врахуванням введеної заміни, перетворень еквівалентності (5) та додаткових перетворень (9), отримуємо загальні розв'язки останнього рівняння системи (30): $F=\lambda e^{mu}$, $H=e^u,(m\neq 1)$ та $F=\lambda u^k$, $H=u^k$, де $k\neq 0$, підставивши які в систему (30) одержуємо рівняння

$$B_1^1=B_2^2=-\frac{\lambda}{2},B_2^1=-B_1^2,B_0^a+(\lambda_2-\lambda)B^a=0.$$

III.2. $G=0$. Тоді $F=(m_1u+m_2)H$, а система рівнянь (30) має вигляд $B_1^1=B_2^2$, $B_2^1=-B_1^2$, $(m_1u+m_2)B^a\dot{H}+(B_0^a+2B_1^1B^a)H=0$. В залежності від вигляду функції H, розв'язки цих рівнянь мають вигляд:

$$\begin{aligned}H=e^u,\quad &m_1=0,m_2\neq 0:\\&B_1^1=B_2^2,\ B_2^1=-B_1^2,\ B_0^a+(2B_1^1+m_2)B^a=0;\\H=u^m,\quad &m_1\neq 0,m_2=0:\\&B_1^1=B_2^2,\ B_2^1=-B_1^2,\ B_0^a+(2B_1^1+mm_1)B^a=0.\end{aligned}$$

Слід зазначити, що при $H=1$ одержимо $F=m_1u+m_2$, що приводить до лінійного рівняння (2), тому його ми не розглядаємо.

Розв'язавши отримані рівняння для випадків III.1 та III.2 та використавши відповідний вигляд функцій H та F, отримаємо загальні розв'язки системи рівнянь (30), які породжують тільки оператори еквівалентні ліївським з таблиці 1.

IV. Нехай $H = \lambda =$ **const.** Тоді система (16) набуде вигляду

$$B_1^1 = B_2^2,\ B_2^1 = -B_1^2,\ B_0^a + 2B_1^1 B^a = 2a_a, \tag{31}$$

$$(\alpha u + b)\dot{F} + (2B_1^1 - \alpha)F = (\alpha_0 + 2B_1^1\alpha + \triangle\alpha)u + b_0 + 2B_1^1 b + \triangle b.$$

Проаналізувавши структуру рівнянь (31), приходимо до висновку, що з точністю до перетворень (5) можливі такі суттєво різні випадки:

$$\begin{array}{l} F = \lambda_1 e^u + \lambda_2, \quad \lambda_1 \neq 0; \\ F = \lambda u \ln u, \quad \lambda \neq 0; \\ F = \lambda_1 u^m + \lambda_2 u, \quad \lambda_1 \neq 0, m \neq 0, 1. \end{array}$$

Для кожного з випадків знайдемо загальний розв'язок рівнянь (31). Підставивши відповідний вигляд функції F в систему (31), отримаємо системи диференціальних рівнянь для визначення функцій α, b, B^a.

При $F = \lambda_1 e^u + \lambda_2,\ \lambda_1 \neq 0$ система (31) є еквівалентною (22), (23) та рівнянням $\alpha = 0, \quad b \neq 0, \quad b = -2B_1^1, \quad b_0 + \triangle b = (b - \lambda_2)b.$

Використовуючи вже доведене, що загальний розв'язок системи (22), (23) задається формулою (26), остаточно отримуємо такі розв'язки системи рівнянь (31) :
$\lambda_2 = 0,\ b = \dfrac{1}{\beta(\vec{x}) - x_0},\ B^a = \dfrac{\varkappa x_a + C_{ab}x_b + d_a}{2\varkappa x_0 + d_0},\ \alpha = 0,\ b = -\dfrac{2\varkappa}{2\varkappa x_0 + d_0},$
після підстановки яких в формулу (11) отримуємо оператор, який є еквівалентним ліївському $Q = (2\varkappa x_0 + d_0)\partial_0 + (\varkappa x_a + C_{ab}x_b + d_a)\partial_a - 2\varkappa\partial_u$ (див. пункт 7 в таблиці 1).

Якщо $F = \lambda u \ln u$, то потрібно знайти загальний розв'язок системи

$$B_0^a = 2\alpha_a, \quad b = B_1^1 = B_2^2 = 0, \quad B_2^1 = -B_1^2, \quad \alpha_0 + \triangle\alpha = \lambda\alpha. \tag{32}$$

З двох перших рівнянь системи (32) отримуємо, що $\triangle\alpha = 0$, а це дає змогу проінтегрувати по x_0 останнє рівняння і отриманий результат підставити знову в перше рівняння. Після використання рівнянь, що залишилися, остаточно отримуємо функції $B^a = \frac{2k_a}{\lambda}e^{\lambda x_0} + C_{ab}x_b + d_a$, $\alpha = (k_a x_a + \lambda_1)e^{\lambda x_0}$, $b = 0$, які задають тільки ліївські оператори (див. пункт 8 в таблиці 1).

Розглянемо випадок, коли $F = \lambda_1 u^m + \lambda_2 u,\ \lambda_1 \neq 0,\ m \neq 0, 1$, який розбивається на підвипадки $m = 2$ та $m \neq 2$. Але в обох випадках в результаті розв'язання системи (31) отримуються функції, які породжують або ліївські оператори, або оператори еквівалентні ліївським. Покажемо це для випадку, коли $m = 2$. Випадок $m \neq 2$ доводиться аналогічно.

При $F = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 u$ система (31) набуває вигляду

$$-\frac{1}{2}\alpha = B_1^1 = B_2^2, \quad B_2^1 = -B_1^2, \tag{33}$$

$$B_0^a + 2B_1^1 B^a = 2\alpha_a, \tag{34}$$

$$\alpha_0 + 2B_1^1(\alpha - \lambda_2) = 2\lambda_1 b, \tag{35}$$

$$b_0 + \triangle b + (2B_1^1 - \lambda_2)b = 0. \tag{36}$$

З рівняння (33) випливає, що $\triangle B^a = 0$, $\triangle \alpha = 0$. Якщо подіяти оператором Лапласа на рівняння (34), то отримаємо, що $\triangle(B_1^1 B^a) = 0$ або $B_{1b}^1 B_b^a = 0$. Одержали два рівняння:

$$B_1^1 B_{11}^1 + B_2^1 B_{12}^1 = 0, \quad B_1^2 B_{11}^1 + B_2^2 B_{12}^1 = 0. \tag{37}$$

З системи (37) випливає, що $B_{11}^1 = B_{12}^1 = 0$, а значить $B_1^1 = \mu(x_0)$. Тоді $\alpha = -2\mu(x_0)$, при цій умові рівняння (33) та (34) мають вигляд (22), (23), розв'язок яких задається формулами (26). Підставивши (26) в рівняння (33) та (35), одержимо:

$$\alpha = \frac{-2\varkappa}{2\varkappa x_0 + d_0}, \quad b = -\frac{\lambda_2 \varkappa}{\lambda_1(2\varkappa x_0 + d_0)}. \tag{38}$$

Підставивши (38) в рівняння (36), отримаємо $\lambda_2 = 0$.

Отже, шуканий оператор є еквівалентним оператору

$Q = (2\varkappa x_0 + d_0)\partial_0 + (\varkappa x_a + C_{ab}x_b + d_a)\partial_a - 2\varkappa u \partial_u$,
який є лінійною комбінацією ліївських операторів, що наведені в пункті 9 таблиці 1.

V. Нехай $H \neq$ **const,** $(\alpha, b) \neq$ **const.** Тоді система (18) набуде вигляду

$$\begin{array}{l} (s_1 u + s_2)\dot{H} = s_3 H + s_4, \\ (m_1 u + m_2)\dot{F} = m_3 F + (m_4 u + m_5)H + m_6 u + m_7, \\ k_3 F = (m_1 u + m_2)^2 \dot{H} + (k_4 u + k_5)H + k_6 u + k_7. \end{array} \tag{39}$$

Розв'язання (39) почнемо з інтегрування першого рівняння цієї системи. Можливі два нееквівалентні випадки $s_1 = 0$, $s_2 \neq 0$ та $s_1 \neq 0$, $s_2 = 0$.

V.1. Нехай $s_1 = 0$, $s_2 \neq 0$. Так як $B^a \neq 0$, то з першої рівності (17) отримуємо $\alpha = 0$. Тоді з інших рівностей (17) маємо $m_1 = m_4 = k_4 = m_6 = k_6 = m_6 = s_4 = 0$, $m_2 \neq 0$, $s_2 \neq 0$. Розв'язком першого рівняння системи (39) є функція $H = e^u$, а останні два рівняння системи запишуться так $m_2\dot{F} = m_3F + m_5e^u + m_7$, $k_3F = m_2^2e^u + k_5e^u + k_7$. Розв'язки цих рівнянь залежать від значення числового параметра k_3. З точністю до локальних перетворень (9), (5) одержуємо наступні нееквівалентні вигляди функції F:

$$\begin{aligned}
&F = \lambda;\\
&F = \lambda_1e^u + \lambda_2u,\ \ \lambda_2 \neq 0;\\
&F = \lambda_1ue^u + \lambda_3,\ \ \lambda_1 \neq 0;\\
&F = \lambda_1e^u + \lambda_2e^{mu} + \lambda_3,\ \ m \neq 0, 1, \lambda_2 \neq 0.
\end{aligned}$$

V.2. Нехай $s_1 \neq 0$, $s_2 = 0$. Так як $B^a \neq 0$, то з другої рівності (17) отримуємо $b = 0$. Тоді з інших рівностей (17) маємо $m_2 = m_5 = k_5 = m_7 = k_7 = 0$, а система (39) запишеться у вигляді

$$\begin{aligned}
&s_1u\dot{H} = s_3H + s_4, \qquad m_1u\dot{F} = m_3F + m_4uH + m_6u,\\
&k_3F = m_1^2u^2\dot{H} + k_4uH + k_6u.
\end{aligned}$$

В залежності від співвідношень між коефіцієнтами s_1, s_3, s_4 та k_3, розв'язки цієї системи, з точністю до локальних перетворень (5), (9) задають нееквівалентні пари функцій H та F, підставивши які в рівняння (15), (16), отримуємо системи диференціальних рівнянь на функції B^a, α, b, що містять рівняння (22) та рівняння, наведені в таблиці 3.

Визначальні системи для випадків 1–3 (див. таблицю 3) містять рівняння (22), (23), розв'язком яких є функції (26).

Розв'яжемо визначальну систему для випадку 1 в таблиці 3. Відповідні системи для випадків 2 та 3 розв'язуються аналогічно.

З визначальної системи випливає, що існує два нееквівалентні випадки $B_1^1 = 0$ та $B_1^1 \neq 0$. Розглянемо кожен з цих випадків окремо.

Якщо $B_1^1 = 0$, то враховуючи (26), одержимо систему:
$B^a = \dfrac{C_{ab}x_b + d_a}{d_0}$, $b = 0$, $\alpha B^a = 2\alpha_a$, $\alpha_0 = 2\alpha\lambda_1$, $\triangle\alpha + \alpha^2 = \lambda_2\alpha$.

Якщо розв'язати всі, крім останнього, рівняння цієї системи, то отримаємо: $\alpha = C_1 \exp(2\lambda_1x_0 + \dfrac{\vec{d}\vec{x}}{2d_0})$, де C_1 — довільна стала. Підставивши α в останнє рівняння, маємо $C_1 = 0$. Тому $\alpha = 0$, що неможливо оскільки $\alpha \neq \mathrm{const}$.

Таблиця 3

№	Функції	Визначальна система
1	$H(u) = \ln u,$ $F(u) = uP_2(\ln u),$ $P_2(z) = \lambda_1 z^2 + \lambda_2 z + \lambda_3$	$B_0^a + 2B_1^1 B^a = 0,\ b = 0,$ $\alpha B^a = 2\alpha_a,\ \lambda_1 B_1^1 = 0,$ $\alpha_0 + 2\alpha B_1^1 = 2\lambda_2 B_1^1 + 2\alpha\lambda_1,$ $\triangle\alpha + \alpha^2 = \lambda_2\alpha + 2\lambda_3 B_1^1$
2	$H(u) = \ln u,$ $F(u) = \lambda_1 u \ln u + \lambda_2 u^m + \lambda_3 u$	$B_0^a + 2B_1^1 B^a = 0,\ \ b = 0,$ $\lambda_2[2B_1^1 + (m-1)\alpha] = 0,$ $\alpha_0 + 2\alpha B_1^1 = 2\lambda_1 B_1^1,$ $\triangle\alpha + \alpha^2 = \lambda_1\alpha + 2\lambda_3 B_1^1,$ $\alpha B^a = 2\alpha_a$
3	$H(u) = \ln u,$ $F(u) = \lambda_1 u \ln u + \lambda_2 u + \lambda_3$	$B_0^a + 2B_1^1 B^a = 0,\ \ b = 0,$ $\alpha_0 + 2\alpha B_1^1 = 2\lambda_1 B_1^1,$ $\triangle\alpha + \alpha^2 = \lambda_1\alpha + 2\lambda_2 B_1^1,$ $\alpha B^a = 2\alpha_a,\ \lambda_3[2B_1^1 - \alpha] = 0$
4	$H(u) = e^u,$ $F(u) = \lambda$	$B_0^a + (2B_1^1 + b)B^a = 0,$ $\alpha = 0,\ \ \triangle b = 2\lambda B_1^1,$ $b_0 + (2B_1^1 + b)b = 0$
5	$H(u) = e^u,$ $F(u) = \lambda_1 e^u + \lambda_2 u$ $\lambda_2 \neq 0$	$B_0^a + bB^a = 0,$ $\alpha = 0,\ \ B_1^1 = 0,\ \ \triangle b = \lambda_2 b,$ $b_0 + b(b - \lambda_1) = 0$
6	$H(u) = e^u,$ $F(u) = \lambda_1 u e^u + \lambda_2,$ $\lambda_1 \neq 0$	$B_0^a + (2B_1^1 + b)B^a = 0,$ $b_0 = \lambda_1 b,\ \ \triangle b = 2\lambda_2 B_1^1,$ $\alpha = 0,\ 2B_1^1 + b = 0$
7	$H(u) = e^u,$ $F(u) = \lambda_1 e^u + \lambda_2 e^{mu} + \lambda_3,$ $\lambda_2 \neq 0,\ m \neq 0, 1$	$B_0^a + (2B_1^1 + b)B^a = 0,$ $b_0 + (2B_1^1 + b)(b - \lambda_1) = 0,$ $\alpha = 0,\ 2B_1^1 + mb = 0,$ $\triangle b = 2\lambda_3 B_1^1$
8	$H(u) = u,$ $F(u) = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 u + \lambda_3$	$B_0^a + (2B_1^1 + \alpha)B^a = 0,$ $b_0 + (2B_1^1 + \alpha)b =$ $= 2\lambda_1 b + 2\lambda_2 B_1^1 - \alpha b - \triangle\alpha,$ $\alpha_0 + (2B_1^1 + \alpha)(\alpha - \lambda_1) = 0,$ $\triangle b + b^2 = \lambda_2 b + \lambda_3(2B_1^1 - \alpha),$ $bB^a = 2\alpha_a$
9	$H(u) = u,$ $F(u) = \lambda_1 u^3 + \lambda_2 u^2 + \lambda_3 u + \lambda_4,$ $\lambda_1 \neq 0$	$B_0^a + (2B_1^1 + \alpha)B^a = 0,$ $b_0 = 2\lambda_2 b + 2\lambda_3 B_1^1 - \triangle\alpha,$ $\alpha_0 + (2B_1^1 + \alpha)(\alpha - \lambda_1) = 3\lambda_1 b,$ $\triangle b + b^2 = \lambda_3 b + \lambda_4(2B_1^1 - \alpha),$ $bB^a = 2\alpha_a,\ \alpha + B_1^1 = 0,$

Продовження таблиці 3

№	Функції	Визначальна система
10	$H(u)=u+\lambda$, $F(u)=\lambda_1u^2+\lambda_2u^m+\lambda_3u$, $\lambda_2\neq 0$, $m\neq 0,1,2,3$	$B_0^a+(2B_1^1+\alpha)B^a=0$, $b=0$, $(m-1)\alpha+2B_1^1=0$, $\triangle\alpha-\lambda\alpha^2=$ $=2\lambda_3B_1^1-\lambda_1\lambda(2B_1^1+\alpha)$, $-\lambda\alpha B^a=2\alpha_a$, $\alpha_0+(2B_1^1+\alpha)(\alpha-\lambda_1)=0$
11	$H(u)=u+\lambda$, $F(u)=\lambda_1\ln u+\lambda_2u+\lambda_3$, $\lambda_1\neq 0$	$B_0^a+(2B_1^1+\alpha)B^a=0$, $b=0$, $(\lambda_1-\lambda_3)\alpha+2\lambda_3B_1^1=0$, $\triangle\alpha-\lambda\alpha^2=2\lambda_2B_1^1$ $-\lambda\alpha B^a=2\alpha_a$, $\alpha_0+(2B_1^1+\alpha)\alpha=0$,
12	$H(u)=u+\lambda$, $F(u)=\lambda_1u^2\ln u+\lambda_2u^2+\lambda_3u$, $\lambda_1\neq 0$	$B_0^a+(2B_1^1+\alpha)B^a=0$, $b=0$, $\alpha_0+(2B_1^1+\alpha)(\alpha-\lambda_2)=\lambda_1\alpha$, $\triangle\alpha-\lambda\alpha^2=2\lambda_3B_1^1-\lambda(\lambda_1+\lambda_2)\alpha$, $\alpha+2B_1^1=0$, $-\lambda\alpha B^a=2\alpha_a$
13	$H(u)=u+\lambda$, $F(u)=\lambda_1u\ln u+\lambda_2u^2+\lambda_3u$, $\lambda_1\neq 0$	$B_0^a+\alpha B^a=0$, $b=0$, $B_1^1=0$, $\alpha_0+\alpha(\alpha-\lambda_2)=0$, $\triangle\alpha-\lambda\alpha^2=(\lambda_1-\lambda\lambda_2)\alpha$, $-\lambda\alpha B^a=2\alpha_a$
14	$H(u)=u^m+\lambda$, $F(u)=\lambda_1u+\lambda_2$, $m\neq 0;1$	$B_0^a+(2B_1^1+m\alpha)B^a=0$, $b=0$, $\alpha_0+(2B_1^1+m\alpha)\alpha=0$, $\triangle\alpha-\lambda m\alpha^2=2\lambda_1B_1^1$, $-\lambda m\alpha B^a=2\alpha_a$, $\lambda_2(\alpha-2B_1^1)=0$
15	$H(u)=u^m+\lambda$, $F(u)=\lambda_1u^{m+1}\ln u+\lambda_2u$, $\lambda_1\neq 0$	$B_0^a+(2B_1^1+m\alpha)B^a=0$, $b=0$, $\alpha_0+(2B_1^1+m\alpha)\alpha=\lambda_1\alpha$, $\triangle\alpha-\lambda m\alpha^2=2\lambda_2B_1^1-\lambda\lambda_1\alpha$, $-\lambda m\alpha B^a=2\alpha_a$, $m\alpha+2B_1^1=0$
16	$H(u)=u^m+\lambda$, $F(u)=\lambda_1u\ln u+\lambda_2u^{m+1}$, $\lambda_1\neq 0$	$B_0^a+m\alpha B^a=0$, $b=0$, $\alpha_0+m\alpha(\alpha-\lambda_2)=0$, $\triangle\alpha-\lambda m\alpha^2=(\lambda_1-m\lambda\lambda_2)\alpha$, $B_1^1=0$, $-\lambda m\alpha B^a=2\alpha_a$
17	$H(u)=u^m+\lambda$, $F(u)=\lambda_1u^{m+1}+\lambda_2u^{m_1}+\lambda_3u$, $\lambda_1\neq 0$, $m\neq 0;1$, $m_1\neq m+1$, $m_1\neq 1$	$B_0^a+(2B_1^1+m\alpha)B^a=0$, $b=0$, $\alpha_0+(2B_1^1+m\alpha)(\alpha-\lambda_1)=0$, $\triangle\alpha-\lambda m\alpha^2=$ $=2\lambda_3B_1^1-\lambda\lambda_1(2B_1^1+m\alpha)$, $-\lambda m\alpha B^a=2\alpha_a$, $\lambda_2[(m_1-1)\alpha+2B_1^1]=0$

При $B_1^1 \neq 0$ маємо, що $\lambda_1 = 0$. Тоді, враховуючи (26), визначальну систему запишемо у вигляді:

$$
\begin{aligned}
&B^a = \frac{\varkappa x_a + C_{ab}x_b + d_a}{2\varkappa x_0 + d_0},\ b = 0,\ \alpha B^a = 2\alpha_a,\\
&\alpha_0 + 2B_1^1(\alpha - \lambda_2) = 0,\ \triangle\alpha + \alpha^2 = \lambda_2\alpha + 2\lambda_3 B_1^1.
\end{aligned}
\tag{40}
$$

З системи (40) випливає, що

$$
\alpha = \frac{\frac{1}{2}\varkappa\lambda_2\vec{x}^{\,2} + \lambda_2\vec{d}\vec{x} + C_1}{2\varkappa x_0 + d_0} + \lambda_2\ ,
$$

де C_1 — довільна стала.

Підставивши α в останнє рівняння (40), отримаємо $\varkappa = 0$, а це означає, що $B_1^1 = 0$, що протирічить початковому припущенню.

Отже, для випадку 1 визначальна система є несумісною.

Визначальні системи кожного з випадків 4–17 містять рівняння

$$
\frac{B_0^1}{B^1} = \frac{B_0^2}{B^2}.
\tag{41}
$$

Розв'язування таких визначальних систем суттєво спрощує наступна лема.

Лема 1. *Розв'язком рівнянь (22) та (41) є функції* $B^a = \psi(x_0)\varphi^a(\vec{x})$.

Доведення. Розв'яжемо рівняння (41), використовуючи рівняння (22). З рівнянь (41) випливає співвідношення

$$
B^2 = \alpha(\vec{x})B^1.
\tag{42}
$$

Продиференціювавши (42) по x_1 та x_2, і використавши рівняння (22), отримаємо

$$
\frac{B_1^1}{B^1} = V(\vec{x}), \quad \frac{B_2^1}{B^1} = W(\vec{x}),
\tag{43}
$$

де $V(\vec{x})$, $W(\vec{x})$ — довільні гладкі функції, які не залежать від змінної x_0. З умови сумісності системи (43), одержимо

$$
V_2 = W_1, \quad \int V_2 dx_1 = W - \gamma(x_2),
\tag{44}
$$

де $\gamma(x_2)$ — довільна гладка функція.

Проінтегрувавши перше рівняння системи (43) по x_1, отримаємо

$$\ln B^1 = \int V dx_1 + \ln \varphi(x_0, x_2), \tag{45}$$

де $\varphi(x_0, x_2)$ — довільна гладка функція.

Продиференціювавши рівняння (45) по x_2 і використавши друге рівняння системи (43) та (44), одержимо

$$\int V_2 dx_1 + \frac{\varphi_2}{\varphi} = W, \quad \Rightarrow \frac{\varphi_2}{\varphi} = \gamma(x_2). \tag{46}$$

Проінтегрувавши друге рівняння системи (46) по x_2, отримаємо

$$\varphi = \psi(x_0)e^{\int \gamma dx_2}, \quad \Rightarrow B^1 = \psi(x_0)e^{\int V(x_1,x_2)dx_1 + \int \gamma(x_2)dx_2}. \tag{47}$$

З формул (47) та (42) випливає, що

$$B^a = \psi(x_0)\varphi^a(\vec{x}), \tag{48}$$

де $\psi(x_0), \varphi^a(x_1)$ — довільні гладкі функції. Лему 1 доведено.

Застосуємо лему 1 на прикладі розв'язування визначальної системи отриманої для випадку 4, тобто при $H = e^u$ і $F = \lambda$. Перепишемо визначальну систему для випадку 4 у вигляді

$$B_1^1 = B_2^2,\ B_2^1 = -B_1^2,\ \frac{B_0^1}{B^1} = \frac{B_0^2}{B^2} = \frac{b_0}{b} = -(2B_1^1 + b), \alpha = 0, \triangle b = 2\lambda B_1^1.$$

Згідно (48) з неї випливає, що

$$\begin{gathered} B^a = \psi(x_0)\varphi^a(\vec{x}),\ \ b = \psi(x_0)\beta(\vec{x}),\ \ \varphi_1^1 = \varphi_2^2,\ \ \varphi_2^1 = -\varphi_1^2, \\ \triangle\varphi^a = 0,\ \ b = -2\psi\varphi_1^1 - \frac{\psi_0}{\psi},\ \ \triangle\beta = 0,\ \ \lambda\varphi_1^1 = 0. \end{gathered} \tag{49}$$

Тому розглянемо два випадки:

I. Якщо $\lambda \neq 0$, $\varphi_1^1 = 0$, то з рівнянь (49) одержуємо

$$\varphi^a = C_{ab}x_b + d_a, \quad \psi = \frac{2\varkappa}{2\varkappa x_0 + d_0}, \quad \beta = 2\varkappa. \tag{50}$$

де d_0, d_a, $C_{ab} = -C_{ba}$ — довільні сталі.

Підставивши (50) в (11), отримаємо оператор, який є еквівалентний ліївському $Q = d_0\partial_0 + d_a\partial_a + C_{12}J_{12} + \varkappa D_1$ (див. пункт 3 в таблиці 1).

II. Нехай $\lambda = 0$, $\varphi_1^1 \neq 0$. З (49) випливає рівняння $-\dfrac{\psi_0}{\psi} = \beta + 2\varphi_1^1$. Оскільки права та ліва частини рівняння залежать від різних змінних, то після інтегрування, отримуємо $\psi = (2\varkappa x_0 + d_0)^{-1}$, $\beta = 2(\varkappa - \varphi_1^1)$. Використавши φ, β та (49), одержимо

$$B^a = \frac{\varphi^a(\vec{x})}{2\varkappa x_0 + d_0},\ \ b = \frac{2(\varkappa - \varphi_1^1)}{2\varkappa x_0 + d_0},\ \ \varphi_1^1 = \varphi_2^2,\ \ \varphi_2^1 = -\varphi_1^2,\ \ \alpha = 0. \qquad (51)$$

Підставивши (51) в (11), знаходимо оператор, який є еквівалентним лі-ївському, наведеному в таблиці 1 під номером 3.

Отже, всі розв'язки визначальної системи, яка відповідає випадку 4 (див. таблицю 3), задають тільки ліївські оператори.

Визначальні системи для випадків 5–17 з таблиці 3 розв'язуються аналогічно. Їх розв'язки породжують тільки ліївські оператори, або їм еквівалентні.

Теорему 4 для операторів, що мають вигляд (11), доведено.

5 Доведення теореми 4 для класу операторів (12)

Щоб описати всі оператори вигляду (12) Q-умовної інваріантності рівняння (2), потрібно знайти загальні розв'язки системи (14). Враховуючи, що $C = a(x)u + b(x)$, перепишемо систему (14) у вигляді

$$HB_0 + \triangle B = -2a_1B + 2a_2 + \left(4B\frac{BB_1 - B_2}{B^2+1} - 2B_1\right)a + \frac{2BB_aB_a}{B^2+1},$$

$$\begin{aligned}
&(au+b)\dot{H} = 2\frac{BB_1 - B_2}{B^2+1}H,\\
&(au+b)\dot{F} - \left(a + 2\frac{BB_1 - B_2}{B^2+1}\right)F = (a_0u + b_0)H+\\
&+\left(\triangle a + 2\frac{BB_1 - B_2}{B^2+1}(Ba_2 - a_1 - a^2) + 2aa_1 - 2a_2B_1\right)u+\\
&+\triangle b + 2\frac{BB_1 - B_2}{B^2+1}(Bb_2 - b_1 - ab) + 2ba_1 - 2b_2B_1.
\end{aligned} \qquad (52)$$

Проаналізувавши структуру рівнянь (52) по змінній u, з точністю до локальних перетворень (5), (9) одержимо нееквівалентні пари функцій H і F та відповідні визначальні системи для функцій B, a, b, які наведено в таблиці 4.

Таблиця 4

№	$H(u)$	$F(u)$	Визначальна система
1	$\forall$	$\forall$	$a=b=0,\ B_0=0,\ BB_1-B_2=0,\ \triangle B=2BB_1^2$
2	1	$\forall$	$a=b=0,\ BB_1-B_2=0,\ B_0+\triangle B=2BB_1^2$
3	1	$\lambda u\ln u,\ \ \lambda\neq 0$	$b=0,\ BB_1-B_2=0,$ $B_0+\triangle B=-2a_1B+2a_2-2aB_1+2BB_1^2,$ $a_0+\triangle a=-2aa_1+2a_2B_1+\lambda a$
4	e^u	λ	$a=0,\ B_0=b_0=0,\ b=\frac{2(BB_1-B_2)}{B^2+1},$ $\triangle B=\frac{2BB_aB_a}{B^2+1},\ \triangle b=bb_1+\frac{2(BB_2+B_1)}{B^2+1}b_2-\lambda b$
5	u^k	$\lambda u,\ k\neq 0$	$b=0,\ B_0=a_0=0,\ a=\frac{2(BB_1-B_2)}{k(B^2+1)},$ $\triangle B=\frac{2BB_aB_a}{B^2+1}+2a(kaB-B_1)-2Ba_1+2a_2,$ $\triangle a=(k-2)aa_1+(2B_1-kaB)a_2+ka^3-k\lambda a$

Розв'яжемо спочатку визначальну систему для **випадку 1** таблиці 4. З умов сумісності останніх двох рівнянь одержуємо, що $B_{11}=0$. Не важко переконатися, що тоді

$$B=\frac{x_1+d_2}{-x_2+d_1}.$$

В результаті отримуємо оператор, який є еквівалентний ліївському $Q=(-x_2+d_1)\partial_1+(x_1+d_2)\partial_2$ (див. таблицю 1, пункт 1).

Використовуючи умови сумісності останніх двох рівнянь визначальної системи в **другому випадку** отримаємо, що $B_0=0$. А це означає, що визначальні системи для першого та другого випадків співпадають, що повністю зводить другий випадок до першого.

З визначальної системи для **третього випадку** в таблиці 4 випливає, що можливі два нееквівалентні випадки: $B_1\neq 0$; $B_1=0$.

З визначальної системи для **третього випадку** в таблиці 4 випливає, що можливі два нееквівалентні випадки: $B_1\neq 0$; $B_1=0$.

Розглянемо спочатку випадок $B_1\neq 0$. Щоб розв'язати систему

$$BB_1-B_2=0, \tag{53}$$

$$B_0+\triangle B=-2a_1B+2a_2-2aB_1+2BB_1^2, \tag{54}$$

$$a_0+\triangle a=-2aa_1+2a_2B_1+\lambda a \tag{55}$$

застосуємо перетворення годографа:

$$x_0 \to t,\ x_1 \to v,\ x_2 \to y,\ B \to x,\ a \to w,$$

де $v = v(t,x,y)$, $w = w(t,x,y)$ — нові невідомі функції, t,x,y — нові незалежні змінні.

Перерахувавши похідні, одержимо

$$\begin{aligned}
&B_0 = -\frac{v_t}{v_x}, \quad B_1 = \frac{1}{v_x}, \quad B_2 = -\frac{v_y}{v_x}, \quad B_{11} = -\frac{v_{xx}}{v_x^3},\\
&B_{22} = -\frac{v_y^2 v_{xx} - 2v_x v_y v_{xy} + v_x^2 v_{yy}}{v_x^3}, \quad a_0 = w_t - \frac{v_t}{v_x} w_x, \quad a_1 = \frac{w_x}{v_x},\\
&a_2 = w_y - \frac{v_y}{v_x} w_x, \quad a_{11} = \frac{v_x w_{xx} - w_x v_{xx}}{v_x^3},\\
&a_{22} = w_{yy} - \frac{w_x}{v_x} v_{yy} - 2\frac{v_y}{v_x}\left(w_{xy} - \frac{w_x}{v_x} v_{xy}\right) + \frac{v_y^2}{v_x^2}\left(w_{xx} - \frac{w_x}{v_x} v_{xx}\right).
\end{aligned} \tag{56}$$

Підставивши (56) в (53), після інтегрування, отримаємо

$$v = -xy + \varphi, \tag{57}$$

де $\varphi = \varphi(t,x)$ — довільна гладка функція.

Підставивши (56), (57) в (54), одержимо

$$w_y = -\frac{w}{y - \varphi_x} + \frac{\varphi_t}{2(y - \varphi_x)} + \frac{x^2+1}{2(y-\varphi_x)^3}\,\varphi_{xx}.$$

Проінтегрувавши це рівняння по змінній y, враховуючи, що функція φ не залежить від y, маємо

$$w = \frac{1}{2}\left(\varphi_t - \frac{\psi}{y - \varphi_x} - \frac{x^2+1}{(y-\varphi_x)^2}\,\varphi_{xx}\right), \tag{58}$$

де $\psi = \psi(t,x)$ — довільна гладка функція.

Підставивши (56), (57), (58) в рівняння (55) та розщепивши його по різних степенях змінної y, одержуємо наступну систему для визначення функцій φ, ψ:

$$\begin{aligned}
&\varphi_{xx} = 0,\ \ \psi\varphi_{tx} = 0,\ \ (x^2+1)\varphi_{xx} + (2x+\psi)\psi_x - 4\psi = 0,\\
&\psi_t = \lambda\varphi,\ \ \varphi_{tt} = \lambda\varphi_t.
\end{aligned} \tag{59}$$

Розв'язання системи (59) розбивається на два підвипадки: $\psi = 0$, $\varphi_{tx} = 0$. При $\psi = 0$ розв'язком системи (59) є функція $\varphi = (C_1 + C_2 e^{\lambda t})x + C_3 + C_4$. У другому випадку, коли $\varphi_{tx} = 0$, загальний розв'язок системи (59) має вигляд $\varphi = C_1 x + C_3 + C_4 e^{\lambda t}$, $\psi = C_5 e^{\lambda t}$, де $C_1, \ldots, C_5$ — довільні сталі.

Підставляючи одержані результати в формули (57), (58) та враховуючи перетворення годографа, знаходимо функції B та a:

$$1)\ B = -\frac{x_1 - C_3 - C_4 e^{\lambda x_0}}{x_2 - C_1 - C_2 e^{\lambda x_0}},\ \ a = \frac{\lambda}{2}\, e^{\lambda x_0}\, \frac{-C_2 x_1 + C_4 x_2 + C_2 C_3 - C_1 C_4}{x_2 - C_1 - C_2 e^{\lambda x_0}};$$

$$2)\ B = -\frac{x_1 - C_3 - C_4 e^{\lambda x_0}}{x_2 - C_1},\ \ a = \frac{\lambda}{2}\, e^{\lambda x_0}\, \frac{C_4 x_2 - C_1 C_4 - C_5}{x_2 - C_1}.$$

Обидва випадки приводять до лінійної комбінації ліївських операторів рівняння

$$u_0 + \triangle u = \lambda u \ln u,\ \ \lambda \neq 0. \tag{60}$$

У випадку $B_1 = 0$, як випливає з рівняння (53), $B = \beta(x_0)$, а рівняння (54), (55) мають вигляд:

$$\dot\beta = -2a_1\beta + 2a_2,\ \ a_0 + \triangle a = -2aa_1 + \lambda a. \tag{61}$$

Розв'язком першого рівняння системи (61) є функція

$$a = \varphi(x_0, \omega) + \frac{1}{2}\dot\beta x_2,\ \ \omega = x_1 + \beta x_2, \tag{62}$$

де φ — довільна гладка функція. Підставивши функцію (62) в друге рівняння системи (61), після розщеплення по змінній x_2, отримаємо:

$$\begin{aligned} &4\dot\beta\varphi_\omega = \lambda\dot\beta - \ddot\beta, \\ &\varphi_0 + (1 + \beta^2)\varphi_{\omega\omega} = -2\varphi\varphi_\omega + \lambda\varphi. \end{aligned} \tag{63}$$

Розв'язок першого рівняння системи (63) залежить від значення функції β. Коли $\dot\beta = 0$, то $B = \beta = \lambda_1$, λ_1 — довільна стала. Формула (62) при цьому має вигляд $a = \varphi(x_0, \omega)$, $\omega = x_1 + \lambda_1 x_2$, де φ — довільний розв'язок другого рівняння системи (63). Так як задане рівняння інваріантне відносно поворотів, то не втрачаючи загальності можна вважати $\lambda_1 = 0$. Отже, рівняння (60) є Q-умовно інваріантним відносно оператора $Q = \partial_1 + \varphi(x_0, \omega)u\partial_u$, де φ — довільний розв'язок другого рівняння системи (63), який наведено в пункті 3 таблиці 2.

При $\beta \neq \mathrm{const}$ розв'язком рівняння (63) є функція

$$\varphi = \frac{\lambda\dot{\beta} - \ddot{\beta}}{4\dot{\beta}}\omega + \gamma(x_0), \tag{64}$$

де γ — довільна гладка функція. Після підстановки (64) в друге рівняння системи (63), отримаємо рівняння: $\lambda\dot{\beta} - \ddot{\beta} = 0, \quad \lambda\gamma - \dot{\gamma} = 0$, розв'язавши які, з урахуванням формул (62), (64) одержимо

$\beta = C_1 e^{\lambda x_0} + C_2,\ \gamma = C_3 e^{\lambda x_0},\ a = \frac{1}{2} C_1 \lambda e^{\lambda x_0} x_2 + C_3 e^{\lambda x_0},$
де C_1, C_2, C_3 — довільні сталі. Тому рівняння (60) є інваріантним відносно оператора

$$Q = \partial_1 + (C_1 e^{\lambda x_0} + C_2)\partial_2 + \left[\frac{1}{2} C_1 \lambda e^{\lambda x_0} x_2 + C_3 \lambda e^{\lambda x_0}\right] u\partial_u,$$

який є лінійною комбінацією ліївських операторів (пункт 8 табл. 1).

Якщо в останнє рівняння визначальної системи з **випадку 4** таблиці 4 підставити вираз $b = 2\frac{BB_1 - B_2}{B^2+1}$ (четверте рівняння цієї системи), то одержимо умову $\lambda = 0$. Тому рівняння $e^u u_0 + \triangle u = 0$ є Q-умовно інваріантним відносно оператора

$$Q = \partial_1 + B(\vec{x})\partial_2 + 2\frac{BB_1 - B_2}{B^2 + 1}\partial_u, \tag{65}$$

де B — довільна функція така, що $\triangle B = \frac{2BB_aB_a}{B^2+1}$.

Лема 2. *Оператор (65) є еквівалентним оператору ліївської симетрії рівняння* $e^u u_0 + \triangle u = 0$.

Доведення. Достатньо довести існування такої функції $\mu(\vec{x}) \neq 0$, після домноження на яку оператор Q співпадає з ліївським оператором з таблиці 1 (випадок 7). Після заміни

$$B = \mathrm{tg}\ w(\vec{x})$$

оператор Q набуде вигляду

$$Q = \partial_1 + \ \mathrm{tg}\ w\,\partial_2 + 2(w_1\ \mathrm{tg}\ w - w_2)\partial_u,$$

де w — довільний розв'язок рівняння $\triangle w = 0$.

Розглянемо оператор

$$Q' = \mu\partial_1 + \mu\ \mathrm{tg}\ w\,\partial_2 + 2\mu(w_1\ \mathrm{tg}\ w - w_2)\partial_u,$$

для якого $\xi^1 = \mu$, $\xi^2 = \mu \operatorname{tg} w$, $\eta = 2\mu(w_1 \operatorname{tg} w - w_2)$. Підберемо функцію μ таким чином, щоб задовольнити систему $\xi^1_1 = \xi^2_2$, $\xi^1_2 = -\xi^2_1$, $\eta = -2\xi^1_1$, тобто

$$\mu_1 = \mu_2 \operatorname{tg} w + \mu \frac{w_2}{\cos^2 w}, \quad -\mu_2 = \mu_1 \operatorname{tg} w + \mu \frac{w_1}{\cos^2 w},$$
$$\mu(w_1 \operatorname{tg} w - w_2) = -\mu_1,$$

звідки

$$\frac{\mu_1}{\mu} = w_2 - w_1 \operatorname{tg} w, \quad \frac{\mu_2}{\mu} = -w_1 - w_2 \operatorname{tg} w.$$

Ця система відносно функції μ сумісна , оскільки $\triangle w = 0$.

Лему 2 доведено.

Тому в випадку 3 загальні розв'язки визначальної системи задають тільки оператори, що є еквівалентні ліївським.

Для **п'ятого випадку**, коли $H = u^k$, $k \neq 0$, маємо рівняння

$$u^k u_0 + \triangle u = \lambda u, \tag{66}$$

яке є Q-умовно інваріантним відносно оператора

$$Q = \partial_1 + B(\vec{x})\partial_2 + \frac{2(BB_1 - B_2)}{k(B^2+1)} u\partial_u, \tag{67}$$

де B — довільна функція, що задовольняє визначальну систему

$$\triangle B = \frac{2BB_aB_a}{B^2+1} + \frac{4(2BB_{12} - B^2B_{11} - B_{22})}{k(B^2+1)} - \frac{8B_1(BB_1 - B_2)}{k(B^2+1)} + \\ + \frac{16B(BB_1 - B_2)^2}{k(B^2+1)^2};$$

$$B_1\triangle B + 2B_aB_{1a} + B\triangle B_1 - \triangle B_2 + \frac{12B^2B_aB_a(BB_1 - B_2)}{(B^2+1)^2} - \\ - \frac{2(BB_1 - B_2)(B\triangle B + B_aB_a) + 4BB_a(B_1B_a + BB_{1a} - B_{2a})}{B^2+1} = \\ = \frac{2(B_1 + BB_2)}{B^2+1}(B_1B_2 + BB_{12} - B_{22}) + 2(BB_1 - B_2)\Big[B_1^2 + BB_{11} - \\ - B_{12} - 2B^3B_1\frac{(BB_1 - B_2)}{(B^2+1)^2}\Big] - \frac{4}{k}(BB_1 - B_2)\Big[B_1^2 + BB_{11} - \\ - B_{12} - \frac{2BB_1(BB_1 - B_2)}{(B^2+1)} - \frac{(BB_1 - B_2)^2}{(B^2+1)^2}\Big] - \lambda k(BB_1 - B_2). \tag{68}$$

Розв'язки системи (68) задають Q-умовні оператори інваріантності рівняння (66), що є еквівалентні ліївським.

Теорему 4 доведено.

6 Редукція рівняння (2) за допомогою Q-умовних операторів.

Використаємо оператори наведені в таблиці 2 для редукції відповідних рівнянь вигляду (2) до диференціальних рівнянь з двома незалежними змінними. Кожен з цих випадків має свої цікаві особливості, тому буде розглянутий окремо.

1. Для довільної гладкої функції $H = H(u)$ та довільних сталих λ_0, λ_1, λ_2, $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$, рівняння

$$Hu_0 + \triangle u = (\lambda_1 u + \lambda_2)(H + \lambda_0) \tag{69}$$

є Q-умовно інваріантним відносно оператора $Q = \partial_0 + (\lambda_1 u + \lambda_2)\partial_u$.

В залежності від співвідношень між коефіцієнтами λ_1 та λ_2 маємо такі два нееквівалентних випадки для побудови анзаців:

1. $\lambda_1 \neq 0$, тому $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0 \bmod G^{\sim}$: $\quad u = e^{x_0}\varphi(\vec{x})$;

2. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, тому $\lambda_2 = 1 \bmod G^{\sim}$: $\quad u = x_0 + \varphi(\vec{x})$.

Тут $\varphi = \varphi(\vec{x})$ — нова невідома функція.

В обох випадках після підстановки анзаців в рівняння (69) отримаємо редуковане рівняння $\triangle\varphi = \lambda_0$.

Отже, для цього випадку можемо підсумувати:

— це єдиний випадок для рівнянь вигляду (2), коли нетривіальна Q-умовна симетрія є для класу рівнянь з функціональною довільністю в нелінійності;

— він узагальнює стаціонарні ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$) розв'язки, що є ліївськими;

— нелінійне рівняння (69) для довільної функції H редукується до лінійного рівняння, яке заміною $\varphi \to \varphi - \lambda_0 x_1^2/2$ зводиться до (1+1)-вимірного рівняння Лапласа.

2. Для довільних сталих λ_0, λ_1, λ_2 рівняння

$$uu_0 + \triangle u = \lambda_2 u^2 + \lambda_1 u + \lambda_0$$

є Q-умовно інваріантним відносно оператора $Q = \partial_0 + (\lambda_2 u - b(\vec{x}))\partial_u$, де $b = b(\vec{x})$ — довільний розв'язок рівняння $\triangle b = b^2 + \lambda_1 b + \lambda_2\lambda_0$.

В залежності від значення λ_2 отримуємо такі нееквівалентні анзаци та редуковані рівняння:

1. $\lambda_2 \neq 0$, тому $\lambda_2 = 1 \bmod G^{\sim}$: $u = e^{x_0}\varphi(\vec{x}) + b(\vec{x})$, $\triangle\varphi = (\lambda_1 + b)\varphi$;
2. $\lambda_2 = 0$: $u = \varphi(\vec{x}) - b(\vec{x})x_0$, $\triangle\varphi = (\lambda_1 + b)\varphi + \lambda_0$.

Тут $\varphi = \varphi(\vec{x})$ — нова невідома функція.

Побудовані анзаци допускають також іншу інтерпретацію. Якщо не задавати a priori функцію b як розв'язок рівняння $\triangle b = b^2 + \lambda_1 b + \lambda_2\lambda_0$, то після підстановки у вихідне рівняння побудовані вище анзаци приводять до так званої *антиредукції*. А саме, після розщеплення за змінною x_0 (одне) вихідне рівняння зводиться до системи двох рівнянь відносно двох нових невідомих функцій b та φ, які однак залежать від меншої кількості змінних порівняно з старою невідомою u.

3. Для будь-якого розв'язку $a = a(x_0, x_1)$ рівняння

$$a_0 + a_{11} = -2aa_1 + \lambda a$$

оператор $Q = \partial_1 + a(x_0, x_1)u\partial_u$ є оператором Q-умовної інваріантності рівняння

$$u_0 + \triangle u = \lambda u \ln u, \tag{70}$$

де λ — деяка ненульова стала.

Рівняння на функцію a за допомогою заміни Коула–Хопфа $a = (\ln v)_1$ зводиться до (1+1)-вимірного аналога рівняння (70) відносно функції $v = v(x_0, x_1)$. А саме, можна вважати, що v задовольняє рівняння

$$v_0 + v_{11} = \lambda v \ln v. \tag{71}$$

Використовуючи оператор Q, побудуємо анзац

$$u = v(x_0, x_1)\varphi(x_0, x_2), \tag{72}$$

який редукує (70) до рівняння

$$\varphi_0 + \varphi_{22} = \lambda\varphi \ln \varphi. \tag{73}$$

Підкреслимо, що (71) та (73) — це (1+1)-вимірні нелінійні рівняння теплопровідності з тою ж нелінійністю, що й вихідне рівняння (70). Обидві функції $v = v(x_0, x_1)$ та $\varphi = \varphi(x_0, x_2)$ зберігають залежність від x_0, тобто анзац (72) визначає *неповне розділення змінних* — тільки за просторовими змінними.

Розв'язки (1+1)-вимірного рівняння (70) добре вивчені, їх знаходженню присвячено цілу низку праць (див. посилання в [27]). Підставляючи в анзац (72) вже відомі розв'язки (1+1)-вимірного рівняння, можна побудувати значну кількість точних розв'язків (1+2)-вимірного рівняння (70).

Зауваження. Неповне розділення змінних, визначене анзацом (72), може бути очевидно узагальнене на багатовимірний випадок. А саме, зображення розв'язку $u = u(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ рівняння (70), де $\triangle$ — n-вимірний оператор Лапласа, у вигляді $u = u^1 u^2$ дає неповне розділення змінних, причому $u^1(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ і $u^2(x_0, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ задовольняють відповідно k- і $n-k$-вимірні рівняння вигляду (70).

7 Висновки

У даній роботі розв'язано задачу знаходження Q-умовних операторів інваріантності (1+2)-вимірних рівнянь реакції – дифузії.

З основних результатів, отриманих в даній роботі, випливають наступні висновки:

1. Реалізовано задачу повного опису операторів (4), відносно яких за умови $H \neq 0$, рівняння (2) є Q-умовно інваріантним відносно одновимірної множини операторів. Результати розв'язання представлено в таблиці 2.

2. Проведено Q-умовну редукцію рангу один для рівняння (2), побудовано анзаци та знайдено відповідні редуковані рівняння.

3. Знайдено нові множини двох операторів Q-умовної симетрії (1+2)-вимірного рівняння теплопровідності (1), які використано для побудови анзаців, проведення редукції до звичайних диференціальних рівнянь та знаходження класів його точних розв'язків. Це дає змогу отримувати точні розв'язки (1+2)-вимірного рівняння теплопровідності, які не можна отримати стандартним методом Лі.

Виражаю щиру подяку Сєрову Миколі Івановичу та Поповичу Роману Омеляновичу за цінні зауваження під час обговорення результатів досліджень.

[1] *Bluman G.W., Cole J.D.* The general similarity solution of the heat equation // J. Math. Mech. — 1969. — Vol. 18, № 11. — P. 1025–1042.

[2] *Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И.* Симметрийный анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики.— Киев: Наукова думка. — 1989. — 339 с.

[3] *Фущич В.И.* О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики // Докл. АН СССР. — 1979. — 246, № 4. — С. 846–850.

[4] *Фущич В.И.* Условная симметрия уравнений нелинейной математической физики // Укр. мат. журн. — 1991. — 43, № 11. — С. 1456–1470.

[5] *Фущич В.И.* Как расширить симметрию дифференциальных уравнений? // Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики. — Киев: Ин–т математики АН УССР. — 1987. — С. 4–16.

[6] *Фущич В.И., Серов Н.И.* Условная инвариантность и редукция нелинейного уравнения теплопроводности // Докл. АН УССР. — 1990. — Сер. А, № 7. — С. 24–27.

[7] *Фущич В.И., Серов Н.И., Амеров Т.К.* О нелокальных анзацах для одного нелинейного одномерного уравнения теплопроводности// Докл. АН Украины. — 1992. — № 1. — С. 26–30.

[8] *Fushchich W.I., Serov N.I., Tychinin W.A., Amerov T.K.* On nonlocal symmetries of the nonlinear heat equation // Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy. — 1992. — № 11 — P. 27–33.

[9] *Fushchych W., Tsyfra I.* On reduction and exact solutions of nonlinear wave equations with broken symmetry // J. Phys. A: Math. Gen. — 1987. — Vol. 20. — P. L45–L47.

[10] *Karczewska A.* Statical solutions to turbulent diffusion // Pergamon: Nonlinear Analysis. — 1999. — 37. — P. 635–675.

[11] *Pukhnachov V.V.* Nonlocal symmetries in nonlinear heat equations // Energy methods in continuum mechanics. — 1996. — 316 p.

[12] *Попович Р.О.* Про симетрію та точні розв'язки одного рівняння переносу // Укр. мат. журн. — 1995. — Т. 47, № 1. — С. 121–125.

[13] *Fushchish W.I., Serov N.I., Shtelen W.M. and Popovich R.E.* Q-conditional symmetry of the linear heat equation // Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy. — 1992. — № 12. — P. 27–32.

[14] *Popovych R.O.* On reduction and Q-conditional symmetry // Proceedings of the Second International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Phisics". — Kyiv: Institute of Mathematics. — 1997. — Vol. 2. — P. 437–443.

[15] *Webb G.M.* Lie symmetries of a coupled nonlinear Burgers–heat equation system // J. Phys. A: Math. Gen. — 1990. — Vol. 23, № 17. — P. 3885–3894.

[16] *Попович Р.О., Корнєва І.П.* Про Q-умовну симетрію лінійного n-вимірного рівняння теплопровідності // Симетрійні та аналітичні методи в математичній фізиці: Зб. наук. пр. НАН України. Інститут математики. — 1998. — Т. 19. — С. 200–211.

[17] *Серов Н.И.* Условная инвариантность и точные решения нелинейного уравнения теплопроводности. // Укр. мат. журн. — 1990. — Т. 42, № 10. — С. 1370–1376.

[18] *Фущич В.И., Серов Н.И., Амеров Т.К.* Условная инвариантность нелинейного уравнения теплопроводности // Докл. АН УССР. — 1990. — № 11. — С. 15–18.

[19] *Фущич В.И., Серов Н.И., Чопик В.И.* Условная инвариантность и нелинейные уравнения теплопроводности // Докл. АН УССР. — 1988. — Сер. А, № 9. — С. 17–20.

[20] *Fushchich W.I., Serov N.I., Tulupova L.A.* The Conditional Invariance and Exact Solutions of the Nonlinear Diffusion Equation. // Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy. — 1993. — № 4. — P. 37–40.

[21] *Дородницын В.А.* О инвариантных решениях нелинейного уравнения теплопроводности с источником // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1982. — Т. 22. — С. 1393–1400.

[22] *Дородницын В.А., Князева И.В., Свирщевский С.Р.* Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в дву- и трехмерном случаях // Дифференц. уравнения. — 1983. — Т. 19. — С. 1215–1223.

[23] *Серова М.М.* О нелинейных уравнениях теплопроводности, инвариантных относительно группы Галилея // Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики. — Киев: Ин-т математики. — 1985. — С. 119–123.

[24] *Овсянников Л.В.* Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности // ДАН СССР. — 1959. — Т. 125, № 3. — С. 492–495.

[25] *Ibragimov N.H.* (Editor) Lie group analysis of differential equations – symmetries, exact solutions and conservation laws // Boca Raton, FL, Chemical Rubber Company. — 1994. — Vol. 1.

[26] *Goard J., Broadbridge P.* Nonclassical symmetry analysis of nonlinear reaction—diffusion equations in two spatial dimensions// Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. — 1996. — Vol. 26, № 4. — P. 735–756.

[27] *Галактионов В.А., Дородницын В.А., Еленин Г.Г., Курдюмов С.П., Самарский А.А.* Квазилинейное уравнение теплопроводности с источником: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. — 1986. — Т. 28. — С. 95–206.

Q-CONDITIONAL SYMMETRY OF THE NONLINEAR (1+2)-DIMENSIONAL REACTION–DIFFUSION EQUATIONS

Nataliya ICHANSKA

Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University

Pershotravneviy prospekt, 24, Poltava 36011

Q-conditional invariant operators of a class of (1+2)-dimensional nonlinear reaction – diffusion equations are described completely. The symmetries are used for finding exact solutions of the equations under considerations.