ОЦІНКА КІЛЬКОСТІ ЗБУРЕНИХ СУБГАРМОНІК ЗАДАЧІ ПРО ПЛОСКІ ОБЕРТАННЯ НЕБЕСНОГО ТІЛА, ЯКЕ РУХАЄТЬСЯ ПО ЕЛІПТИЧНІЙ ОРБІТІ

 Юлія ВАКАЛ

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
вул. Володимирська, 60, Київ 01601

Редакція отримала статтю 21 жовтня 2010 р.,

після доопрацювання – 9 листопада 2010 р.

Розглядається механічна система, яка описує плоскі обертання небесного тіла, що рухається по еліптичній орбіті, відносно його центра мас. Показано, що кількість субгармонік у збуреній системі оцінюється знизу функцією, пропорційною квадрату логарифма ексцентриситету при прямуванні цього параметра до нуля.

1 Вступ

Розглядаємо механічну систему з лагранжіаном [1]

$$L\left(t,\ u,\ \dot{u};\varepsilon\right)=\left(1+\varepsilon\cos t\right)^{2}\left[\frac{(\dot{u})^{2}}{2}+2\dot{u}\right]-\lambda\left(1+\varepsilon\cos t\right)\sin^{2}\frac{u}{2}, \qquad (1)$$

яка описує плоскі обертання небесного тіла, що рухається по еліптичній орбіті, відносно його центра мас. Тут ε – ексцентриситет орбіти ($0 \leqslant \varepsilon < 1$), $\lambda := 3\,(A-C)/B,\ A, B, C$ – головні моменти інерції тіла, за незалежну змінну t взято істинну аномалію. Відомо, що $|\lambda| \leqslant 3$.

УДК 517.9; MSC 2000: 34C15, 34C25, 37J40

Вихідна система після введення канонічних координат "дія-кут" $(I, \phi | \bmod 2\pi)$ набуває вигляду гамільтонової системи з півтора ступенями вільності з 2π-періодичним за часом гамільтоніаном вигляду $H(I) + \varepsilon h(I, \phi, t; \varepsilon)$.

Ця система є зручною для розробки методів дослідження особливостей задач небесної механіки. Проте вона не настільки вивчена і досліджена, як, наприклад, система, що описує коливання маятника. Крім того, всі попередні дослідження даної системи стосувалися переважно опису та вивчення властивостей її розв'язків (стійкості та єдиності розв'язків [2], граничних сімейств розв'язків при певних співвідношеннях параметрів системи [3], [1]), дослідження областей можливих рухів [4], чисельного обчислення деяких класів розв'язків [5]. Однак залишалося відкритим питання про кількість періодичних розв'язків у збуреній системі, які одночасно існують при заданому достатньо малому значенні параметра збурення. Слід зазначити, що це питання пов'язано з так званим явищем буферності, яке означає, що при підходящій мализні параметра збурення та при фіксованих інших параметрах можна досягти існування в системі будь-якої наперед заданої кількості експоненційно стійких періодичних розв'язків [6].

Мета даної роботи полягає у знаходженні залежності кількості періодичних розв'язків зазначеної системи з періодами, кратними 2π, від параметра ε при $\varepsilon \to 0$ та в отриманні нижніх оцінок для кількості збурених субгармонік у такій системі.

Основним інструментом для отримання оцінок служить наведена в пункті 2 теорема, яка встановлює умови існування періодичних розв'язків, що зберігаються при руйнуванні індивідуального резонансного циклу незбуреної системи. У пункті 3 встановлюються оцінки для двох випадків:
1) випадок, коли періодичні розв'язки породжуються тими резонансними значеннями змінної дії, для яких $H(I) < \lambda$; цей випадок відповідає ситуації, коли супутник коливається відносно своєї осі, але не здійснює повних обертів;
2) випадок, коли періодичні розв'язки породжуються тими резонансними значеннями змінної дії, для яких $H(I) > \lambda$; відповідні періодичні розв'язки описують синхронізовані обертання супутника.

У пункті 4 наводиться декілька допоміжних оцінок для похідних еліптичних функцій за обома змінними та оцінки для похідної еліптичного інтеграла.

2 Ультрасубгармоніки близької до інтегровної системи з півтора ступенями вільності та 2π-періодичним за часом гамільтоніаном

Розглядаємо двовимірну автономну гамільтонову систему, яка зазнає малого неавтономного 2π-періодичного за часом збурення.

Запишемо збурену систему в змінних дія-кут $(I, \phi \,|\mathrm{mod} 2\pi)$ [7]:

$$\begin{cases} \dot{I} = -\mu^2 h'_\phi (t,\, I,\, \phi;\, \mu)\,, \\ \dot{\phi} = H'(I) + \mu^2 h'_I (t,\, I, \phi;\, \mu)\,, \end{cases} \tag{2}$$

де μ — малий додатний параметр.

Будемо припускати, що функції $H(I)$, $h(t, I, \phi;\, \mu)$ задовольняють такі умови:
(H1): $H(\cdot) \in \mathrm{C}^2((I_*, I^*) \mapsto \mathbb{R})$, $h(\cdot,\cdot,\cdot;\, \mu) \in C^2(\mathbb{R} \times (I_*, I^*) \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R})$, причому функція $h(t, I, \phi;\, \mu)$ є 2π -періодичною щодо змінних t, ϕ, а незбурений гамільтоніан невироджений в тому сенсі, що $H''(I) \neq 0$ для всіх $I \in (I_*, I^*)$;
(H2): для раціонального числа p/q з області значень функції $H'(I)$ і значення змінної дії $I_{p/q}$ такого, що $H'(I_{p/q}) = p/q$, так звана ультрасубгармонічна функція Пуанкаре

$$P_{q/p}(\psi) := -\frac{1}{2\pi q}\int_0^{2\pi q} h'_\phi\left(t, I_{p/q}, \frac{p}{q}t + \psi;\, 0\right) dt$$

знакозмінна, а отже, виконується нерівність

$$\eta_{p/q} := \min\left\{\max_{\psi\in[0,2\pi]} P_{p/q}(\psi), -\min_{\psi\in[0,2\pi]} P_{p/q}(\psi)\right\} > 0.$$

При $\mu = 0$ лінія рівня $I = I_{p/q}$ складається з початкових значень $2\pi q$-періодичних розв'язків незбуреної системи, які мають вигляд $I = I_{p/q}$, $\phi = \frac{p}{q}t + \phi_0$ (ϕ_0 – довільна стала) і називаються (q/p)-*ультрасубгармоніками.*

Розв'язки збуреної системи (1), які мають вигляд $I = I_{p/q} + \mu y(t;\mu)$, $\phi = \frac{p}{q}t + \psi(t;\mu)$, де $y(t;\mu), \psi(t;\mu)$ – $2\pi q$-періодичні щодо часу функції, називаються *збуреними* (q/p)-*ультрасубгармоніками* (q-*субгармоніками*, якщо $p = 1$).

Далі, припустимо, що для деякого $\delta = \delta_{p/q} > 0$ точка $I_{p/q}$ разом зі своїм замкненим δ-околом належить (I_*, I^*). Уведемо позначення

$$\begin{gathered} D_{p/q} := [0; 2\pi] \times \left\{ I \in \mathbb{R} : \left| I - I_{p/q} \right| \leqslant \delta \right\} \times [0; 2\pi], \\ |H''|^-_{p/q} := \min_{\left|I - I_{p/q}\right| \leqslant \delta} \left| H''\left(I\right) \right|, \quad |H''|^+_{p/q} := \max_{\left|I - I_{p/q}\right| \leqslant \delta} \left| H''\left(I\right) \right|, \\ \left|h'_{\phi}\right|_{p/q} := \max_{D_{p/q}} \left|h'_{\phi}(t, I, \phi; 0)\right|, \left|h'_{I}\right|_{p/q} := \max_{D_{p/q}} \left|h'_{I}(t, I, \phi; 0)\right|, \end{gathered} \tag{3}$$

$$\left|h''_{\phi I}\right|_{p/q} := \max_{D_{p/q}} \left|h''_{\phi I}\left(t, I, \phi; 0\right)\right|, \left|h''_{\phi\phi}\right|_{p/q} := \max_{D_{p/q}} \left|h''_{\phi\phi}(t, I_{p/q}, \phi; 0)\right|.$$

Далі визначимо

$$\nu_{p/q} := \frac{2\pi q \left[|H''|^+_{p/q} + |H''|^-_{p/q} \right] \left|h'_{\phi}\right|_{p/q} + \left|h'_{I}\right|_{p/q}}{|H''|^-_{p/q}}, \tag{4}$$

$$\kappa_{p/q} := \left[2\pi q \left|H''\right|^-_{p/q} \left|h''_{\phi\phi}\right|_{p/q} + \left|h''_{\phi I}\right|_{p/q} \right] \nu_{p/q} + 2\pi q \left|h''_{\phi\phi}\right|_{p/q} \left|h'_{I}\right|_{p/q}. \tag{5}$$

Теорема 1. *Припустимо, що система* (2) *задовольняє умови (H1), (H2). Тоді, якщо справджуються нерівності*

$$0 < \delta_{p/q} < \min \left\{ I_{p/q} - I_*, I^* - I_{p/q} \right\}$$

та

$$\min \left\{ \frac{\delta_{p/q}}{\nu_{p/q}}, \frac{\eta_{p/q}}{\kappa_{p/q}} \right\} > \mu^2, \tag{6}$$

де $\nu_{p/q}$, $\kappa_{p/q}$ *визначені формулами* (4), (5), *то існує принаймні* $2q$ *збурених* (q/p)*-ультрасубгармонік системи* (2).

Ця теорема доводиться на основі теореми про існування T-періодичного розв'язку T-періодичної системи, близької до гамільтонової, яку слід розглядати як деяку модифікацію відомих результатів про періодичні розв'язки неавтономних систем, встановлених на основі геометричних принципів [8–11].

Теорема 1 встановлює умови існування періодичних розв'язків, що зберігаються при руйнуванні індивідуального резонансного циклу незбуреної системи. На відміну від класичних результатів Пуанкаре в ній відсутня умова простоти коренів функції $P_{q/p}(\psi)$. Замість цього вимагається лише, щоб зазначена функція не була тотожно нульовою.

3 Задача про плоскі обертання небесного тіла, яке рухається по еліптичній орбіті

Повернемося до розгляду описаної вище механічної системи з лагранжіаном (1). Надалі досліджуватимемо випадок, коли параметр λ набуває додатних значень.

Після заміни
$v = \frac{\partial L}{\partial \dot u} = (1 + \varepsilon \cos t)^2 (\dot u + 2)\,,\ v \to v + 2$
дістаємо систему з гамільтоніаном

$$H = \frac{v^2}{2} + \lambda \sin^2 \frac{u}{2} + \varepsilon \cos t \left[\frac{v^2}{2} + \lambda \sin^2 \frac{u}{2} - \frac{3v^2}{2} - 4v \right] + \varepsilon^2 \eta\,(t,\, \varepsilon) \left[v^2 + 4v \right],$$

де

$$\eta\,(t,\, \varepsilon) := \frac{3 + 2\varepsilon \cos t}{2(1 + \varepsilon \cos t)^2} \cos^2 t.$$

Надалі вважатимемо, що $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{4}$. Легко показати, що при цих значеннях ексцентриситету справджуються нерівності

$$\left| \frac{3}{2} \cos t - \varepsilon \eta\,(t,\, \varepsilon) \right| \leqslant \frac{37}{18}, \quad \left| \cos t - \varepsilon \eta\,(t,\, \varepsilon) \right| \leqslant \frac{14}{9}, \tag{7}$$

які будуть використані в подальшому. Уведемо до розгляду незбурений гамільтоніан $H|_{\varepsilon=0} := H = \frac{v^2}{2} + \lambda \sin^2 \frac{u}{2}$. У фазовому просторі незбуреної системи виділимо дві області:

$$D_1 := \left\{ (u,\, v) : H\,(u,\, v) < \lambda \right\}, \quad D_2 := \left\{ (u,\, v) : H\,(u,\, v) > \lambda \right\}.$$

Випадок 1. Незбурена система розглядається в області D_1. Цей випадок відповідає ситуації, коли супутник коливається відносно своєї осі, але не здійснює повних обертів.

Область D_1 розшаровується замкненими лініями рівня $H = z$, де числа z пробігають інтервал $(0,\, \lambda)$. У цій області природно вводяться змінні "дія-кут". Позначивши через $\Pi\,(z)$ площу фігури, обмеженої лінією $H = z$, змінну дії вводимо за формулою [7]:

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2 \left(z - \lambda \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)} d\theta = \frac{\Pi\,(z)}{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int\limits_0^{u_{\max}} \sqrt{z - \lambda \sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta,$$

де
$$u_{\max} = 2\mathrm{arcsin}\left(\sqrt{\frac{z}{\lambda}}\right).$$

Тоді залежність незбуреного гамільтоніана від змінної дії визначається так
$$H\left(I\right) = \Pi^{-1}\left(2\pi I\right). \tag{8}$$

Кутова змінна вводиться за формулою

$$\phi = \frac{\partial}{\partial I}\int\limits_0^u \sqrt{2\left(z - \lambda\mathrm{sin}^2\frac{s}{2}\right)}ds = H'\left(I\right)\int\limits_0^u \frac{ds}{\sqrt{2z - \lambda\mathrm{sin}^2\frac{s}{2}}} =$$

$$= H'\left(I\right)\sqrt{\frac{2}{z}}\int\limits_0^{u/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{\lambda}{z}\mathrm{sin}^2\theta}}.$$

Звідси знаходимо вирази вихідних змінних u, v через змінні дія-кут:

$$u = 2\mathrm{am}\left(\sqrt{\frac{H\left(I\right)}{2}}\,\frac{\phi}{H'\left(I\right)},\ \frac{\lambda}{H\left(I\right)}\right),$$

$$v = \sqrt{2z}\sqrt{1-\frac{\lambda}{z}\mathrm{sin}^2\frac{u}{2}} = \sqrt{2H\left(I\right)}\ \mathrm{dn}\left(\sqrt{\frac{H\left(I\right)}{2}}\,\frac{\phi}{H'\left(I\right)},\ \frac{\lambda}{H\left(I\right)}\right).$$

Скориставшись дійсним перетворенням Якобі, маємо

$$v = V\left(I,\,\phi\right) := \sqrt{2H\left(I\right)}\ \mathrm{cn}\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\,\frac{\phi}{H'\left(I\right)},\ \frac{H\left(I\right)}{\lambda}\right),$$

де $\mathrm{cn}\left(u,\,m\right)$ – еліптичний косинус. У введених змінних (I,ϕ) збурений гамільтоніан набуває вигляду

$$H = H\left(I\right) + \mu^2 h\left(t,\,I,\,\phi;\,\mu\right), \quad (\mu := \sqrt{\varepsilon}),$$

де $H\left(I\right)$ визначається формулою (8), а

$$h\left(t,\,I,\,\phi;\,\mu\right) = \cos t\,H\left(I\right) -$$

$$-\left(\frac{3}{2}\cos t - \mu^2\eta\left(t,\,\mu^2\right)\right)V^2\left(I,\,\phi\right) - 4\left(\cos t - \mu^2\eta\left(t,\,\mu^2\right)\right)V\left(I,\,\phi\right).$$

Оскільки підінтегральна функція у формулі змінної дії при $\theta = u_{\max}$ перетворюється на 0, то

$$1 = H'(I)\,\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_0^{u_{\max}}\frac{d\theta}{\sqrt{z - \lambda \sin^2\frac{\theta}{2}}}.$$

Заміна $\theta = \theta(s) = 2\arcsin\left(s\sqrt{z/\lambda}\right)$ зводить цю рівність до

$$\frac{1}{H'(I)} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{\frac{z}{\lambda}}\int\limits_0^1\frac{ds}{\sqrt{(z - zs^2)\,(1 - s^2 z/\lambda)}} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\,K\left(\frac{H(I)}{\lambda}\right),$$

де $K(m)$ – повний еліптичний інтеграл першого роду.

Отже, маємо тотожності

$$H'(I) = \frac{\pi\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{2}K\left(H(I)/\lambda\right)}, \tag{9}$$

$$H''(I) = -\frac{\pi H'(I)\,K'\left(H(I)/\lambda\right)}{2\sqrt{2\lambda}K^2\left(H(I)/\lambda\right)} = -\frac{\pi^2 K'\left(H(I)/\lambda\right)}{8K^3\left(H(I)/\lambda\right)}\,.$$

Тому, якщо покласти $m = m(I) := H(I)/\lambda$, дістанемо

$$v = V(I,\,\phi) := \sqrt{2m\lambda}\,\mathrm{cn}\left(\frac{2K(m)}{\pi}\phi,\ m\right).$$

Лема 1. *Нехай $m = m(I) = H(I)/\lambda < 1$, де λ визначено раніше. Тоді при всіх $\phi \in [0; 2\pi]$ справджуються нерівності*

$$\left|V'_\phi\right| \leqslant \frac{2\sqrt{2\lambda}}{\pi}K(m), \quad \left|V''_{\phi\phi}\right| \leqslant \frac{4\sqrt{2\lambda}}{\pi^2}K^2(m),$$

$$\left|V'_I\right| \leqslant \frac{3\pi}{2K(m)\sqrt{m}\,(1-m)}, \quad \left|V''_{\phi I}\right| \leqslant \frac{4}{\sqrt{m}\,(1-m)}.$$

Доведення. Позначимо $\frac{2K(m)}{\pi}\phi = x$. Тоді скориставшись формулами похідних еліптичних функцій, еліптичного інтеграла та нерівностями, наведеними в пункті 4, оцінимо похідні функції $v = V(I,\,\phi)$:

$$\left|\frac{\partial V(I,\,\phi)}{\partial\phi}\right| \leqslant \frac{2\sqrt{2m\lambda}\,K(m)}{\pi}\,\left|\mathrm{sn}(x,\,m)\,\mathrm{dn}(x,\,m)\right| \leqslant \frac{2\sqrt{2\lambda}}{\pi}K(m);$$

$$\left|\frac{\partial^2 V(I,\,\phi)}{\partial\phi^2}\right| \leqslant \sqrt{2\lambda m}\frac{4K^2(m)}{\pi^2}\left|\mathrm{dn}^2(x,\,m)-m\mathrm{sn}^2(x,\,m)\right| \leqslant \frac{4\sqrt{2\lambda}}{\pi^2}K^2(m)\,;$$

$$\left|\frac{\partial V(I,\,\phi)}{\partial I}\right| \leqslant \left|m'\right|\sqrt{\frac{\lambda}{2m}}\left|\mathrm{cn}(x,\,m)\right|+$$

$$+\sqrt{2\lambda m}\left(\left|\mathrm{cn'}_x(x,\,m)\right|\frac{2K'(m)\left|\phi\right|\left|m'\right|}{\pi}+\left|\mathrm{cn'}_m(x,\,m)\right|\left|m'\right|\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3\pi}{2K(m)\sqrt{m}(1-m)};$$

$$\frac{\partial^2 V(I,\,\phi)}{\partial I\partial\phi} = \frac{\partial}{\partial\phi}\left\{m'\sqrt{\frac{\lambda}{2m}}\mathrm{cn}(x,\,m)+\right.$$

$$\left.+\sqrt{2\lambda m}\left(\mathrm{cn'}_x(x,\,m)\frac{2K'(m)}{\pi}\phi m'+\mathrm{cn'}_m(x,\,m)\,m'\right)\right\} =$$

$$= \sqrt{m}\left[\frac{1}{2m}\mathrm{cn'}_x(x,\,m)+\frac{K'(m)}{K(m)}\mathrm{cn'}_x(x,\,m)+\right.$$

$$\left.+4\mathrm{cn''}_{xx}(x,\,m)\,K'(m)+\mathrm{cn''}_{xm}(x,\,m)\right].$$

Враховуючи оцінки з пункту 4, остаточно отримуємо

$$\left|\frac{\partial^2 V(I,\,\phi)}{\partial\phi\partial I}\right| \leqslant \sqrt{m}\left[\frac{1}{2m}+\frac{1}{2(1-m)}+\frac{4}{2(1-m)}+\frac{3}{2(1-m)}\right] =$$

$$= \frac{1+7m}{2\sqrt{m}(1-m)} \leqslant \frac{4}{\sqrt{m}(1-m)}.$$

□

Тепер легко оцінити частинні похідні функції $h(t,I,\phi;\mu)$, які фігурують в (3), використовуючи нерівності (7) і вважаючи, що $m\in[0,5;\,1)$:

$$\begin{gathered}\left|h'_I\right| \leqslant \frac{\left[231\sqrt{2\lambda}+336\right]\pi}{36\sqrt{m}(1-m)K(m)},\quad \left|h'_\phi\right| \leqslant \frac{\left[74\sqrt{2\lambda}+112\right]\sqrt{2\lambda}}{9\pi}K(m)\,,\\ \left|h''_{\phi I}\right| \leqslant \frac{21\sqrt{2\lambda}+16}{\sqrt{m}(1-m)},\quad \left|h''_{\phi\phi}\right| \leqslant K^2(m)\frac{48\lambda+16\sqrt{2\lambda}}{\pi^2}.\end{gathered} \tag{10}$$

Для застосування теореми 1 залишилося оцінити $\eta_{p/q}$. Зробимо це за допомогою функції Пуанкаре

$$P_{p/q}(\psi) := -\frac{1}{2\pi q}\int_0^{2\pi q} h'_\psi\left(t,\, I_{p/q}\,\frac{p}{q}t+\psi\right)dt = -\bar{h}'_\psi\left(I_{p/q},\,\psi\right).$$

Оскільки з наведеного нижче твердження випливає, що функція Пуанкаре відмінна від нуля лише для $p=1$, то надалі йтиметься лише про субгармоніки.

Твердження 1. *Якщо $p=1$, то функцію Пуанкаре можна подати у вигляді*

$$P_{1/q}(\psi) = \eta_{1/q}(\lambda)\sin q\psi.$$

При цьому, якщо $q \geq 2\sqrt{2}K(1/2)/(\pi\sqrt{\lambda})$, то справджуються нерівності

$$\frac{16\cdot e^{2\sqrt{2/\lambda}}}{1+e^{4\sqrt{2/\lambda}}} \leqslant \eta_{1/q}(\lambda) \leqslant \frac{24e^{\pi\sqrt{1/2\lambda}}}{e^{\pi\sqrt{2/\lambda}}-1}. \tag{11}$$

Якщо ж $p \neq 1$, то $P_{1/q}(\psi) = 0$.

Доведення. Скориставшись розвиненнями в ряд Фур'є функцій [12] $\mathrm{cn}\left(\frac{2K(m)}{\pi}\phi,\, m\right)$, $\mathrm{cn}^2\left(\frac{2K(m)}{\pi}\phi,\, m\right)$, маємо:

$$V\left(I_{p/q},\,\phi\right) = 8\,\frac{p}{q}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{{q_*}^{n+\frac{1}{2}}}{1+{q_*}^{2n+1}}\cos(2n+1)\phi,$$

$$V^2\left(I_{p/q},\,\phi\right) = A_0 + 32\frac{p^2}{q^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n{q_*}^n}{1-{q_*}^{2n}}\cos 2n\phi,$$

де A_0 – деяка стала, а

$$q_* = \exp\left(-\pi\frac{K\left(1-m\left(I_{p/q}\right)\right)}{K\left(m\left(I_{p/q}\right)\right)}\right) = \exp\left(-\frac{p}{q}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}}K\left(1-m\left(I_{p/q}\right)\right)\right).$$

Тоді

$$\bar{h}\left(I_{p/q},\,\psi\right) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\left(qs-\frac{q}{p}\psi\right)f(s)\,ds,$$

де

$$f\left(s\right):=\frac{3}{2}A_0+48\frac{p^2}{q^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n{q_*}^n}{1-{q_*}^{2n}}\,\cos 2nps+$$

$$+32\,\frac{p}{q}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q_*^{n+\frac{1}{2}}}{1+q_*^{2n+1}}\,\cos\left(2n+1\right)ps.$$

Тепер розпишемо

$$\cos\left(qs-\frac{q\psi}{p}\right)=\cos qs\cos\frac{q\psi}{p}+\sin qs\sin\frac{q\psi}{p}$$

і зауважимо, що наступні інтеграли рівні нулю:

$$\frac{1}{2\pi}\sin\frac{q\psi}{p}\int_0^{2\pi}f(s)\sin qs\,ds=0,\quad \frac{1}{2\pi}\cos\frac{q\psi}{p}\int_0^{2\pi}\frac{3}{2}A_0\cos qs\,ds=0.$$

Оскільки $q_*<1$, то відповідні ряди збіжні і можемо змінити порядок інтегрування і підсумовування:

$$\bar{h}\left(I_{p/q},\,\psi\right)=-\frac{24}{\pi}\frac{p^2}{q^2}\cos\frac{q\psi}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n{q_*}^n}{1-{q_*}^{2n}}\int_0^{2\pi}\cos qs\cos 2nps\,ds\right]-$$

$$-\frac{16}{\pi}\frac{p}{q}\cos\frac{q\psi}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{q_*^{n+\frac{1}{2}}}{1+q_*^{2n+1}}\int_0^{2\pi}\cos qs\cos\left(2n+1\right)ps\,ds\right].$$

Оскільки p і q – взаємно прості, то інтеграли під сумами будуть відмінними від нуля тільки при $p=1$ і в цьому випадку функція $\bar{h}\left(I_{1/q},\,\psi\right)$ зображується формулою

$$\bar{h}\left(I_{1/q},\,\psi\right)=\begin{cases}-\dfrac{16}{q}\dfrac{q_*^{q/2}}{1+q_*^q}\,\cos\left(q\psi\right), & q=1\,(\mathrm{mod}\,2),\\[2ex] -\dfrac{24}{q}\dfrac{q_*^{q/2}}{1-q_*^q}\,\cos\left(q\psi\right), & q=0\,(\mathrm{mod}\,2).\end{cases}$$

З огляду на означення q_*, остаточно маємо

$$\bar{h}\left(I_{1/q},\,\psi\right)=\begin{cases}-\dfrac{16}{q}\,\dfrac{\exp\left(r_*\right)}{1+\exp\left(2r_*\right)}\cos\left(q\psi\right),\ q=1\,(\mathrm{mod}\,2),\\ -\dfrac{24}{q}\,\dfrac{\exp\left(r_*\right)}{1-\exp\left(2r_*\right)}\cos\left(q\psi\right),\ q=0\,(\mathrm{mod}\,2).\end{cases}$$

де
$$r_* = -\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\, K\left(1 - m\left(I_{1/q}\right)\right).$$

Для резонансного значення змінної дії $I_{1/q}$ такого, що $H'\left(I_{1/q}\right) = 1/q$, виконується умова
$$K\left(m\left(I_{1/q}\right)\right) = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{2}}q. \tag{12}$$

А з урахуванням обмеження знизу на q, яке фігурує в умові леми, справджується нерівність
$$1/2 \leqslant m\left(I_{1/q}\right) < 1.$$

Зауважимо, що при $m \in [0,5;\, 1)$ кожна з функцій $K(m)\sqrt{m}(1-m)$, $K^3(m)(1-m)$, $\sqrt{m}(1-m)$ монотонно спадає до нуля, причому $\frac{\pi}{2} < K(1-m) < 2$. Тому ми можемо ввести відповідним чином послідовність $\theta_{1/q}\left(\lambda\right)$, щоб подати функцію $\bar{h}(I_{1/q}, \psi)$ у вигляді
$$\bar{h}\left(I_{1/q},\, \psi\right) = -\frac{\theta_{1/q}\left(\lambda\right)}{q}\cos q\psi.$$

Неважко бачити, що
$$\frac{16e^{2\sqrt{2/\lambda}}}{1 + e^{4\sqrt{2/\lambda}}} \leqslant \theta_{1/q} \leqslant \frac{24e^{\pi\sqrt{1/2\lambda}}}{e^{\pi\sqrt{2/\lambda}} - 1}.$$

Отже, функція Пуанкаре має вигляд $P_{1/q}\left(\psi\right) = \theta_{1/q}\left(\lambda\right)\sin q\psi$ і, таким чином, $\eta_{1/q}\left(\lambda\right) = \theta_{1/q}\left(\lambda\right)$. □

Тепер покажемо, як можна вибрати число $\delta_{1/q}$, яке фігурує в умовах теореми 1. На певний час замість раціональної частоти $1/q$ незбуреної субгармоніки розглядатимемо додатне число ω з області значень функції $H'(I)$. Через I_ω позначимо таке значення дії, що $H'\left(I_\omega\right) = \omega$.

Лема 2. *Нехай $0 < \omega < \frac{\pi\sqrt{\lambda}}{4\sqrt{2}K(1/2)}$. Покладемо $\delta_\omega := \frac{\lambda}{2\omega}\left(1 - m_\omega\right)$, де $m_\omega := m(I_\omega) := H(I_\omega)/\lambda$. Тоді проміжок $[I_\omega - \delta_\omega, I_\omega + \delta_\omega]$ належить області визначення функції $H(I)$.*

Доведення. Насамперед зауважимо, що для будь-якого числа ω, яке задовольняє умову леми, число 2ω належить області значень функції $H'(I)$ і при цьому $m(I_{2\omega}) > 1/2$.

Згідно розвинення 17.3.33 [13], якщо $1/2 \leqslant m' \leqslant m'' < 1$, то, як неважко перевірити,

$$K(m'') - K(m') \leqslant \frac{3}{5}\ln\frac{1-m'}{1-m''} + 6\cdot 10^{-5}.$$

Тоді

$$\frac{1-m'}{1-m''} \geqslant \exp\left[\frac{5}{3}(K(m'') - K(m')) - 10^{-4}\right]. \tag{13}$$

Далі покладемо $\omega'' = \omega/(1+\xi\omega)$, $\omega' = \omega/(1-\xi\omega)$, $\xi > 0$, де ξ – додатне число, для якого $\xi\omega < 1/2$, і, отже, $2\omega/3 < \omega'' < \omega < \omega' < 2\omega$. Очевидно, що $I_{\omega'} < I_\omega < I_{\omega''}$. З (12) та з оцінки (13) маємо

$$\frac{1-m_\omega}{1-m_{\omega''}} \geqslant \exp\left[\frac{5\pi\sqrt{\lambda}}{6\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\omega''} - \frac{1}{\omega}\right) - 10^{-4}\right],$$

$$\frac{1-m_{\omega'}}{1-m_\omega} \geqslant \exp\left[\frac{5\pi\sqrt{\lambda}}{6\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'}\right) - 10^{-4}\right].$$

Якщо покласти $\xi = 6\sqrt{2}\left(\ln 2 + 10^{-4}\right)/(5\pi\sqrt{\lambda})$, то неважко перевірити, що нерівність $\xi\omega < 1/2$ є наслідком обмеження на ω в умові леми. Тоді

$$\begin{aligned}\frac{1-m_\omega}{1-m_{\omega''}} &\geqslant \exp\left[\frac{5\pi\sqrt{\lambda}}{6\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\omega''} - \frac{1}{\omega}\right) - 10^{-4}\right] = 2,\\ \frac{1-m_{\omega'}}{1-m_\omega} &\geqslant \exp\left[\frac{5\pi\sqrt{\lambda}}{6\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'}\right) - 10^{-4}\right] = 2.\end{aligned} \tag{14}$$

З нерівності $\omega_1\left(I_{\omega_1} - I_{\omega_2}\right) \leqslant H\left(I_{\omega_1}\right) - H\left(I_{\omega_2}\right) \leqslant \omega_2\left(I_{\omega_1} - I_{\omega_2}\right)$, яка справджується для довільних $\omega_1 \leq \omega_2$ з області значень $H'(I)$, випливає

$$\omega''\left(I_{\omega''} - I_\omega\right) \leqslant \lambda\left(m_{\omega''} - m_\omega\right) \leqslant \omega\left(I_{\omega''} - I_\omega\right),$$
$$\omega\left(I_\omega - I_{\omega'}\right) \leqslant \lambda\left(m_\omega - m_{\omega'}\right) \leqslant \omega'\left(I_\omega - I_{\omega'}\right).$$

Звідси з урахуванням (14) дістанемо нерівності

$$\left(I_{\omega''} - I_\omega\right) \geqslant \frac{\lambda}{\omega}\left(m_{\omega''} - m_\omega\right) = \frac{\lambda}{\omega}\left(1 - m_\omega - \left(1 - m_{\omega''}\right)\right) \geqslant \frac{\lambda}{2\omega}\left(1 - m_\omega\right),$$

$$\left(I_\omega - I_{\omega'}\right) \geqslant \frac{\lambda}{\omega'}\left(m_\omega - m_{\omega'}\right) = \frac{\lambda}{\omega'}\left(1 - m_{\omega'} - \left(1 - m_\omega\right)\right) \geqslant \frac{\lambda}{2\omega}\left(1 - m_\omega\right).$$

Отже, визначене у формулюванні леми число δ_ω має властивість $[I_\omega - \delta_\omega, I_\omega + \delta_\omega] \subset [I_{\omega'}, I_{\omega''}]$. □

Якщо $I-\delta_\omega \leqslant I \leqslant I+\delta_\omega$, то виконуються наступні нерівності

$$1-m\left(I\right)\leqslant 1-m_\omega+m_\omega-m\left(I_\omega-\delta_\omega\right)\leqslant 1-m_\omega+\frac{\omega'\delta_\omega}{\lambda}\leqslant 2\left(1-m_\omega\right), \quad (15)$$

$$1-m\left(I\right)\geqslant 1-m_\omega+m_\omega-m\left(I_\omega+\delta_\omega\right)\geqslant 1-m_\omega-\frac{\omega\delta_\omega}{\lambda}=\frac{1}{2}\left(1-m_\omega\right). \quad (16)$$

Використавши (15), (16), дістанемо оцінки для частинних похідних функції $h(t,I,\phi;\mu)$, які фігурують в теоремі 1 пункту 2. Насамперед зауважимо, що

$$\frac{\pi^2}{24K^3(m(I))(1-m(I))}\leqslant \left|H''(I)\right|=\frac{\pi^2K'(m(I))}{8K^3(m(I))}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\pi^2}{16K^3(m(I))(1-m(I))}.$$

Враховуючи те, що функція $K^3(m)(1-m)$ монотонно спадна на $(0;1)$ та нерівність (15), одержуємо

$$\left|H''\right|^{+}_{\omega}\leqslant\frac{\pi^2}{16K^3\left(m\left(I_\omega+\delta_\omega\right)\right)\left(1-m\left(I_\omega+\delta_\omega\right)\right)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\pi^2}{8K^3\left(m\left(I_\omega\right)\right)\left(1-m\left(I_\omega\right)\right)}.$$

З (9) маємо

$$K(m_\omega)=\frac{\pi\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{2}\omega}. \quad (17)$$

Отже,

$$\left|H''\right|^{+}_{\omega}\leqslant\frac{2\sqrt{2}\omega^3}{\pi\lambda^{3/2}(1-m_\omega)}.$$

Аналогічно

$$\left|H''\right|^{-}_{\omega}\geqslant\frac{\pi^2}{24K^3\left(m\left(I_\omega-\delta_\omega\right)\right)\left(1-m\left(I_\omega-\delta_\omega\right)\right)}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\pi^2}{48K^3\left(m_\omega\right)\left(1-m_\omega\right)}\geqslant\frac{\sqrt{2}\omega^3}{3\pi\lambda^{3/2}\left(1-m_\omega\right)}.$$

Далі для оцінки (10) використовуємо, що $m \in [0,5;\,1)$, оцінку (17) та нерівність (15). Знаходимо:

$$\left|h'_I\right|_\omega \leqslant \frac{\left[231\sqrt{2\lambda}+336\right]\pi}{36\sqrt{1/2}\left(1-m\left(I_\omega+\delta_\omega\right)\right)K\left(m\left(I_\omega+\delta_\omega\right)\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\sqrt{2}\left[231\sqrt{2\lambda}+336\right]\pi}{36\left(1-m_\omega\right)K\left(m_\omega\right)} \leqslant \frac{c_1\left(\lambda\right)\omega}{\left(1-m_\omega\right)},$$

$$\left|h'_\phi\right|_\omega \leqslant \frac{\left[74\sqrt{2\lambda}+112\right]\sqrt{2\lambda}}{9\pi}K\left(m_{\omega''}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\left[74\sqrt{2\lambda}+112\right]\sqrt{2\lambda}}{9\pi}\frac{\pi\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{2}\omega}\frac{3}{2} \leqslant \frac{c_2\left(\lambda\right)}{\omega},$$

$$\left|h''_{\phi I}\right|_\omega \leqslant \frac{21\sqrt{2\lambda}+16}{\sqrt{1/2}\left(1-m\left(I_\omega+\delta_\omega\right)\right)} \leqslant \frac{\left[21\sqrt{2\lambda}+16\right]2\sqrt{2}}{\left(1-m_\omega\right)} = \frac{c_3\left(\lambda\right)}{1-m_\omega},$$

$$\left|h''_{\phi\phi}\right|_\omega \leqslant K^2\left(m_{\omega''}\right)\frac{48\lambda+16\sqrt{2\lambda}}{\pi^2} \leqslant \frac{c_4\left(\lambda\right)}{\omega^2},$$

де

$$c_1\left(\lambda\right) = \frac{4\left[231\sqrt{2\lambda}+336\right]}{19\sqrt{\lambda}}, \quad c_2\left(\lambda\right) = \frac{\left[37\sqrt{2\lambda}+66\right]\lambda}{6},$$

$$c_3\left(\lambda\right) = 84\sqrt{\lambda}+32\sqrt{2}, \quad c_4\left(\lambda\right) = \frac{\left[27\lambda^2+54\lambda\sqrt{2\lambda}\right]}{2}.$$

Тепер легко вказати такі незалежні від ω додатні $c_5\left(\lambda\right)$, $c_6\left(\lambda\right)$, що величини (4), (5) задовольнятимуть нерівності

$$\nu_\omega = \frac{2\pi}{\omega}\left[\frac{\left|H''\right|^+_\omega}{\left|H''\right|^-_\omega}+1\right]\left|h'_\phi\right|_\omega + \frac{\left|\Psi\right|_\omega}{\left|H''\right|^-_\omega} \leqslant \frac{c_5\left(\lambda\right)}{\omega^2},$$

$$\kappa_\omega := \left[\frac{2\pi}{\omega}\left|H''\right|^-_\omega\,\left|h''_{\varphi\varphi}\right|_\omega + \left|h''_{\varphi I}\right|_\omega\right]\nu_\omega + \frac{2\pi}{\omega}\left|h''_{\varphi\varphi}\right|_\omega\left|h'_I\right|_\omega \leqslant \frac{c_6\left(\lambda\right)}{\omega^2\left(1-m_\omega\right)},$$

а саме, можна покласти

$$c_5\left(\lambda\right) = 14\pi c_2\left(\lambda\right) + \frac{3\pi\lambda^{3/2}c_1\left(\lambda\right)}{\sqrt{2}},$$

$$c_6\left(\lambda\right) = \frac{2\sqrt{2}c_4\left(\lambda\right)c_5\left(\lambda\right)}{3\lambda^{3/2}} + c_3\left(\lambda\right)c_5\left(\lambda\right) + 2\pi c_4\left(\lambda\right)c_1\left(\lambda\right).$$

Отже, при $\omega = 1/q$ для виконання нерівності (6) з теореми 1 достатньо, щоб

$$\min\left\{\frac{\lambda}{2\omega c_5(\lambda)},\ \frac{\theta_\omega}{c_6(\lambda)}\right\}(1-m_\omega)\,\omega^2 > \mu^2.$$

Використаємо оцінку (11) для θ_ω і також візьмемо до уваги умову, яку було накладено на ω в лемі 2. Тоді, поклавши

$$c(\lambda) = \min\left\{\frac{2\sqrt{2\lambda}K(1/2)}{\pi\cdot c_5(\lambda)},\ \frac{16\cdot e^{2\sqrt{2/\lambda}}}{c_6(\lambda)\left(1+e^{4\sqrt{2/\lambda}}\right)}\right\},$$

з нерівності $(1-m_\omega)\omega^2 > \mu^2/c(\lambda)$ дістаємо співвідношення

$$\ln\frac{1}{1-m_\omega} - 2\ln\omega < \ln\frac{c(\lambda)}{\mu^2}.$$

Врахувавши нерівність $-\ln(1-m) \leqslant 2K(m) - 8/3$, яка випливає з розвинення 17.3.33 [13], дістаємо умову:

$$\frac{\pi\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}\omega} - 2\mathrm{ln}\omega < \mathrm{ln}\frac{c(\lambda)}{\mu^2}.$$

У нашому випадку $\omega = 1/q$, а отже

$$\frac{\pi\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}}q + 2\ln q < \ln\frac{c(\lambda)}{\mu^2} + \frac{8}{3}.$$

Визначимо функцію $Q(\mu;\lambda)$ як корінь відносно x рівняння

$$\frac{\pi\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}}x + 2\ln x = \ln\frac{c(\lambda)}{\mu^2} + \frac{8}{3}, \quad x \geqslant 1. \tag{18}$$

Неважко бачити що ця функція має асимптотику

$$Q(\mu;\lambda) \sim \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\lambda}}\ln\frac{1}{\mu^2},\ \ \mu \to 0.$$

Підсумком наведених вище міркувань є такий результат.

Теорема 2. *У випадку 1 для кожного μ такого, що*

$$Q(\mu;\,\lambda) > \frac{4\sqrt{2\lambda}K(1/2)}{\pi},$$

і для кожного натурального q, яке задовольняє умову

$$\frac{4\sqrt{2\lambda}K(1/2)}{\pi} < q < Q(\mu,\, \lambda)\,,$$

існує $2q$ збурених субгармонік періоду $2\pi q$.

Зауважимо, що оскільки $\ln q < 3q/8$ при $q \geqslant 1$, то

$$Q(\mu;\lambda) > \left(\frac{4\sqrt{2}}{4\pi\sqrt{\lambda}+3\sqrt{2}}\right)\left(\ln\frac{c(\lambda)}{\mu^2}+\frac{8}{3}\right).$$

Випадок 2. Розглянемо збурену систему в області $D_2 := \{(u,\, v) : H(u,\, v) > \lambda\}$. Тепер відповідні періодичні розв'язки описують синхронізовані обертання супутника.

В області D_2 твірна функція переходу до змінних "дія-кут" має вигляд

$$S(I,\, u) = \int\limits_0^u \sqrt{2\left(z - \lambda \sin^2\frac{\theta}{2}\right)}d\theta.$$

Тоді змінну дії вводимо за формулою

$$I = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2\left(z - \lambda \sin^2\frac{\theta}{2}\right)}d\theta. \tag{19}$$

Якщо позначити $\Pi_{2\pi}(z) = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2\left(z - \lambda \sin^2\frac{\theta}{2}\right)}\,d\theta$, то

$$H(I) = \Pi_{2\pi}^{-1}(2\pi I)\,. \tag{20}$$

Кутову змінну вводимо наступним чином

$$\phi = \frac{\partial S}{\partial I} = \frac{\partial}{\partial I}\int\limits_0^u \sqrt{2\left(z - \lambda \sin^2\frac{s}{2}\right)}ds = \frac{dz}{dI}\int\limits_0^u \frac{ds}{\sqrt{2z - \lambda \sin^2\frac{s}{2}}}$$

або

$$\phi = H'(I)\sqrt{\frac{2}{z}}\int\limits_0^{u/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{\lambda}{z}\sin^2\theta}}.$$

Звідси визначаємо обернену функцію $u = U(I,\,\phi)$ і знаходимо вираз координати v у змінних "дія-кут":

$$v = \frac{\partial S(I,\,u)}{\partial u}|_{u=U(I,\,\phi)} = \sqrt{2\left(z - \lambda \sin^2\frac{u}{2}\right)}|_{u=U(I,\,\phi)} =: V(I,\,\phi)\,.$$

Отже,

$$u = 2\mathrm{am}\left(\sqrt{\tfrac{H(I)}{2}}\,\tfrac{\phi}{H'(I)},\,\tfrac{\lambda}{H(I)}\right),\; v = \sqrt{2H(I)}\;\mathrm{dn}\left(\sqrt{\tfrac{H(I)}{2}}\,\tfrac{\phi}{H'(I)},\,\tfrac{\lambda}{H(I)}\right).$$

Зауважимо, що еліптична функція $\mathrm{dn}(x,m)$ має дійсний період $2K(m)$, а тому

$$\sqrt{\frac{H(I)}{2}}\frac{\pi}{H'(I)} = K\left(\frac{\lambda}{H(I)}\right).$$

Поклавши $m = m(I) := \lambda/H(I)$, дістанемо

$$v = V(I,\,\phi) := \sqrt{\frac{2\lambda}{m}}\,\mathrm{dn}\left(\frac{K(m)}{\pi}\phi,\,m\right).$$

Добре відомо, що функція $U(I,\phi) - \phi$ має період 2π. Таким чином, ми будемо отримувати розв'язки u у вигляді суми лінійної функції $(p/q)t$ і $2\pi q$-періодичної функції, якщо шукатимемо $2\pi q$-періодичні розв'язки системи з гамільтоніаном

$$H = H(I) + \mu^2 h(t,\,I,\,\phi;\,\mu)\,, \quad \mu := \sqrt{\varepsilon},$$

де $H(I)$ визначається формулою (20), а

$$h(t,\,I,\,\phi;\,\mu) = H(I)\cos t -$$
$$-\left(\frac{3}{2}\cos t - \mu^2\eta\left(t,\,\mu^2\right)\right)V^2(I,\,\phi) - 4\left(\cos t - \mu^2\eta\left(t,\mu^2\right)\right)V(I,\phi)\,.$$

Скориставшись формулами похідних еліптичних функцій та нерівностями, наведеними в пункті 4, легко дістанемо оцінки для похідних функції $h(t,I,\phi;\mu)$, які фігурують в (3), вважаючи, що $m \in [0,5;\,1)$:

$$\left|h'_I\right| \leqslant \frac{\left[93\sqrt{2\lambda}+140\right]\pi}{\sqrt{m}\,(1-m)\,K(m)}, \quad \left|h'_\phi\right| \leqslant \frac{74\lambda + 56\sqrt{2\lambda}}{9\pi}K(m)\,,$$

$$\left|h''_{\phi I}\right| \leqslant \frac{33\sqrt{2\lambda}+24}{2\,(1-m)}, \quad \left|h''_{\phi\phi}\right| \leqslant K^2(m)\,\frac{12\lambda + 4\sqrt{2\lambda}}{\pi^2}.$$

Для застосування теореми 1 з пункту 2 оцінимо $\eta_{p/q}$.

Твердження 2. *Якщо* $p = 1$, *то функцію Пуанкаре можна подати у вигляді* $P_{1/q}(\psi) = \eta_{1/q}(\lambda) \sin q\psi$. *При цьому, якщо* $q \geq K(1/2)/(\pi\sqrt{\lambda})$, *то справджуються нерівності*

$$\theta_* (\lambda) \leqslant \theta_{1/q} (\lambda) \leqslant \theta^* (\lambda) , \tag{21}$$

де $\theta_* (\lambda)$, $\theta^* (\lambda)$ *– деякі додатні числа, які визначаються в процесі доведення. Якщо ж* $p \neq 1$, *то* $P_{1/q}(\psi) = 0$.

Доведення. Скориставшись розвиненнями в ряд Фур'є функцій $\mathrm{dn}\left(\frac{K(m)}{\pi}\phi,\, m\right)$, $\mathrm{dn}^2\left(\frac{K(m)}{\pi}\phi,\, m\right)$, дістанемо

$$V\left(I_{p/q},\, \phi\right) = \frac{p}{q} + 4\frac{p}{q}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{{q_*}^n}{1 + {q_*}^{2n}} \cos 2n\phi,$$

$$V^2\left(I_{p/q},\, \phi\right) = A_0 + 8\frac{p^2}{q^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n{q_*}^n}{1 - {q_*}^{2n}} \cos n\phi,$$

де A_0 – деяка стала, а

$$q_* = \exp\left(-\pi\frac{K\left(1 - m\left(I_{p/q}\right)\right)}{K\left(m\left(I_{p/q}\right)\right)}\right) = \exp\left(-\frac{p}{q}\,\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}}K\left(1 - m\left(I_{p/q}\right)\right)\right).$$

З урахуванням того, що p і q – взаємно прості, функція $\bar{h}\left(I_{p/q},\, \psi\right)$ буде відмінна від 0 лише при $p = 1$ і в цьому випадку зображується формулою

$$\bar{h}\left(I_{1/q},\, \psi\right) = \begin{cases} -\dfrac{6}{q}\,\dfrac{\exp\left(2r_*\right)}{1 - \exp\left(4r_*\right)}\cos\left(q\psi\right),\ q = 1 \,(\mathrm{mod}\ 2), \\ -\dfrac{8}{q}\,\dfrac{\exp\left(r_*\right)}{1 + \exp\left(2r_*\right)}\cos\left(q\psi\right),\ q = 0 \,(\mathrm{mod}\ 2). \end{cases}$$

де

$$r_* = -\sqrt{2m\left(I_{1/q}\right)}K\left(1 - m\left(I_{1/q}\right)\right)\Big/\left(2\sqrt{\lambda}\right).$$

Позначимо через $I_{1/q}$ резонансне значення змінної дії, для якого $H'\left(I_{1/q}\right) = 1/q$, що еквівалентно умові

$$K\left(m_{1/q}\right) = \pi q\sqrt{\frac{\lambda}{2m\left(I_{1/q}\right)}},$$

де $m_{1/q} := m\left(I_{1/q}\right)$.

Обмеження на q знизу в умові твердження має наслідком нерівність $m_{1/q} \geq 1/2$. Зауважимо, що $\frac{\pi}{2} < K(1-m) < 2$ для всіх $m \in [0,5;\, 1)$. Тому ми можемо ввести відповідним чином послідовність $\theta_{1/q}\left(\lambda\right)$, щоб подати функцію $\bar{h}(I_{1/q}, \psi)$ у вигляді

$$\bar{h}\left(I_{1/q},\, \psi\right) = -\frac{\theta_{1/q}\left(\lambda\right)}{q}\cos q\psi.$$

Можна показати, що $\theta_*(\lambda) \leq \theta_{1/q}(\lambda) \leq \theta^*(\lambda)$, де

$$\theta^*(\lambda) := \max\left\{\frac{6\exp\left(K(1/2)/\sqrt{\lambda}\right)}{\exp\left(2K(1/2)/\sqrt{\lambda}\right)-1}, \frac{8\exp\left(K(1/2)/\sqrt{4\lambda}\right)}{\exp\left(K(1/2)/\sqrt{\lambda}\right)+1}\right\},$$

$$\theta_*(\lambda) := \min\left\{\frac{6\exp\left(\pi/\sqrt{2\lambda}\right)}{\exp\left(2\pi/\sqrt{2\lambda}\right)-1}, \frac{8\exp\left(\pi/\sqrt{8\lambda}\right)}{\exp\left(\pi/\sqrt{2\lambda}\right)+1}\right\}.$$

Отже, функція Пуанкаре має вигляд $P_{1/q}\left(\psi\right) = \theta_{1/q}\left(\lambda\right)\sin q\psi$ і, таким чином, $\eta_{1/q}\left(\lambda\right) = \theta_{1/q}\left(\lambda\right)$. □

Тепер виберемо δ_ω, як у лемі 2, тобто покладемо $\delta_\omega = \frac{\lambda}{2\omega}\left(1-m_\omega\right)$, однак тепер $m_\omega := m\left(I_\omega\right) := \lambda/H(I_\omega)$. Можна показати, що у випадку 2 аналог цієї леми має місце при обмеженні

$$\omega \leq \frac{\pi\sqrt{\lambda}}{2K(1/2)}. \tag{22}$$

Аналогічно знаходимо оцінки для величин (4), (5):

$$\nu_\omega \leqslant \frac{\tilde{c}_5\left(\lambda\right)}{\omega^2}, \qquad \kappa_{p/q} \leqslant \frac{\tilde{c}_6\left(\lambda\right)}{\omega^2\left(1-m_\omega\right)},$$

де

$$\tilde{c}_5\left(\lambda\right) = \left[12\sqrt{2}+2\right]\pi\tilde{c}_2\left(\lambda\right) + 12\pi\lambda^{3/2}\tilde{c}_1\left(\lambda\right),$$

$$\tilde{c}_6\left(\lambda\right) = \frac{\tilde{c}_4\left(\lambda\right)\tilde{c}_5\left(\lambda\right)}{6\lambda^{3/2}} + \tilde{c}_3\left(\lambda\right)\tilde{c}_5\left(\lambda\right) + 2\pi\tilde{c}_4\left(\lambda\right)\tilde{c}_1\left(\lambda\right),$$

а $\tilde{c}_1\left(\lambda\right),\ \tilde{c}_2\left(\lambda\right),\ \tilde{c}_3\left(\lambda\right),\ \tilde{c}_4\left(\lambda\right)$ — аналоги відповідних констант випадку 1, які фігурують в оцінках норм функцій з (3).

Отже, нерівність (6) з теореми 1 набуває вигляду:

$$\min\left\{\frac{\lambda}{2\omega\tilde{c}_5(\lambda)},\ \frac{\theta_\omega}{\tilde{c}_6(\lambda)}\right\}(1-m_\omega)\,\omega^2>\mu^2.$$

Використаємо для θ_ω оцінку (21), а також умову (22). Тоді маємо

$$\min\left\{\frac{\sqrt{\lambda}K(1/2)}{\pi\tilde{c}_5(\lambda)},\ \frac{\theta_*}{\tilde{c}_6(\lambda)}\right\}=\tilde{c}\,(\lambda)\,,$$

а отже,

$$(1-m_\omega)\omega^2>\frac{\mu^2}{\tilde{c}(\lambda)},\quad \ln\frac{1}{1-m_\omega}-2\ln\omega<\ln\frac{\tilde{c}(\lambda)}{\mu^2}.$$

Визначимо тепер $\tilde{Q}(\mu;\lambda)$ з рівняння (18), в якому $c(\lambda)$ замінено на $\tilde{c}(\lambda)$. Подальші міркування, які повністю аналогічні попередньому випадку, приводять до такого результату.

Теорема 3. *У випадку 2 для кожного μ, що виконується нерівність $\tilde{Q}\,(\mu;\,\lambda)>2K(1/2)/(\pi\sqrt{\lambda})$ і для кожного натурального q, яке задовольняє умову*

$$\frac{2K(1/2)}{\pi\sqrt{\lambda}}<q<\tilde{Q}\,(\mu,\,\lambda)\,,$$

існує $2q$ субгармонік періоду $2\pi q$.

4 Допоміжні оцінки еліптичних функцій

Формули похідних еліптичних функцій $\mathrm{sn}(x,\,m)$, $\mathrm{cn}(x,\,m)$, $\mathrm{dn}(x,\,m)$ за змінною x загальновідомі [13]. Наведемо декілька оцінок похідних цих функцій за змінною m та мішаних похідних. Здиференціювавши тотожність

$$x=\int\limits_0^{\mathrm{sn}(x,m)}\frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)\,(1-ms^2)}}$$

за змінною m, знайдемо $\frac{\partial\mathrm{sn}(x,\,m)}{\partial m}$ і оцінимо цю похідну:

$$\left|\frac{\partial\,\mathrm{sn}\,(x,\,m)}{\partial m}\right|=\left|\mathrm{cn}\,(x,\,m)\right|\,\left|\mathrm{dn}\,(x,\,m)\right|\int\limits_0^{\mathrm{sn}(x,\,m)}\frac{s^2ds}{2\sqrt{1-s^2}(1-ms^2)^{3/2}}\leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^1 \frac{sds}{2\sqrt{1-s^2}(1-ms^2)^{3/2}} = \frac{1}{2\,(1-m)}.$$

Аналогічно з

$$x = \int\limits_1^{\mathrm{cn}(x,m)} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)\,(1-m\,(1-s^2))}}$$

дістаємо оцінку

$$\left|\frac{\partial \mathrm{cn}\,(x,\,m)}{\partial m}\right| = \frac{1}{2}\,|\mathrm{sn}\,(x,\,m)|\,\,|\mathrm{dn}\,(x,\,m)|\int\limits_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-s^2}ds}{(1-m+ms^2)^{3/2}} \leqslant$$

$$\leq \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^1 \frac{ds}{(1-m+ms^2)^{3/2}} = \frac{1}{1-m}.$$

Нарешті, з рівності $\mathrm{dn}\,(x,\,m) = \sqrt{1-m\,\mathrm{sn}^2\,(x,\,m)}$ знаходимо

$$\frac{\partial\,\mathrm{dn}\,(x,\,m)}{\partial m} = \frac{-\mathrm{sn}^2\,(x,\,m) - 2m\mathrm{sn}\,(x,\,m)\,\mathrm{sn'}_m\,(x,\,m)}{2\sqrt{1-m\mathrm{sn}^2\,(x,\,m)}}.$$

Відомо [14], що $\sqrt{1-m} < |\mathrm{dn}\,(x,\,m)| < 1$. Тоді

$$\left|\frac{\partial\,\mathrm{dn}\,(x,\,m)}{\partial m}\right| \leqslant \frac{\left|\mathrm{sn}^2\,(x,\,m)\right|}{2\,|\mathrm{dn}\,(x,\,m)|} + \int\limits_0^1 \frac{sds}{2\sqrt{1-s}(1-ms^2)^{3/2}}\times$$

$$\times\frac{2m\,|\mathrm{sn}\,(x,\,m)|\,|\mathrm{cn}\,(x,\,m)|\,|\mathrm{dn}\,(x,\,m)|}{2\,|\mathrm{dn}\,(x,\,m)|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\,|\mathrm{dn}\,(x,\,m)|} + \frac{m}{2\,(1-m)} = \frac{\sqrt{1-m}+m}{2\,(1-m)} < \frac{1}{1-m}.$$

Знайдемо оцінки мішаних похідних

$$\left|\frac{\partial^2 \mathrm{cn}\,(x,\,m)}{\partial x \partial m}\right| = \left|\frac{\partial \mathrm{sn}\,(x,\,m)}{\partial m}\right|\,|\mathrm{dn}\,(x,\,m)| +$$

$$+\,|\mathrm{sn}\,(x,\,m)|\left|\frac{\partial\,\mathrm{dn}\,(x,\,m)}{\partial m}\right| \leqslant \frac{3}{2\,(1-m)}.$$

Аналогічно, оскільки

$$\frac{\partial\,\mathrm{dn}\,(x,\,m)}{\partial x} = -m\mathrm{sn}\,(x,\,m)\,\mathrm{cn}\,(x,\,m)\,,$$

тоді

$$\left|\frac{\partial^2 \operatorname{dn}(x,\, m)}{\partial x \partial m}\right| = |\operatorname{sn}(x,\, m)|\, |\operatorname{cn}(x,\, m)| +$$

$$+m\left|\frac{\partial \operatorname{sn}(x,\, m)}{\partial m}\right| |\operatorname{cn}(x,\, m)| + m\, |\operatorname{sn}(x,\, m)| \left|\frac{\partial \operatorname{cn}(x,\, m)}{\partial m}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \frac{m}{2\,(1-m)} + \frac{m}{(1-m)} \leqslant \frac{3}{2\,(1-m)}.$$

Легко бачити також, що

$$\left|\frac{\partial^2 \operatorname{cn}(x,\, m)}{\partial x^2}\right| \leqslant 1, \quad \left|\frac{\partial^2 \operatorname{dn}(x,\, m)}{\partial x^2}\right| \leqslant m.$$

Для похідних повного еліптичного інтеграла

$$K\,(m) := \int\limits_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-ms^2)\,(1-s^2)}}$$

справджуються оцінки:

$$\frac{dK\,(m)}{dm} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{s^2 dt}{\sqrt{1-s^2}\,(1-ms^2)^{3/2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{sds}{\sqrt{1-s^2}\,(1-ms^2)^{3/2}} = \frac{1}{2\,(1-m)},$$

$$\frac{dK\,(m)}{dm} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{s^2 dt}{\sqrt{1-s^2}\,(1-ms^2)^{3/2}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{s^2 ds}{\sqrt{1-s^3}\,(1-ms^3)^{3/2}} = \frac{1}{3\,(1-m)}.$$

5 Висновки

В роботі досліджено задачу про кількість субгармонік у збуреній системі. З отриманих результатів, враховуючи асиптотичну поведінку функцій $Q(\mu;\lambda)$, $\tilde{Q}(\mu;\lambda)$, випливає, що при прямуванні малого параметра збурення ε до нуля число збурених субгармонік системи зростатиме не повільніше, ніж $O\left(\ln^2(1/\varepsilon)\right)$. Ця оцінка справедлива як для випадку, коли періодичні розв'язки описують синхронізовані обертання супутника, так і для випадку, коли супутник коливається відносно своєї осі, але не здійснює повних обертів.

[1] *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. – М.: Наука, 1965. – 416 с.

[2] *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. – М.: Изд-во Московск. ун-та, 1975. – 308 с.

[3] *Брюно А. Д.* Ограниченная задача трех тел. Плоские периодические орбиты. – М.: Наука, 1990. – 296 с.

[4] *Чуркина Т. Е.* Об устойчивости движения спутника на эллиптической орбите в случае цилиндрической прецессии // Математическое моделирование. – 2004. – **16**, №7. – С. 3–5.

[5] *Брюно А.Д., Петрович В.Ю.* Вычисление периодических колебаний спутника // Математическое моделирование. – 1997. – **9**, №6. – С. 82–94.

[6] *Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Явление буферности в системах, близких к двумерным гамильтоновым// Труды Ин-та матем. и мех. УРО РАН. – 2006. – **12**, №1. – С. 109–141.

[7] *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1989. – 472 с.

[8] *Берштейн И., Халанай А.* Индекс особой точки существования периодических решений систем с малым параметром // Докл. АН СССР. – 1956. – **111**, №5. – С. 923–925.

[9] *Красносельский М.А., Перов А.И.* Об одном припципе существования ограниченных, периодических и почти-периодических решений у системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. – 1958. – **123**, №2. – С. 235–238.

[10] *Самойленко А.М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, №4. – С. 82–93.

[11] *Buica A., Llibre J.* Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree // Bull. Sci. Math. – 2004. – **128**. – P. 7–22.

[12] *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. Ч.2: Трансцендентные функции. – М.: Физматгиз, 1963. – 516 с.

[13] Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М.Абрамовица, И.Стигана – М.: Наука, 1979. – 832 с.

[14] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. – М.: Наука, 1967. – 300 с.

ESTIMATION OF QUANTITY OF PERTURBED SUBHARMONICS IN THE PROBLEM OF PLAIN MOTION OF CELESTIAL BODY ON ELLIPTIC ORBIT

Yuliya VAKAL

Kyiv National Taras Shevchenko University
60, Volodymyrska Str., Kyiv 01601
e-mail: iuliia.vakal@gmail.com

We consider a mechanical system which describes plain motion of a celestial body about its mass centre on an elliptic orbit around the attracting centre. It is shown that the number of subharmonics in the perturbed system is estimated from below by a function which is proportional to square of logarithm of orbit's eccentricity when this parameter tends to zero.