ІНВАРІАНТНІСТЬ РІВНЯНЬ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ ВІДНОСНО КОНФОРМНОЇ АЛГЕБРИ

©2010 р. Людмила БЛАЖКО

Полтавський національний технічний університет
імені Юрія Кондратюка,
Першотравневий проспект, 24, Полтава 36011

Редакція отримала статтю 21 вересня 2010 р.

Описано всеможливі зображення алгебр Пуанкаре та конформної алгебри, відносно яких інваріантні рівняння, які є нелінійними узагальненями рівнянь електродинаміки. Одержані результати класифікації застосовано для опису класів рівнянь, інваріантних відносно даних алгебр.

1 Вступ

При описанні процесів електродинаміки використовується рівняння

$$\Pi_\mu \Pi^\mu u = 0, \tag{1}$$

де $\Pi_\mu = \partial_\mu - eA^\mu$, e — стала, $A^\mu = A^\mu(x), u = u(x)$ — довільні гладкі функції, $x = x(x_0, x_1, x_2, x_3)$, $\mu = \overline{0,3}$. Підняття та опускання індексу здійснюється за допомогою метричного тензору $g^{\mu\nu}$. Таким чином рівняння (1) має вигляд

$$\Box u - 2eA^\mu u^\mu - eu\partial^\mu A^\mu + e^2 u A_\mu A^\mu = 0. \tag{2}$$

УДК 517.9:519.46, MSC 2000: 58J70, 35A30

Максимальна алгебра інваріантності рівняння (2) є алгебра

$$\begin{aligned}&\partial_\mu, \quad I_{\mu\nu} = x_\mu \partial^\nu - x_\nu \partial^\mu + S_{\mu\nu}, \quad D = x_\mu \partial_\mu - A^\mu \partial_{A^\mu},\\ &K_\mu = 2x_\mu D - x^2 \partial^\mu + 2x^\nu S_{\mu\nu} + \tfrac{2}{e}\partial_{A^\mu},\\ &Q^\infty = a(x)u\partial_u + \tfrac{1}{e}a_\mu(x)\partial_{A^\mu},\end{aligned} \tag{3}$$

де $a(x)$ — довільна гладка функція,

$$S_{\mu\nu} = A_\mu \partial_{A^\nu} - A_\nu \partial_{A^\mu}, \quad \mu, \nu = \overline{0,3}. \tag{4}$$

Узагальнимо рівняння (2) наступним рівнянням

$$\Box u + F^1(u)A^\mu u^\mu + F^2(u)\partial^\mu A^\mu + F^3(u)A_\mu A^\mu = 0, \tag{5}$$

де $F^a = F^a(u)$ — довільні гладкі функції, що одночасно не рівні нулю, $a = \overline{1,3}$.

Зауважимо, що рівняння (5) заміною

$$A^\mu \to \psi(u)B^\mu \tag{6}$$

зводиться до еквівалентного рівняння

$$\Box u + \Phi^1(u)B^\mu u^\mu + \Phi^2(u)\partial^\mu B^\mu + \Phi^3(u)B_\mu B^\mu = 0,$$

де Φ^a, B^μ — довільні гладкі функції, причому $\Phi^1 = \psi F^1 + \dot{\psi} F^2$, $\Phi^2 = \psi F^2$, $\Phi^3 = \psi^2 F^3$. Отже, перетворення (6) є перетвореннями еквівалентності рівняння (5).

2 Необхідні умови інваріантності рівняння електродинаміки відносно розширеної алгебри Пуанкаре та конформної алгебри

Розглянемо задачу: знайти такі функції F^a, при яких рівняння (5) з точністю до перетворень еквівалентності (6) інваріантне відносно алгебри Пуанкаре та її розширень операторами масштабних та конформних перетворень. Результати класифікації сформулюємо у вигляді наступних тверджень.

Теорема 1. *Основна алгебри Лі інваріантності рівняння (5) є алгебра*

$$A_0 = \left\langle \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, I_{\mu\nu} = x_\mu \partial^\nu - x_\nu \partial^\mu + S_{\mu\nu}, D = x_\mu \partial_\mu - A^\mu \partial_{A^\mu} \right\rangle, \tag{7}$$

де $S_{\mu\nu}$ задаються формулами (4).

Доведення. Визначимо основну алгебру симетрії рівняння (5), тобто знайдемо максимальну алгебру інваріантності рівняння (5) при довільних функціях F^a. Для доведення теореми використаємо алгоритм Лі [1], [2]. Інфінітезимальний оператор алгебри інваріантності рівняння (5) має вигляд:

$$X = \xi^\mu(x,u,A)\partial_\mu + \eta(x,u,A)\partial_u + \eta^\mu(x,u,A)\partial_{A^\mu}, \tag{8}$$

$\mu = \overline{0,3}$. З умови інваріантності

$$\tilde{X} S \mid_{S=0} = 0, \tag{9}$$

де $\tilde{X}$ — продовження оператора X, S — ліва частина рівняння (5), одержуємо систему визначальних рівнянь для визначення координат оператора (8) та функцій F^a:

$$\begin{aligned} &\xi^\mu_u = 0, \quad \xi^\mu_{A^\nu} = 0, \quad \xi^{\mu,\nu} + \xi^{\nu,\mu} = 2g^{\mu\nu}\xi^0_0, \\ &\eta_{A^\mu} = 0, \quad \eta_{uu} = 0, \quad \eta^\mu_{A^\nu A^\gamma} = 0; \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &g^{\mu\nu}\eta\dot{F}^2 + (g^{\mu\nu}(2\xi^0_0 - \eta_u) + g^{\nu\sigma}\eta^\sigma_{A^\mu} - g^{\mu\sigma}\xi^\nu_\sigma)F^2 = 0, \\ &g^{\mu\nu}A^\mu\eta\dot{F}^1 + ((2g^{\mu\nu}\xi^0_0 - g^{\mu\sigma}\xi^\nu_\sigma)A^\mu + g^{\mu\nu}\eta^\mu)F^1 + g^{\mu\nu}\eta^\mu_u F^2 + \\ &+2g^{\nu\sigma}\eta_{\sigma u} - \Box\xi^\nu = 0, \\ &g^{\mu\nu}A^\mu A^\nu\eta\dot{F}^3 + (g^{\mu\nu}A^\mu A^\nu(2\xi^0_0 - \eta_u) + 2g^{\mu\nu}A^\nu\eta^\mu)F^3 + g^{\mu\nu}\eta^\mu_\nu F^2 + \\ &+g^{\mu\nu}\eta_\nu A^\mu F^1 + \Box\eta = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Розв'язуючи рівняння (10) визначальної системи, одержимо

$$\begin{aligned} &\xi^\mu = -b_\mu x^2 + x_\mu(2bx + æ) + c_{\mu\nu}x^\nu + d_\mu, \\ &\eta = a(x)u + p(x), \\ &\eta^\mu = \alpha^{\nu\mu}(x,u)A^\nu + \beta^\mu(x,u), \end{aligned} \tag{12}$$

де b_μ, æ, $c_{\mu\nu}$, d_μ — довільні сталі, причому $c_{\mu\nu} = -c_{\nu\mu}$, $a(x)$, $p(x)$, $\alpha^{\mu\nu}(x,u)$, $\beta^\mu(x,u)$ — довільні гладкі функції. Підставииши η^μ в рівняння (11) та розщепивши по степеням функцій A^μ, маємо

$$\begin{aligned} &g^{\mu\nu}\eta\dot{F}^1 + (2g^{\mu\nu}\xi^0_0 - g^{\mu\sigma}\xi^\nu_\sigma + g^{\nu\sigma}\alpha^{\mu\sigma})F^1 + g^{\sigma\nu}\alpha^{\mu\sigma}_u F^2 = 0, \\ &g^{\mu\nu}\eta\dot{F}^2 + (2g^{\mu\nu}\xi^0_0 - g^{\mu\sigma}\xi^\nu_\sigma + g^{\nu\sigma}\alpha^{\mu\sigma} - g^{\mu\nu}\eta_u)F^2 = 0, \\ &g^{\mu\nu}\eta\dot{F}^3 + (2g^{\mu\nu}\xi^0_0 + g^{\nu\sigma}\alpha^{\mu\sigma} + g^{\mu\sigma}\alpha^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu}\eta_u)F^3 = 0; \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &g^{\mu\nu}\eta_\nu F^1 + g^{\nu\sigma}\alpha^{\mu\nu}_\sigma F^2 + 2g^{\mu\nu}\beta^\nu F^3 = 0, \\ &g^{\mu\nu}\beta^\nu F^1 + g^{\mu\nu}\beta^\mu_u F^2 = \Box\xi^\mu - 2g^{\mu\nu}a_\nu, \\ &g^{\mu\nu}\beta^\mu_\nu F^2 = -\Box\eta. \end{aligned} \tag{14}$$

При довільних функціях F^a системи (13), (14) задовольняються лише при наступних умовах:

$$
\begin{array}{l}
\Box\xi^\mu = 0, \quad \eta = 0, \quad \beta^\nu = 0, \quad \alpha_\sigma^{\nu\mu} = 0, \\
2g^{\mu\nu}\xi_0^0 - g^{\mu\sigma}\xi_\sigma^\nu + g^{\nu\sigma}\alpha^{\mu\sigma} = 0, \\
2g^{\mu\nu}\xi_0^0 + g^{\nu\sigma}\alpha^{\mu\sigma} + g^{\mu\sigma}\alpha^{\nu\sigma} = 0.
\end{array} \tag{15}
$$

Загальним розв'язком системи (15) є функції

$$
\xi^\mu = æ x_\mu + c_{\mu\nu}x^\nu + d_\mu, \quad \eta = 0, \quad \eta^\mu = æ A^\mu + c_{\mu\nu}A_\nu. \tag{16}
$$

Інфінітезимальний оператор (8) з координатами (16) породжує алгебру, базисні елементи якої мають вигляд (7).

Теорему 1 доведено.

Поставимо задачу: визначити при яких функціях F^a відбувається розширення ядра симетрії (7), розширеною алгеброю Пуанкаре $AP_1(1,3)$ та конформною алгеброю $AC(1,3)$.

Теорема 2. *Якщо рівняння (5) інваріантне відносно розширеної алгебри Пуанкаре $AP_1(1,3)$, то її базисні елементи з точністю до перетворень еквівалентності (6) мають вигляд*

$$
\begin{array}{l}
\partial_\mu, \quad I_{\mu\nu} = x_\mu\partial^\nu - x_\nu\partial^\mu + S_{\mu\nu}, \\
D = x_\mu\partial_\mu + (nu+m)\partial_u - A^\mu\partial_{A^\mu},
\end{array} \tag{17}
$$

де n, m — довільні сталі, $S_{\mu\nu}$ задаються формулами (4).

Теорема 3. *Якщо рівняння (5) інваріантне відносно конформної алгебри $AC(1,3)$, то її базисні елементи з точністю до перетворень еквівалентності (6) мають вигляд*

$$
\begin{array}{l}
\partial_\mu, \quad I_{\mu\nu} = x_\mu\partial^\nu - x_\nu\partial^\mu + S_{\mu\nu}, \\
D = x_\mu\partial_\mu + (nu+m)\partial_u - A^\mu\partial_{A^\mu}, \\
K_\mu = 2x_\mu D - x^2\partial^\mu + 2x^\nu S_{\mu\nu} + k_{\mu\sigma\nu}f(u)A^\nu\partial_{A^\sigma} + h^{\mu\nu}\partial_{A^\nu},
\end{array} \tag{18}
$$

де $S_{\mu\nu}$ задаються формулами (4), $h^{\mu\nu} = \begin{cases} h^{\mu\nu}(u), n = m = 0, \\ h_{\mu\nu}, |n| + |m| \neq 0, \end{cases}$

$f(u) = \begin{cases} 0, n = m = 0, \\ e^u, n = 0, m = 1, \\ u, n \neq 0, m = 0, \end{cases}$ $h^{\mu\nu}(u)$ *— довільні гладкі функції,* $h_{\mu\nu}$, $k_{\mu\nu\sigma}$ *— довільні сталі.*

Доведення теорем 2, 3 проведемо одночасно. Якщо рівняння (5) інваріантне відносно алгебри Пуанкаре $AP(1,3)$, то з системи визначальних рівнянь (10) випливає, що елементи даної алгебри мають вигляд

$$\begin{aligned}&\partial_\mu, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu \partial^\nu - x_\nu \partial^\mu + (a^{\mu\nu}(x)u + p^{\mu\nu}(x))\,\partial_u + \\ &+ (\alpha^{\mu\nu\gamma\sigma}(x,u)A^\gamma + \beta^{\mu\nu\sigma}(x,u))\,\partial_{A^\sigma},\end{aligned} \tag{19}$$

де $a^{\mu\nu}$, $p^{\mu\nu}$, $\alpha^{\mu\nu\gamma\sigma}$, $\beta^{\mu\nu\sigma}$ — довільні гладкі функції, які визначаються із умов комутування

$$\begin{aligned}&[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0, \quad [\partial^\mu, J_{\nu\gamma}] = g^{\mu\nu}\partial_\gamma - g^{\mu\gamma}\partial_\nu, \\ &[J_{\mu\nu}, J_{\gamma\sigma}] = g^{\mu\sigma}J_{\nu\gamma} + g^{\nu\gamma}J_{\mu\sigma} - g^{\mu\gamma}J_{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J_{\mu\gamma}.\end{aligned} \tag{20}$$

Із комутаційних співвідношень

$$[\partial^\mu, J_{\nu\gamma}] = g^{\mu\nu}\partial_\gamma - g^{\mu\gamma}\partial_\nu + (a^{\nu\gamma,\mu}(x)u + p^{\nu\gamma,\mu}(x))\,\partial_u +$$

$$+ \left(\alpha^{\nu\gamma\theta\sigma,\mu}(x,u)A^\theta + \beta^{\nu\gamma\sigma,\mu}(x,u)\right)\partial_{A^\sigma} = g^{\mu\nu}\partial_\gamma - g^{\mu\gamma}\partial_\nu$$

випливає, що $\partial^\mu a^{\nu\gamma} = \partial^\mu p^{\nu\gamma} = \partial^\mu \alpha^{\nu\gamma\theta\sigma} = \partial^\mu \beta^{\nu\gamma\sigma} = 0$. Таким чином $a^{\nu\gamma} = a_{\nu\gamma}, p^{\nu\gamma} = p_{\nu\gamma}$, де $a_{\nu\gamma}$, $p_{\nu\gamma}$ — довільні сталі, $\alpha^{\nu\gamma\theta\sigma} = \alpha^{\nu\gamma\theta\sigma}(u), \beta^{\nu\gamma\sigma} = \alpha^{\nu\gamma\theta\sigma}(u)$ — довільні гладкі функції. Отже, оператор $J_{\mu\nu}$ має вигляд

$$J_{\mu\nu} = x_\mu \partial^\nu - x_\nu \partial^\mu + (a_{\mu\nu}u + p_{\mu\nu})\,\partial_u + (\alpha^{\mu\nu\gamma\sigma}(u)A^\gamma + \beta^{\mu\nu\sigma}(u))\,\partial_{A^\sigma}.$$

Вимагаючи виконання комутаційних співвідношень для операторів $J_{\mu\nu}$, $J_{\gamma\sigma}$, одержимо

$$\begin{aligned}&g^{\mu\sigma}p_{\nu\gamma} + g^{\nu\gamma}p_{\mu\sigma} - g^{\mu\gamma}p_{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}p_{\mu\gamma} = 0, \\ &g^{\mu\sigma}a_{\nu\gamma} + g^{\nu\gamma}a_{\mu\sigma} - g^{\mu\gamma}a_{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}a_{\mu\gamma} = 0;\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}&(a_{\mu\nu}u + p_{\mu\nu})\dot{\alpha}^{\gamma\sigma\epsilon\theta} - (a_{\gamma\sigma}u + p_{\gamma\sigma})\dot{\alpha}^{\mu\nu\epsilon\theta} - \alpha^{\mu\nu\tau\theta}\alpha^{\gamma\sigma\epsilon\tau} + \\ &+ \alpha^{\mu\nu\epsilon\tau}\alpha^{\gamma\sigma\tau\theta} = g^{\mu\sigma}\alpha^{\nu\gamma\epsilon\theta} + g^{\nu\gamma}\alpha^{\mu\sigma\epsilon\theta} - g^{\mu\gamma}\alpha^{\nu\sigma\epsilon\theta} - g^{\nu\sigma}\alpha^{\mu\gamma\epsilon\theta};\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}&(a_{\mu\nu}u + p_{\mu\nu})\dot{\beta}^{\gamma\sigma\theta} - (a_{\gamma\sigma}u + p_{\gamma\sigma})\dot{\beta}^{\mu\nu\theta} - \alpha^{\mu\nu\tau\theta}\beta^{\gamma\sigma\tau} + \\ &+ \alpha^{\gamma\sigma\tau\theta}\beta^{\mu\nu\tau} = g^{\mu\sigma}\beta^{\nu\gamma\theta} + g^{\nu\gamma}\beta^{\mu\sigma\theta} - g^{\mu\gamma}\beta^{\nu\sigma\theta} - g^{\nu\sigma}\beta^{\mu\gamma\theta}.\end{aligned} \tag{23}$$

Не важко переконатися, що виконання умов (21) можливе лише при $p_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} = 0$, тоді рівняння (22), (23) перепишуться наступним чином

$$\begin{aligned}&-\alpha^{\mu\nu\tau\theta}\alpha^{\gamma\sigma\epsilon\tau} + \alpha^{\mu\nu\epsilon\tau}\alpha^{\gamma\sigma\tau\theta} = \\ &= g^{\mu\sigma}\alpha^{\nu\gamma\epsilon\theta} + g^{\nu\gamma}\alpha^{\mu\sigma\epsilon\theta} - g^{\mu\gamma}\alpha^{\nu\sigma\epsilon\theta} - g^{\nu\sigma}\alpha^{\mu\gamma\epsilon\theta};\end{aligned} \tag{24}$$

$$-\alpha^{\mu\nu\tau\theta}\beta^{\gamma\sigma\tau} + \alpha^{\gamma\sigma\tau\theta}\beta^{\mu\nu\tau} = \\ = g^{\mu\sigma}\beta^{\nu\gamma\theta} + g^{\nu\gamma}\beta^{\mu\sigma\theta} - g^{\mu\gamma}\beta^{\nu\sigma\theta} - g^{\nu\sigma}\beta^{\mu\gamma\theta}. \tag{25}$$

Отже, зображення оператора $J_{\mu\nu}$ має вигляд

$$J_{\mu\nu} = x_\mu\partial^\nu - x_\nu\partial^\mu + (\alpha^{\mu\nu\gamma\sigma}(u)A^\gamma + \beta^{\mu\nu\sigma}(u))\,\partial_{A^\sigma}.$$

Вимагаючи інваріантність рівняння (5) відносно алгебри Пуанкаре $AP(1,3)$, із системи (11), отримаємо

$$g^{\nu\sigma}\eta^\sigma_{A^\mu} = g^{\mu\sigma}\xi^\nu_\sigma,$$

звідки, враховуючи (12), одержимо

$$\alpha^{\mu\nu\gamma\sigma} = g^{\mu\gamma}\delta_{\nu\sigma} - g^{\nu\gamma}\delta_{\mu\sigma}. \tag{26}$$

Тоді з системи рівнянь (25) одержимо

$$\beta^{\mu\nu\gamma} = 0. \tag{27}$$

Враховуючи (27), (26), знаходимо зображення операторів $J_{\mu\nu}$:

$$J_{\mu\nu} = x_\mu\partial^\nu - x_\nu\partial^\mu + (g^{\mu\gamma}\delta_{\nu\sigma} - g^{\nu\gamma}\delta_{\mu\sigma})A^\gamma\partial_{A^\sigma}.$$

Базисні елементи алгебри Пуанкаре (19), доповнені операторами масштабних перетворень

$$D = x_\mu\partial_\mu + (N(x)u + M(x))\partial_u + (\varphi^{\mu\nu}(x,u)A^\nu + \psi^\mu(x,u))\partial_{A^\mu} \tag{28}$$

при умовах

$$[\partial_\mu, D] = \partial_\mu, \quad [J_{\mu\nu}, D] = 0, \tag{29}$$

утворюють розширену алгебру Пуанкаре

$$AP_1(1,3) = \langle \partial_\mu, \quad J_{\mu\nu}, \quad D\rangle\,. \tag{30}$$

Зауважимо, що зображення оператора (28) є самим загальним в класі операторів, координати яких задовольняють визначальні рівняння (10). У даному випадку, використовуючи комутаційні співвідношення (29), одержимо

$$[\partial_\mu, D] = \partial_\mu + (N_\mu(x)u + M_\mu(x))\,\partial_u + \left(\varphi^{\gamma\nu}_\mu(x,u)A^\nu + \psi^\gamma_\mu(x,u)\right)\partial_{A^\gamma} = \partial_\mu,$$

тобто $N_\mu = M_\mu = \varphi^{\gamma\nu}_\mu = \psi^\gamma_\mu = 0$. Таким чином $N(x) = n, M(x) = m$, де n, m — довільні сталі, $\varphi^{\gamma\nu} = \varphi^{\gamma\nu}(u), \psi^\gamma = \psi^\gamma(u)$ — довільні гладкі функції. Отже,

$$D = x_\mu\partial_\mu + (nu + m)\partial_u + (\varphi^{\mu\nu}(u)A^\nu + \psi^\mu(u))\partial_{A^\mu}.$$

З комутаційних співвідношень
$[J_{\mu\nu}, D] = \left(\alpha^{\mu\nu\gamma\sigma} A^{\gamma} \varphi^{\theta\sigma} - (\varphi^{\epsilon\gamma} A^{\gamma} + \psi^{\epsilon})\alpha^{\mu\nu\epsilon\theta}\right)\partial_{\theta} = 0$
приходимо до висновку, що

$$\begin{aligned} &\alpha^{\mu\nu\epsilon\theta}\varphi^{\epsilon\gamma} - \alpha^{\mu\nu\gamma\sigma}\varphi^{\theta\sigma} = 0, \\ &\alpha^{\mu\nu\epsilon\theta}\psi^{\epsilon} = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

З рівнянь (31) випливає, що

$$\begin{aligned} &\varphi^{\mu\nu} = k(u)\delta_{\mu\nu}, \\ &\psi^{\mu} = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Таким чином зображення оператора D має вигляд

$$D = x_{\mu}\partial_{\mu} + (nu + m)\partial_u + k(u)A^{\nu}\partial_{A^{\nu}}. \tag{33}$$

З точністю до перетворень (6) оператор (33) при $k \neq 0$ еквівалентний оператору

$$D = x_{\mu}\partial_{\mu} + (nu + m)\partial_u - A^{\nu}\partial_{A^{\nu}}.$$

Елементи розширеної алгебри Пуанкаре $AP_1(1,3)$, доповнені операторами конформних перетворень

$$K_{\mu} = 2x_{\mu}D - x^2\partial^{\mu} + (L^{\mu}(x)u + P^{\mu}(x))\partial_u + (G^{\mu\sigma\nu}(x,u)A^{\nu} + H^{\mu\sigma}(x,u))\partial_{A^{\sigma}}$$

при умовах

$$\begin{aligned} &[\partial^{\mu}, K_{\nu}] = 2(g^{\mu\nu}D - J_{\mu\nu}), \quad [K_{\mu}, J_{\nu\gamma}] = g^{\mu\nu}K_{\gamma} - g^{\mu\gamma}K_{\nu}, \\ &[D, K_{\mu}] = K_{\mu}, \quad [K_{\mu}, K_{\nu}] = 0, \end{aligned} \tag{34}$$

утворюють конформну алгебру

$$AC(1,3) = \langle \partial_{\mu}, \quad J_{\mu\nu}, \quad D, \quad K_{\mu} \rangle. \tag{35}$$

Зауважимо, що зображення операторів K_{μ} є самим загальним в класі операторів, координати яких задовольняють визначальні рівняння (10). Вимагаючи виконання комутаційних співвідношень між операторами ∂^{μ}, K_{ν}, отримаємо

$$L^{\nu}_{\mu} = 0, \quad P^{\nu}_{\mu} = 0, \quad G^{\nu\sigma\gamma}_{\mu} = 2(\delta_{\mu\gamma}\delta_{\nu\sigma} - g^{\nu\gamma}g^{\mu\sigma}), \quad H^{\nu\sigma}_{\mu} = 0. \tag{36}$$

Розв'язком системи рівнянь (36) є функції

$$\begin{aligned} &L^{\nu} = l_{\nu}, \quad P^{\nu} = p_{\nu}, \\ &G^{\nu\sigma\gamma} = 2(g^{\mu\gamma}\delta_{\nu\sigma} - g^{\nu\gamma}\delta_{\mu\sigma})x^{\mu} + k^{\nu\sigma\gamma}(u), \quad H^{\nu\sigma} = h^{\nu\sigma}(u), \end{aligned} \tag{37}$$

де l_ν, p_ν — довільні сталі, $h^{\nu\sigma}(u)$, $k^{\nu\sigma\gamma}(u)$ — довільні гладкі функції. Враховуючи (37) одержимо зображення операторів конформних перетворень

$$K_\nu = 2x_\nu D - x^2\partial^\nu + (l_\nu u + p_\nu)\partial_u + \\ + \left((2(g^{\mu\gamma}\delta_{\nu\sigma} - g^{\nu\gamma}\delta_{\mu\sigma})x^\mu + k^{\nu\sigma\theta})A^\theta + h^{\nu\sigma}\right)\partial_{A^\sigma}.$$

Вимагаючи виконання комутаційних співвідношень (34) для операторів розширеної алгебри Пуанкаре та операторів конформних перетворень, одержимо умови, яким повинні задовольняти функції $k^{\mu\sigma\theta}$, $h^{\mu\sigma}$:

$$\begin{aligned} &(nu+m)\dot{k}^{\mu\sigma\theta} - k^{\mu\sigma\theta} = 0, \\ &(nu+m)\dot{h}^{\mu\sigma} = 0, \\ &p_\mu = 0, \quad l_\mu = 0. \end{aligned} \tag{38}$$

При розв'язуванні системи рівнянь (38) виникають три суттєво різні випадки:

1. Якщо $n = m = 0$, тоді $k^{\mu\sigma\theta} = 0$, $h^{\mu\sigma} = h^{\mu\sigma}(u)$ — довільні функції і
$D = x_\mu\partial_\mu - A^\mu\partial_{A^\mu}$,
$K_\nu = 2x_\nu D - x^2\partial^\nu + 2(g^{\mu\gamma}\delta_{\nu\sigma} - g^{\nu\gamma}\delta_{\mu\sigma})x^\mu A^\gamma\partial_{A^\sigma} + h^{\nu\sigma}(u)\partial_{A^\sigma}$.

2. При $n = 0, m \neq 0$, маємо $k^{\mu\sigma\theta}(u) = k_{\mu\sigma\theta}e^u$, $h^{\mu\sigma}(u) = h_{\mu\sigma}$, $k_{\mu\sigma\theta}$, $h_{\mu\sigma}$ — довільні сталі. Таким чином
$D = x_\mu\partial_\mu + \partial_u - A^\mu\partial_{A^\mu}$,
$K_\nu = 2x_\nu D - x^2\partial^\nu + ((2(g^{\mu\gamma}\delta_{\nu\sigma} - g^{\nu\gamma}\delta_{\mu\sigma})x^\mu + k_{\nu\sigma\gamma}e^u)A^\gamma + h_{\nu\sigma})\partial_{A^\sigma}$.

3. Коли $n \neq 0, m = 0$, то розв'язком системи рівнянь є функції $k^{\mu\sigma\theta} = k_{\mu\sigma\theta}u$, $h^{\mu\sigma}(u) = h_{\mu\sigma}$, $k_{\mu\sigma\theta}$, $h_{\mu\sigma}$ — довільні сталі. Отже, оператори D і K_ν мають вигляд
$D = x_\mu\partial_\mu + u\partial_u - A^\mu\partial_{A^\mu}$,
$K_\nu = 2x_\nu D - x^2\partial^\nu + ((2(g^{\mu\gamma}\delta_{\nu\sigma} - g^{\nu\gamma}\delta_{\mu\sigma})x^\mu + k_{\nu\sigma\gamma}u)A^\gamma + h_{\nu\sigma})\partial_{A^\sigma}$.

Таким чином, якщо рівняння (5) інваріантне відносно розширеної алгебри Пуанкаре $AP_1(1,3)$, то її базисні елементи мають вигляд (17); якщо рівняння (5) інваріантне відносно конформні алгебри $AC(1,3)$, то її базисні елементи мають вигляд (18).

Теореми 2,3 доведено.

3 Достатні умови інваріантності рівняння (5) відносно розширеної алгебри Пуанкаре та конформної алгебри

Теореми 2, 3 є лише необхідною умовою інваріантності рівняння (5) відносно розширеної алгебри Пуанкаре $AP_1(1,3)$ та конформної алгебри

АС(1,3), оскільки в них одержано лише зображення даних алгебр, але не вказано вигляд нелінійностей F^a. Вигляд функцій F^a, при яких рівняння (5) буде конформно-інваріантним, визначається в наступних твердженнях.

Теорема 4. *Рівняння (5) з точністю до перетворень еквівалентності (6) інваріантне відносно розширеної алгебри Пуанкаре $AP_1(1,3)$, базисні елементи якої задаються операторами:*

$$\partial_\mu,\ I_{\mu\nu} = x_\mu\partial^\nu - x_\nu\partial^\mu + S_{\mu\nu},\ D = x_\mu\partial_\mu + (nu+m)\partial_u - A^\mu\partial_{A^\mu}, \qquad (39)$$

де $|m|+|n| \neq 0$, $S_{\mu\nu}$ задаються формулами (4), тоді і тільки тоді, коли
1.$F^a = \lambda_a$, де λ_a — довільні сталі, $a = \overline{1,3}$, причому $n = 0, m \neq 0$.
2.$F^1 = \lambda_1$, $F^2 = \lambda_2 u$, $F^3 = \lambda_3 u$, причому $n \neq 0, m = 0$.

Доведення. Визначимо, коли рівняння (5) буде інваріантне відносно розширеної алгебри Пуанкаре $AP_1(1,3)$. З теореми 2 випливає, що якщо рівняння (5) інваріантне відносно розширеної алгебри Пуанкаре, то її базисні елементи з точністю до перетворень еквівалентності (6) мають вигляд (17). Знайдемо функції F^a, при яких рівняння (5) буде інваріантне відносно даної алгебри.

Підставивши координати інфінітезимального оператора

$$\xi^\mu = c_{\mu\nu}x^\nu + æx_\mu + d_\mu, \quad \eta = æ(nu+m)\delta_{\mu\nu}A^\nu, \quad \eta^\mu = (c_{\mu\nu} - æ)\delta_{\mu\nu}A^\mu,$$

де $c_{\mu\nu} = -c_{\nu\mu}$, æ, d_μ — довільні сталі, в систему визначальних рівнянь (13), (14), після спрощень отримаємо систему диференціальних рівнянь:

$$(nu+m)\dot{F}^1 = 0, \quad (nu+m)\dot{F}^i - nF^i = 0, \quad i = 2,3. \qquad (40)$$

З вигляду рівнянь системи (40) випливає, що її розв'язки залежать від значень сталих n і m.

При $n = 0$, $m \neq 0$ система диференціальних рівнянь (40) набуває вигляду

$$\dot{F}^a = 0, \quad a = \overline{1,3}. \qquad (41)$$

Розв'язавши рівняння (41), одержуємо $F^a = \lambda_a$, λ_a — довільні сталі, $a = \overline{1,3}$. Даний результат співпадає з пунктом 1 теореми 4.

У випадку $n \neq 0$, $m = 0$ система (40) має вигляд

$$\begin{aligned} &\dot{F}^1 = 0, \\ &u\dot{F}^i = F^i, \quad i = 2,3. \end{aligned} \qquad (42)$$

Розв'язком даної системи є функції $F^1 = \lambda_1$, $F^2 = \lambda_2 u$, $F^3 = \lambda_3 u$, де λ_a — довільні сталі, $a = \overline{1,3}$. Таким чином одержали функції пункту 2 теореми 4.

Якщо $n \neq 0$, $m \neq 0$, то із системи рівнянь (40) маємо $F^1 = \lambda_1$, $F^2 = \lambda_2(nu+m)$, $F^3 = \lambda_3(nu+m)$. Не важко переконатися, що заміною $u = w - \frac{m}{n}$ даний випадок зводиться до результату у випадку $n \neq 0$, $m = 0$.

Теорему 4 доведено.

Зауваження. У теоремі 4 накладена умова $|m| + |n| \neq 0$, оскільки випадок $n = m = 0$ розглянутий в теоремі 1.

Теорема 5. *Рівняння (5) з точністю до перетворень еквівалентності (6) інваріантне відносно конформної алгебри $AC(1,3)$, базисні елементи якої задаються операторами (18), тоді і тільки тоді, коли*

1. F^1, F^2 — довільні гладкі функції, $F^3 = \frac{F^1 F^2}{2}$, причому $n = m = 0$, $h^{\mu\nu}(u) = -\frac{4}{F^1}\delta_{\mu\nu}$, $k_{\mu\sigma\nu} = 0$.

2. $F^a = \lambda_a$, λ_a — довільні сталі, $a = \overline{1,3}$, $\lambda_1 \neq 0$, причому $n = 0$, $m = -\frac{2(\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_3)}{\lambda_1^2}$, $h^{\mu\nu}(u) = -\frac{4}{\lambda_1}\delta_{\mu\nu}$, $k_{\mu\sigma\nu} = 0$.

3. $F^1 = \lambda_1$, $F^2 = \lambda_2 u$, $F^3 = \lambda_3 u$, λ_a — довільні сталі, $a = \overline{1,3}$, $\lambda_1^2 - 4\lambda_3 \neq 0$, причому $m = 0$, $n = \frac{-2(\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_3)}{\lambda_1^2 - 4\lambda_3}$, $h^{\mu\nu}(u) = -\frac{4(\lambda_1 - 2\lambda_2)}{\lambda_1^2 - 4\lambda_3}\delta_{\mu\nu}$, $k_{\mu\sigma\nu} = 0$.

4. Рівняння (5) співпадає з рівнянням (2), причому $m = 0$, $n \in \mathbb{R}$, $h^{\mu\nu}(u) = \frac{2}{e}(n+1)\delta_{\mu\nu}$, $k_{\mu\sigma\nu} = 0$.

Доведення. Якщо рівняння (5) інваріантне відносно конформної алгебри, то, як показано в теоремі 3, базисні елементи даної алгебри з точністю до перетворень еквівалентності (6) мають вигляд (18). Для кожного з отриманих в теоремі 3 зображень конформної алгебри знайдемо функції F^a, при яких рівняння (5) буде інваріантне відносно даної алгебри.

Оскільки конформна алгебра $AC(1,3)$ містить у собі розширену алгебру Пуанкаре $AP_1(1,3)$, то використаємо результати теорем 1, 4.

Розглянемо зображення конформної алгебри при $n = 0$, $m = 0$. У даному випадку згідно теореми 4 $F^a = F^a(u)$ — довільні функції, $a = \overline{1,3}$. Підставивши координати інфінітезимального оператора

$$\begin{aligned} &\xi^\mu = -b_\mu x^2 + (2bx + æ)x_\mu + c_{\mu\nu}x^\nu + d_\mu, \quad \eta = 0, \\ &\eta^\mu = (c_{\mu\gamma} - (2bx + æ)\delta_{\mu\gamma} + 2b_\gamma x^\mu - 2b^\mu x_\gamma)A^\gamma + b^\alpha h^{\alpha\mu}, \end{aligned} \tag{43}$$

де b_μ, æ, $c_{\mu\nu} = -c_{\nu\mu}$, d_μ — довільні сталі, у систему визначальних рівнянь (13), (14) отримаємо

$$h^{\mu\nu} = -\frac{4}{F^1}\delta_{\mu\nu}, \quad F^3 = \frac{1}{2}F^1F^2. \tag{44}$$

Таким чином рівняння (5), інваріантне відносно конформної алгебри $AC(1,3)$, оператори якої мають зображення (18) при $n = 0$, $m = 0$, має вигляд

$$\Box u + F^1(u)A^\mu u^\mu + F^2(u)\partial^\mu A^\mu + \frac{1}{2}F^1(u)F^2(u)A_\mu A^\mu = 0.$$

Перший пункт теореми доведено.

Якщо $n = 0$, $m \neq 0$, то координати інфінітезимального оператора мають вигляд

$$\begin{aligned} &\xi^\mu = -b_\mu x^2 + (2bx + æ)x_\mu + c_{\mu\nu}x^\nu + d_\mu, \quad \eta = m(2bx + æ),\\ &\eta^\mu = (c_{\mu\gamma} - (2bx + æ)\delta_{\mu\gamma} + 2b_\gamma x^\mu - 2b^\mu x_\gamma + b^\sigma k_{\mu\sigma\gamma}e^{\frac{u}{m}})A^\gamma +\\ &+b^\alpha h^{\alpha\mu}(u). \end{aligned} \tag{45}$$

Згідно теореми (4) функції $F^a = \lambda_a$. Підставивши функції ξ^μ, η, η^μ, η^μ, F^a у систему визначальних рівнянь (13), (14), одержимо наступну систему рівнянь для визначення $h^{\mu\nu}$, $k_{\mu\sigma\gamma}$:

$$\lambda_3 h^{\sigma\mu} = -(\lambda_1 m + 2\lambda_2)\delta_{\sigma\mu}, \quad \lambda_1 h^{\sigma\mu} = -4\delta_{\sigma\mu}, \quad k_{\mu\sigma\gamma} = 0. \tag{46}$$

Із умов (46) випливає, що $\lambda_1 \neq 0, m = \frac{2(2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2)}{\lambda_1^2}, h^{\sigma\mu} = -\frac{4}{\lambda_1}\delta_{\mu\sigma}$, тобто одержуємо результат пункту 2 теореми 5.

Нехай $n \neq 0$, $m = 0$, тоді згідно теореми (4) $F^1 = \lambda_1$, $F^2 = \lambda_2 u$, $F^3 = \lambda_3 u$.

Якщо $n \neq 0$, $m = 0$, то координати інфінітезимального оператора мають вигляд

$$\begin{aligned} &\xi^\mu = -b_\mu x^2 + (2bx + æ)x_\mu + c_{\mu\nu}x^\nu + d_\mu, \quad \eta = n(2bx + æ)u,\\ &\eta^\mu = (c_{\mu\gamma} - (2bx + æ)\delta_{\mu\gamma} + 2b_\gamma x^\mu - 2b^\mu x_\gamma + b^\nu k_{\nu\mu\gamma}u)A^\gamma + b^\alpha h_{\alpha\mu}, \end{aligned} \tag{47}$$

У даному випадку із системи визначальних рівнянь (13), (14) одержимо

$$\lambda_1 h^{\mu\nu} = -4(n+1)\delta_{\mu\nu}, \quad \lambda_3 h^{\mu\nu} = -4(n\lambda_1 + 2\lambda_2)\delta_{\mu\nu}, \quad k_{\nu\mu\gamma} = 0, \tag{48}$$

звідки випливає, що
а) якщо $\lambda_1 = 0$, $\lambda_3 \neq 0$, то $n = -1$, $h^{\mu\nu} = -\frac{2\lambda_2}{\lambda_3}\delta_{\mu\nu}$;
б) у випадку $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$ маємо

$n = -\frac{2\lambda_2}{\lambda_3}$, $h^{\mu\nu} = -\frac{4(n+1)}{\lambda_1}\delta_{\mu\nu}$;
в) при $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$ отримуємо, що
$n = -\frac{2(\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_3)}{\lambda_1^2 - 4\lambda_3}$, $h^{\mu\nu} = -\frac{4(\lambda_1 - 2\lambda_2)}{\lambda_1^2 - 4\lambda_3}\delta_{\mu\nu}$, $\lambda_1^2 - 4\lambda_3 \neq 0$.

Об'єднавши випадки а, б, в, одержимо пункт 3 теореми 5.

Якщо, $\lambda_1^2 - 4\lambda_3 = 0$, то $h^{\mu\nu} = \frac{2(n+1)}{\lambda_2}\delta_{\mu\nu}$, причому у цьому випадку $\lambda_1 = 2\lambda_2$, $\lambda_3 = \lambda_2^2$, тобто рівняння (5) має вигляд (2) при $\lambda_2 = -e$.

Теорему 5 доведено.

4 Конформна інваріантність деяких систем електродинаміки

Узагальнимо рівняння (2) системою рівнянь

$$\begin{aligned} &\Box u + F^1(u)A^\mu u^\mu + F^2(u)\partial^\mu A^\mu + F^3(u)A_\mu A^\mu = 0, \\ &\Box A^\mu - \partial_\mu\partial^\nu A^\nu = \Psi^\mu(u, A), \end{aligned} \tag{49}$$

де $F^a = F^a(u)$, $\Psi^\mu = \Psi^\mu(u, A)$ — довільні гладкі функції, причому функції F^a одночасно не рівні нулю, $a = \overline{1,3}$, $\mu = \overline{0,3}$.

В роботі [3] досліджено задачу, при яких F^a, Ψ^μ система (49) інваріантна відносно алгебри $AP_1(1,3)$. В роботі [4] встановлено конформну інваріантність системи рівнянь електродинаміки у випадку спінорного і векторного полів. Знайдемо такі функції F^a, Ψ^μ, при яких система (49) є інваріантною відносно конформної алгебри $AC(1,3)$. Справедливе наступне твердження.

Теорема 6. *Система диференціальних рівнянь (49) інваріантна відносно конформної алгебри AC(1,3), базисні елементи якої задаються операторами вигляду (18), тоді і тільки тоді, коли вона еквівалентна одній із наступних систем*

$$\begin{aligned} &\Box u + 2\lambda_1 A^\mu u^\mu + \lambda_1 u\partial^\mu A^\mu + \lambda_2 u A_\mu A^\mu = 0, \\ &\Box A^\mu - \partial_\mu\partial^\nu A^\nu = A_\nu A^\nu \varphi(w) A^\mu, \end{aligned} \tag{50}$$

де $w = \frac{A_\nu A^\nu}{u^2}$, *причому* $k_{\mu\sigma\nu} = 0$, $n = -1$, $m = 0$, $h^{\mu\nu} = 0$, $\varphi = \varphi(w)$ *— довільні гладкі функції;*

$$\begin{aligned} &\Box u + 2\lambda A^\mu u^\mu + F\partial^\mu A^\mu + \lambda F A_\mu A^\mu = 0, \\ &\Box A^\mu - \partial_\mu\partial^\nu A^\nu = 0, \end{aligned} \tag{51}$$

причому $n = 0$, $m = 0$, $k_{\mu\sigma\nu} = 0$, $h^{\mu\nu}(u) = h\delta_{\mu\nu}$, $h = -\frac{2}{\lambda}$, $F = F(u)$ — *довільна гладка функція,* λ — *довільна стала;*

$$\begin{aligned} &\Box u + \lambda_1 A^\mu u^\mu + \lambda_2 \partial^\mu A^\mu + \lambda_3 A_\mu A^\mu = 0, \\ &\Box A^\mu - \partial_\mu \partial^\nu A^\nu = 0, \end{aligned} \tag{52}$$

причому $n = 0$, $m = -\frac{2(\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_3)}{\lambda_1^2}$, $k_{\mu\sigma\nu} = 0$, $h^{\mu\nu}(u) = h\delta_{\mu\nu}$, $h = -\frac{4}{\lambda_1}$, λ_a — *довільні сталі;*

$$\begin{aligned} &\Box u + \lambda_1 A^\mu u^\mu + \lambda_2 u \partial^\mu A^\mu + \lambda_3 u A_\mu A^\mu = 0, \\ &\Box A^\mu - \partial_\mu \partial^\nu A^\nu = 0, \end{aligned} \tag{53}$$

причому $n = -\frac{2(\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_3)}{\lambda_1^2 - 4\lambda_3}$, $m = 0$, $k_{\mu\sigma\nu} = 0$, $h^{\mu\nu}(u) = h\delta_{\mu\nu}$, $h = -\frac{4(\lambda_1 - 2\lambda_2)}{\lambda_1^2 - 4\lambda_3}$, λ_a — *довільні сталі;*

$$\begin{aligned} &\Box u - 2eA^\mu u^\mu - eu\partial^\mu A^\mu + e^2 u A_\mu A^\mu = 0, \\ &\Box A^\mu - \partial_\mu \partial^\nu A^\nu = 0, \end{aligned} \tag{54}$$

причому $n \in \mathbb{R}$, $m = 0$, $k_{\mu\sigma\nu} = 0$, $h^{\mu\nu}(u) = h\delta_{\mu\nu}$, $h = \frac{2}{e}(n+1)$, e — *довільна стала.*

Доведення. Застосувавши критерій інваріантності, отримаємо систему визначальних рівнянь для визначення невідомих функцій, яка складається із систем рівнянь (13), (14) та рівнянь

$$\begin{aligned} &A^\nu \psi^\alpha_{A^\nu} - (nu + m)\psi^\alpha_u = 3\psi^\alpha, \\ &A^s \psi^\alpha_{A^\sigma} - A^\sigma \psi^\alpha_{A^s} + g^{\alpha s}\psi^\sigma - g^{\alpha\sigma}\psi^s = 0, \\ &\dot{h}(u) = 0, \quad h\psi^\alpha_{A^s} = 0. \end{aligned} \tag{55}$$

Звідки

$$h \text{ — стала}, \quad \psi^\mu = \psi(u, \omega) A^\mu, \quad \omega = A_\mu A^\mu, \tag{56}$$

$$\begin{aligned} &2\omega\psi_\omega - (nu + m)\psi_u = 2\psi, \\ &h\psi = 0. \end{aligned} \tag{57}$$

Згідно теореми 5 для першого рівняння системи (49) існує чотири можливих зображення алгебри інваріантності конформної алгебри $AC(1,3)$.

Нехай $h = 0$, тоді із теореми 5 випливає, що $m = 0$, $\lambda_1 = 2\lambda_2$, $n = -1$; функцію ψ визначимо із рівняння

$$2\omega\psi_\omega + u\psi_u = 2\psi.$$

Загальним розв'язком даного рівняння є функція $\psi = \omega\varphi(w)$, де $w = \frac{\omega}{u^2}$, $\varphi = \varphi(w)$ — довільна гладка функція. Таким чином система (49) набуває вигляду (50), що і потрібно було показати.

Якщо $h \neq 0$, то з (57) випливає, що $\psi = 0$. Використавши теорему (5), одержимо:
а) $h = -\frac{4}{\lambda_1}$ при $F^1 = \lambda_1$, $F^2 = F(u)$, $F^3 = \frac{\lambda_1 F(u)}{2}$, де λ_1 — довільна стала, $F(u)$ — довільна гладка функція, причому $m = n = 0$, при цьому система (49) має вигляд (51);
б) при $F^a = \lambda_a$, де λ_a — довільні сталі, $a = \overline{1,3}$, $\lambda_1 \neq 0$, система (49) набуває вигляду (52) при цьому $n = 0$, $m = -\frac{2(\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_3)}{\lambda_1^2}$, $h^{\mu\nu} = -\frac{4}{\lambda_1}\delta_{\mu\nu}$;
в) система (49) має вигляд (53), якщо $F^1 = \lambda_1$, $F^2 = \lambda_2 u$, $F^3 = \lambda_3 u$, λ_a — довільні сталі, $a = \overline{1,3}$, $\lambda_1^2 - 4\lambda_3 \neq 0$, причому $m = 0$, $n = \frac{-2(\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_3)}{\lambda_1^2 - 4\lambda_3}$, $h = -\frac{4(\lambda_1 - 2\lambda_2)}{\lambda_1^2 - 4\lambda_3}$;
г) система (49) співпадає із системою (54), причому $m = 0$, $n \in \mathbb{R}$, $h = \frac{2}{e}(n+1)$ у випадку коли перше рівняння системи (49) має вигляд (2).

Теорему 6 доведено.

Якщо рівняння (5) узагальнити системою рівнянь

$$\begin{aligned} &\Box u + F^1(u)A^\mu u^\mu + F^2(u)\partial^\mu A^\mu + F^3(u)A_\mu A^\mu = 0, \\ &\Box A^\mu = \psi^\mu(u, A), \end{aligned} \tag{58}$$

то справедливий наступний результат.

Теорема 7. *Система диференціальних рівнянь (58) не є конформно-інваріантною.*

Доведення. Згідно критерію Лі, діючи другим продовженням інфінітезимального оператора на кожне з рівнянь системи (58) та перейшовши на многовид системи (58), після розщеплення по похідних отримуємо систему визначальних рівнянь, яка складається із рівнянь (13), (14) та рівнянь

$$\eta^\mu_u A^\alpha F^1 = 2\eta^\mu_{\alpha u}; \tag{59}$$

$$g^{\mu\nu}\eta^\alpha_u F^2 = 2g^{\nu\beta}\eta^\alpha_{\beta A^\mu} - \delta_{\alpha\mu}\Box\xi^\nu; \tag{60}$$

$$\eta^\alpha_u A_\mu A^\mu F^3 = -\eta\psi^\alpha_u - \eta^\nu\psi^\alpha_{A^\nu} + \eta^\alpha_{A^\nu}\psi^\nu - 2\xi^0_0\psi^\alpha. \tag{61}$$

Із рівнянь (13), (14), як показано в теоремах 3, 5, випливає, що координати інфінітезимального оператора мають наступний вигляд

$$\begin{aligned} &\xi^\mu = -b_\mu x^2 + (2bx + æ)x_\mu + c_{\mu\nu}x^\nu + d_\mu, \\ &\eta = (2bx + æ)(nu + m), \\ &\eta^\mu = (c_{\mu\gamma} - (2bx + æ)\delta_{\mu\gamma} + 2b_\gamma x^\mu - 2b^\mu x_\gamma)A^\gamma - b^\nu h^{\nu\mu}(u), \end{aligned} \tag{62}$$

де $h^{\mu\nu}$ задовольняють умові теореми 6, b_μ, æ, $c_{\mu\nu} = -c_{\nu\mu}$, d_μ — довільні сталі, $F^1(u) \neq 0$. Для всіх зображень $h^\mu_{\alpha u} = 0$, тоді із рівнянь (59) випливає, що $h^\mu_u = 0$, а із рівняння (60) одержимо рівність

$$b_s(\delta_{\mu s}\delta_{\alpha\nu} - g^{\alpha s}g^{\mu\nu}) = 0. \tag{63}$$

Оскільки (63) виконується лише при $b_s = 0$, то звідси випливає, що система рівнянь (58) не є конформно-інваріантною, що і потрібно було показати.

Теорема 7 доведена.

5 Висновки

У даній роботі описано всеможливі зображення конформної алгебри, відносно якої інваріантні нелінійні рівняння електродинаміки вигляду (1). Одержані результати класифікації застосовано для дослідження симетрійних властивостей нелінійного рівняння (5) та системи рівнянь (49), яка є узагальненням рівняння електродинаміки (1). Встановлено, що в класі систем рівнянь (49) тільки системи (50)–(54) є інваріантними відносно конформної алгебри (18). Доведено, що система диференціальних рівнянь (58), яка є узагальненням рівняння (1), не є конформно-інваріантною.

[1] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с. — English translation: Ovsiannikov L.V. Group analysis of differential equations. — New York : Academic Press, 1982. — 400 p.

[2] Фущич В. И., Штелень В. М., Серов Н. И. Симметрийный анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики. — К.: Наук. думка, 1989. — 339 с.

[3] Панчак О. А. Симетрія хвильового рівняння зі змінними коефіцієнтами // Доп. НАН України. — 1998. — № 4. — С. 45–47.

[4] Фущич В. И., Цифра И. М.. О симметрии нелинейных уравнений электродинамики // Теоретическая и математическая физика. — 1985. — Т. 64, № 1. — С. 41–50.

INVARIANCE OF THE EQUATIONS OF ELECTRODYNAMICS UNDER THE CONFORMAL ALGEBRA

Liudmyla BLAZHKO

Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University
Pershotravneviy prospekt, 24, Poltava 36011

All possible presentations of the Poincare algebras and conformal algebra, under which the nonlinear generalizations of the equations of electrodynamics are invariant equations, are given. The results of the classification are used for describing the equations that are invariant under those algebras.