# ТОЧКОВІ СТЕПЕНЕВІ ОСОБЛИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ВОЛЬТЕРРИ


*Оксана ЧМИР*

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності,
вул. Клепарівська, 35, Львів 79000

Редакція отримала статтю 12 лютого 2008 р.

Встановлено достатні умови розв'язності нелінійного інтегрального рівняння Вольтерри з полярним ядром у вагових $L^1$ - просторах функцій із точковими особливостями. Досліджено характер особливостей розв'язку цього рівняння.

Узагальнені крайові задачі для напівлінійних еліптичних та параболічних рівнянь можна вивчати шляхом зведення їх до нелінійних інтегральних рівнянь у вагових $L^1$ - просторах з ядрами – функціями Ґріна (див., наприклад, [3, 7, 8, 9] та бібліографію в [5]).

У даній статті методом нерухомої точки вивчено нелінійне інтегральне рівняння Вольтерри з полярним ядром у ваговому $L^1$- просторі з вагою порядку функції $dist^k((x,t),\widehat{P})$ при $dist((x,t),\widehat{P}) \to 0$, $k \in \mathbb{R}$. Досліджено характер точкових степеневих особливостей розв'язку цього рівняння – доведено існування розв'язку рівняння у спеціальних підпросторах вагового $L^1$ - простору.

## ТОЧКОВІ ОСОБЛИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ВОЛЬТЕРРИ

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\Omega$ – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею $S = \partial\Omega$ класу $C^\infty$, $Q = \Omega \times (0,T]$, $0 < T < +\infty$. Використовуватимемо позначення:
$||x-y||$ – евклідова відстань в $\mathbb{R}^n$; $P = (x,t)$, $M = (y,\tau)$, $\widehat{P} = (\hat{x},\hat{t})$,
$d(x,t;y,\tau) = |PM| = (||x-y||^2 + |t-\tau|)^{\frac{1}{2}}$ – параболічна відстань в $\mathbb{R}^{n+1}$;

УДК 517.95; MSC 2000: 35K50

$\eta$ – мультиіндекс з компонентами $(\eta_1, ..., \eta_n)$, $\eta_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = \overline{1,n}$, $|\eta| = \eta_1 + ... + \eta_n$ – довжина мультиіндексу $\eta$, $D^\eta \equiv D_x^\eta = \frac{\partial^{|\eta|}}{\partial x_1^{\eta_1} \cdot ... \cdot \partial x_n^{\eta_n}}$.

Нехай $\varepsilon_0 > 0$ – таке задане число, що паралельна до $S$ поверхня $S_{\varepsilon_0}$ є з класу $C^\infty$ та надалі вважатимемо, що $\varepsilon_0 \leq 1$. Через $\widetilde{\varrho}(\sigma)$ позначатимемо нескінченно диференційовну невід'ємну функцію, яка має порядок $\sigma$ при $\sigma \to 0$ та володіє властивістю $M_1' \sigma \leq \widetilde{\varrho}(\sigma) \leq M_2' \sigma$, де $M_1'$, $M_2'$ – додатні сталі.

При довільній фіксованій точці $\widehat{P} \in \overline{Q}$ введемо функцію

$$\varrho_0(P, \widehat{P}) = \begin{cases} \widetilde{\varrho}(|P\widehat{P}|), & |P\widehat{P}| < \frac{\varepsilon_0}{2}, \\ 1, & |P\widehat{P}| \geq \varepsilon_0, \end{cases} \qquad 0 < \varrho_0(P, \widehat{P}) \leq 1, \quad P \in \overline{Q}.$$

При $k \in \mathbb{R}$ введемо функційний простір
$\mathcal{M}_k(Q,\ \widehat{P}) = \{\mathrm{v} : ||\mathrm{v};\ \widehat{P}||_k = \int\limits_Q \varrho_0^k(x, t, \hat{x}, \hat{t}) |\mathrm{v}(x,t)|\, dxdt < +\infty\}$.

Нехай $\mathcal{M}_{k,C}(Q,\ \widehat{P}) = \{\mathrm{v} \in \mathcal{M}_k(Q,\ \widehat{P}) : ||\mathrm{v};\ \widehat{P}||_k \leq C\}$ – куля радіуса $C$ в просторі $\mathcal{M}_k(Q,\ \widehat{P})$,

$$(H\mathrm{v})(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega \mathcal{K}(x,t;y,\tau) F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))\, dy,\ (x,t) \in Q,$$

$$H_1 \mathrm{v} = H\mathrm{v} + h_0,$$

де $\mathcal{K}(x,t;y,\tau)((x,t;y,\tau) \in \overline{Q} \times \overline{Q})$ – ядро оператора $H$, що має такі властивості:
1) $\mathcal{K}(x,t;y,\tau) = 0$ при $t < \tau$;
2) $\mathcal{K}(x,t;y,\tau)$ при $(x,t) \neq (y,\tau)$ має похідні до порядку $s + n + 2$, а в околі діагоналі $(x,t) = (y,\tau)$ разом із своїми похідними має такі оцінки: $|\frac{\partial^{\eta_0}}{\partial \tau^{\eta_0}} D_y^\eta \mathcal{K}(x,t;y,\tau)| \leq C_{\eta,\eta_0} [d(x,t;y,\tau)]^{s - |\eta| - 2\eta_0}$, де $-n - 2 < s < 0$, $|\eta| + 2\eta_0 < s + n + 2$, $C_{\eta,\eta_0}$ – додатні сталі;
3) для довільних $\eta$, $|\eta| < s + n + 2$, $-n - 2 < s < 0$ існують додатні сталі $\widetilde{C}_\eta$ такі, що $\int\limits_Q |D_x^\eta \mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\, dxdt \leq \widetilde{C}_\eta$ для довільних $(y,\tau) \in \overline{Q}$,
функція $F_0(x,t,\mathrm{v})$ визначена в $Q \times (-\infty, +\infty)$, функція $h_0$ визначена в $Q$.

Прикладом ядра $\mathcal{K}$ є функція Ґріна першої крайової задачі для рівняння теплопровідності при $s = -n$, $n \geq 1$.

Використовуватимемо таку властивість ядра $\mathcal{K}$ [1, 4, 6]:
*Нехай* $(\hat{x}, \hat{t}) \in \overline{Q}$, $-n-2 < r < 0$, $-n-2 < s < 0$, $|\eta| + 2\eta_0 < s+n+2$.

*Тоді*
$$|\frac{\partial^{\eta_0}}{\partial t^{\eta_0}} D_x^{\eta} \int\limits_Q \mathcal{K}(x,t;y,\tau)\varrho_0^r(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\,dyd\tau| \leq$$
$$\leq \widehat{L}_{1\,\eta,\,\eta_0}\max\{[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{r+2+n+s-|\eta|-2\eta_0},\,1\} \quad \forall (x,t)\in\overline{Q}; \qquad (A1)$$
$$|\frac{\partial^{\eta_0}}{\partial \tau^{\eta_0}} D_y^{\eta} \int\limits_Q \mathcal{K}(x,t;y,\tau)\varrho_0^r(x,t,\hat{x},\hat{t})\,dxdt| \leq$$
$$\leq L_{1\,\eta,\,\eta_0}\max\{[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{r+2+n+s-|\eta|-2\eta_0},\,1\} \quad \forall (y,\tau)\in\overline{Q}. \qquad (A2)$$

У просторі $\mathcal{M}_k(Q,\,\widehat{P})$ при $k > -n-2$ розглянемо інтегральне рівняння
$$\mathrm{v} = H_1\mathrm{v}. \qquad (1)$$

Введемо позначення: $\widetilde{g}_{\,k}(x,t;y,\tau) \stackrel{def}{=} \varrho_0^k(x,t,\hat{x},\hat{t})\cdot\mathcal{K}(x,t;y,\tau)$.

**Лема 1.** *Нехай* $-n-2 < s < 0$, $k > -n-s-2$. *Тоді для довільного* $\varepsilon > 0$ *існує* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *таке, що для довільної підобласті* $V \subset Q$, *міра якої* $m(V)$ *менша за* $\delta$, *і будь-якої точки* $(y,\tau)\in\overline{Q}$ *виконується нерівність*
$$\int\limits_V |\widetilde{g}_{\,k}(x,t;y,\tau)|\,dxdt < \varepsilon.$$

***Доведення.*** Доведення леми проводимо розділяючи особливості функції $\widetilde{g}_{\,k}(x,t;y,\tau)$.

Нехай $(\hat{x},\hat{t})$ – довільна фіксована точка $\overline{Q}$, $\sigma\in(0,1)$ – яке-небудь число. Далі позначатимемо через $C_j$, $j=\overline{1,21}$ – додатні сталі.

1. Нехай точка $(y,\tau)\in\overline{Q}$ така, що $||y-\hat{x}|| < \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, $|\tau-\hat{t}| < \frac{\sigma^2}{2}$.

Якщо $||x-\hat{x}|| < \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, $|t-\hat{t}| < \frac{\sigma^2}{2}$, то $||x-y|| \leq ||x-\hat{x}|| + ||y-\hat{x}|| < \frac{2\sigma}{\sqrt{2}}$, $|t-\tau| < \sigma^2$, а тоді у випадку $k \geq 0$
$$\mathcal{I}_1^1(y,\tau,\sigma) = \int\limits_{V\cap\{(x,t)\in Q:\,||x-\hat{x}||<\frac{\sigma}{\sqrt{2}},\,|t-\hat{t}|<\frac{\sigma^2}{2}\}} |\widetilde{g}_{\,k}(x,t;y,\tau)|\,dxdt \leq$$
$$\leq C_1\sigma^k \int\limits_{V\cap\{(x,t)\in Q:\,||x-y||<\frac{2\sigma}{\sqrt{2}},\,|t-\tau|<\sigma^2\}} |\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\,dxdt \leq$$

$$\leq C_2\sigma^k \int\limits_{V\cap\{(x,t)\in Q:\,||x-y||<\frac{2\sigma}{\sqrt{2}},\,|t-\tau|<\sigma^2\}} |MP|^s\,dxdt \leq C_3\sigma^{k+s+n+2}$$

(остання нерівність випливає із [4]).

У випадку $-n-s-2<k<0$ та $m(V)<\sigma^{n+2}$ матимемо

$$\mathcal{I}_2^1(y,\tau,\sigma) = \int\limits_{V\cap\{(x,t)\in Q:\,||x-y||<\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\,|t-\tau|<\frac{\sigma^2}{8}\}} |\widetilde{g}_k(x,t;y,\tau)|\,dxdt +$$

$$+ \int\limits_{\substack{V\cap\{(x,t)\in Q:\,||x-y||\geq\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\,|t-\tau|\geq\frac{\sigma^2}{8};\\ ||x-\hat{x}||<\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\,|t-\hat{t}|<\frac{\sigma^2}{8}\}}} |\widetilde{g}_k(x,t;y,\tau)|\,dxdt +$$

$$+ \int\limits_{\substack{V\cap\{(x,t)\in Q:\,||x-y||\geq\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\,|t-\tau|\geq\frac{\sigma^2}{8};\\ \frac{\sigma}{2\sqrt{2}}\leq||x-\hat{x}||<\frac{\sigma}{\sqrt{2}},\,\frac{\sigma^2}{8}\leq|t-\hat{t}|<\frac{\sigma^2}{2}\}}} |\widetilde{g}_k(x,t;y,\tau)|\,dxdt. \tag{2}$$

Зробимо заміну змінних у другому доданку інтеграла $\mathcal{I}_2^1(y,\tau,\sigma)$: $x_i=\hat{x}_i+\xi_i\sigma$, $i=\overline{1,n}$, $t=\hat{t}+\xi_{n+1}\sigma^2$. У нових змінних $P=\overline{\xi}=(\xi_1,\ldots,\xi_n,\xi_{n+1})$, $|\overline{\xi}|=\sqrt{\xi_1^2+...+\xi_n^2+\xi_{n+1}}=\sqrt{||\xi||^2+|\xi_{n+1}|}$, $|P\widehat{P}|=\sigma\cdot|\overline{\xi}|$, $dxdt=\sigma^{n+2}d\xi d\xi_{n+1}$. Тоді

$$\int\limits_{\substack{V\cap\{(x,t)\in Q:\,||x-y||\geq\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\,|t-\tau|\geq\frac{\sigma^2}{8};\\ ||x-\hat{x}||<\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\,|t-\hat{t}|<\frac{\sigma^2}{8}\}}} |\widetilde{g}_k(x,t;y,\tau)|\,dxdt \leq C_4\cdot\sigma^{k+n+s+2}\times$$

$$\times \int\limits_{\{(\xi,\xi_{n+1}):||\xi||<\frac{1}{2\sqrt{2}},\,|\xi_{n+1}|<\frac{1}{8}\}} |\overline{\xi}|^k\,d\xi d\xi_{n+1} \leq C_5\cdot\sigma^{k+n+s+2}, \tag{3}$$

де збіжність інтеграла випливає з формули 3 [11, с. 588].

Отже, при $m(V)<\sigma^{n+2}$ та $-n-s-2<k<0$ із (2) та (3) одержуємо

$$\mathcal{I}_2^1(y,\tau,\sigma) \leq C_6(\sigma^{k+s+n+2}+\sigma^{k+s+n+2}+\sigma^{k+s}m(V)) < C_7\sigma^{k+s+n+2}.$$

За заданим $\varepsilon>0$ вибравши $\sigma<\min\{\left(\frac{\varepsilon}{C_3}\right)^{\frac{1}{k+n+s+2}};\left(\frac{\varepsilon}{C_7}\right)^{\frac{1}{k+n+s+2}};1\}$, для точки $(y,\tau)\in\overline{Q}$, такої, що $||y-\hat{x}||<\frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, $|\tau-\hat{t}|<\frac{\sigma^2}{2}$ та $m(V)<\sigma^{n+2}$, матимемо $\mathcal{I}^1(y,\tau,\sigma)=\mathcal{I}_1^1(y,\tau,\sigma)+\mathcal{I}_2^1(y,\tau,\sigma)<\frac{\varepsilon}{2}$.

2. Для точки $(y,\tau)\in\overline{Q}$, такої, що $||y-\hat{x}||<\frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, $|\tau-\hat{t}|<\frac{\sigma^2}{2}$, подібно знаходимо

$$\mathcal{I}^2(y,\tau,\sigma)=\int\limits_{V\cap\{(x,t)\in Q:\,||x-\hat{x}||\geq\frac{\sigma}{\sqrt{2}},\,|t-\hat{t}|\geq\frac{\sigma^2}{2}\}}|\widetilde{g}_k(x,t;y,\tau)|\,dxdt\leq$$

$$\leq\int\limits_{\substack{V\cap\{(x,t)\in Q:\,||x-\hat{x}||\geq\frac{\sigma}{\sqrt{2}},\,|t-\hat{t}|\geq\frac{\sigma^2}{2};\\ ||x-y||<\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\,|t-\tau|<\frac{\sigma^2}{8}\}}}|\widetilde{g}_k(x,t;y,\tau)|\,dxdt+$$

$$+\int\limits_{\substack{V\cap\{(x,t)\in Q:\,||x-\hat{x}||\geq\frac{\sigma}{\sqrt{2}},\,|t-\hat{t}|\geq\frac{\sigma^2}{2};\\ ||x-y||\geq\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\,|t-\tau|\geq\frac{\sigma^2}{8}\}}}|\widetilde{g}_k(x,t;y,\tau)|\,dxdt\leq$$

$$\leq\begin{cases}C_8(\sigma^{s+n+2}+\sigma^s m(V))\leq C_9\sigma^{s+n+2}\ \text{при}\ k\geq 0\ \text{та}\ m(V)<\sigma^{n+2};\\[2mm] C_{10}(\sigma^k\sigma^{s+n+2}+\sigma^k\sigma^s m(V))\leq C_{11}\sigma^{k+s+n+2}\\ \qquad\qquad\qquad\text{при}\ -s-n-2<k<0\ \text{та}\ m(V)<\sigma^{n+2}.\end{cases}$$

За заданим $\varepsilon>0$, вибравши $\sigma<\min\{\left(\frac{\varepsilon}{C_9}\right)^{\frac{1}{k+n+s+2}};\left(\frac{\varepsilon}{C_{11}}\right)^{\frac{1}{k+n+s+2}};1\}$, для точки $(y,\tau)\in\overline{Q}$, такої, що $||y-\hat{x}||<\frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, $|\tau-\hat{t}|<\frac{\sigma^2}{2}$ та $m(V)<\sigma^{n+2}$, в двох випадках матимемо $\mathcal{I}^2(y,\tau,\sigma)<\frac{\varepsilon}{2}$.

Отже, для довільного $\varepsilon>0$ існує $\sigma<\min\{\left(\frac{\varepsilon}{C_3}\right)^{\frac{1}{k+n+s+2}};\left(\frac{\varepsilon}{C_7}\right)^{\frac{1}{k+n+s+2}};\left(\frac{\varepsilon}{C_9}\right)^{\frac{1}{k+n+s+2}};\left(\frac{\varepsilon}{C_{11}}\right)^{\frac{1}{k+n+s+2}};1\}$, таке, що для довільної підобласті $V\subset Q$, такої, що $m(V)<\sigma^{n+2}$, для довільних $(y,\tau)\in\overline{Q}$ з $||y-\hat{x}||<\frac{\sigma}{\sqrt{2}}$ і $|\tau-\hat{t}|<\frac{\sigma^2}{2}$ виконується

$$\mathcal{I}(y,\tau,\sigma)=\mathcal{I}^1(y,\tau,\sigma)+\mathcal{I}^2(y,\tau,\sigma)<\varepsilon.$$

3. Для точки $(y,\tau)\in\overline{Q}$, такої, що $||y-\hat{x}||\geq\frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, $|\tau-\hat{t}|\geq\frac{\sigma^2}{2}$, розглянемо

$$\mathcal{J}(y,\tau,\sigma)=\mathcal{J}^1(y,\tau,\sigma)+\mathcal{J}^2(y,\tau,\sigma)=$$

$$=\int\limits_{V\cap\{(x,t)\in Q:\,||x-y||<\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\,|t-\tau|<\frac{\sigma^2}{8}\}}|\widetilde{g}_k(x,t;y,\tau)|\,dxdt+$$

$$+ \int\limits_{V\cap\{(x,t)\in Q:\,||x-y||\geq\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\,|t-\tau|\geq\frac{\sigma^2}{8}\}} |\widetilde{g}_k(x,t;y,\tau)|\,dxdt.$$

При $||y-\hat{x}|| \geq \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, $|\tau-\hat{t}| \geq \frac{\sigma^2}{2}$ та $||x-y|| < \frac{\sigma}{2\sqrt{2}}$, $|t-\tau| < \frac{\sigma^2}{8}$ виконується $||x-\hat{x}|| \geq ||y-\hat{x}|| - ||x-y|| > \frac{\sigma}{\sqrt{2}} - \frac{\sigma}{2\sqrt{2}} = \frac{\sigma}{2\sqrt{2}}$,
$|t-\hat{t}| \geq |\tau-\hat{t}| - |t-\tau| > \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma^2}{8} = \frac{3\sigma^2}{8}$. Тоді

$$\mathcal{J}^1(y,\tau,\sigma) \leq \begin{cases} C_{12}\cdot\sigma^k \int\limits_{V\cap\{(x,t)\in Q:\,||x-y||<\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\,|t-\tau|<\frac{\sigma^2}{8}\}} |MP|^s\,dxdt \leq \\ \leq C_{13}\sigma^{k+s+n+2} \quad \text{при } -s-n-2<k<0; \\ \\ C_{14} \int\limits_{V\cap\{(x,t)\in Q:\,||x-y||<\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\,|t-\tau|<\frac{\sigma^2}{8}\}} |MP|^s\,dxdt \leq \\ \leq C_{15}\sigma^{s+n+2} \text{ при } k\geq 0. \end{cases}$$

Розглянемо

$$\mathcal{J}^2(y,\tau,\sigma) \leq C_{16}\sigma^s\Big[\int\limits_{\substack{V\cap\{(x,t)\in Q:\,||x-y||\geq\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\,|t-\tau|\geq\frac{\sigma^2}{8};\\ ||x-\hat{x}||<\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\,|t-\hat{t}|<\frac{\sigma^2}{8}\}}} \varrho_0^k(x,t,\hat{x},\hat{t})\,dxdt +$$

$$+ \int\limits_{\substack{V\cap\{(x,t)\in Q:\,||x-y||\geq\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\,|t-\tau|\geq\frac{\sigma^2}{8};\\ ||x-\hat{x}||\geq\frac{\sigma}{2\sqrt{2}},\,|t-\hat{t}|\geq\frac{\sigma^2}{8}\}}} \varrho_0^k(x,t,\hat{x},\hat{t})\,dxdt\Big] \leq$$

$$\leq \begin{cases} C_{17}(\sigma^{k+s+n+2}+\sigma^{k+s}m(V)) < C_{18}\sigma^{k+s+n+2} \\ \qquad\qquad \text{при } -s-n-2<k<0 \text{ та } m(V)<\sigma^{n+2}; \\ \\ C_{19}\sigma^s(\sigma^k m(V)+m(V)) < C_{20}\sigma^{s+n+2}(\sigma^k+1) < C_{21}\sigma^{s+n+2} \\ \qquad\qquad \text{при } k\geq 0 \text{ та } m(V)<\sigma^{n+2}. \end{cases}$$

Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\sigma < \min\{\left(\frac{\varepsilon}{C_{13}}\right)^{\frac{1}{k+s+n+2}};\ \left(\frac{\varepsilon}{C_{15}}\right)^{\frac{1}{k+s+n+2}};\ \left(\frac{\varepsilon}{C_{18}}\right)^{\frac{1}{k+s+n+2}};\ \left(\frac{\varepsilon}{C_{21}}\right)^{\frac{1}{k+s+n+2}};\ 1\}$ таке, що для довільної підобласті $V \subset Q$ такої, що $m(V) < \sigma^{n+2}$, для довільних $(y,\tau) \in \overline{Q}$, $||y-\hat{x}|| \geq \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, $|\tau-\hat{t}| \geq \frac{\sigma^2}{2}$ виконується

$$\mathcal{J}(y,\tau,\sigma) = \mathcal{J}^1(y,\tau,\sigma) + \mathcal{J}^2(y,\tau,\sigma) < \varepsilon.$$

**Лема 2.** *Нехай* $-n-2 < s < 0$, $k > -n-s-2$, *функція* $F_0$ *при деякому* $C > 0$ *задовольняє умови:*

1) *існує стала* $K_1 > 0$, *така, що для довільних* $\mathrm{v} \in \mathcal{M}_{k,C}(Q,\, \widehat{P})$

$$\int\limits_Q |F_0(y, \tau, \mathrm{v}(y, \tau))|\, dyd\tau \leq K_1;$$

2) *існує неперервна, монотонно неспадна, додатна на* $(0, +\infty)$ *функція* $\psi_C(z)$, $z \in [0, +\infty)$, *така, що* $\psi_C(0) = 0$ *та для довільних* $\mathrm{v}, \mathrm{w} \in \mathcal{M}_{k,C}(Q,\, \widehat{P})$

$$\int\limits_Q |F_0(y, \tau, \mathrm{v}(y, \tau)) - F_0(y, \tau, \mathrm{w}(y, \tau))|\, dyd\tau \leq \psi_C(||\mathrm{v} - \mathrm{w};\, \widehat{P}||_k).$$

*Тоді оператор* $H$ *є цілком неперервним на* $\mathcal{M}_{k,C}(Q,\, \widehat{P})$.

***Доведення*** леми проводимо подібно до доведення леми 4 у [9] та з використанням леми 1.

**Теорема 1.** *Нехай* $-n-2 < s < 0$, $k > -n-s-2$, $h_0 \in \mathcal{M}_k(Q,\, \widehat{P})$, *функція* $F_0$ *задовольняє умови: існує стала* $C_0 > 0$ *така, що для довільної сталої* $C > C_0$ *та для довільних* $\mathrm{v}, \mathrm{w} \in \mathcal{M}_{k,C}(Q,\, \widehat{P})$

$$\int\limits_Q |F_0(y, \tau, \mathrm{v}(y, \tau))|\, dyd\tau \leq \varphi(C), \tag{4}$$

$$\int\limits_Q |F_0(y, \tau, \mathrm{v}(y, \tau)) - F_0(y, \tau, \mathrm{w}(y, \tau))|\, dyd\tau \leq \psi_C(||\mathrm{v} - \mathrm{w};\, \widehat{P}||_k), \tag{5}$$

*де функції* $\varphi(z)$ *та* $\psi_C(z)$, $z \in [0, +\infty)$, *– неперервні, монотонно неспадні, додатні на* $(0, +\infty)$, $\frac{\varphi(z)}{z} \to 0$ *при* $z \to +\infty$, $\psi_C(0) = 0$.

*Тоді існує розв'язок інтегрального рівняння (1) в* $\mathcal{M}_k(Q,\, \widehat{P})$.

*Нехай* $-n-2 < s < 0$, $k > -s-n-2$, $\varkappa \in L^\infty(Q)$, $\sup\limits_{(x,t) \in Q} |\varkappa(x, t)| = \widehat{\varkappa}$, *функція* $f_0(x, t, \mathrm{v})$ *визначена в* $Q \times (-\infty, +\infty)$,

$$\int\limits_Q |f_0(y, \tau, \mathrm{v}(y, \tau))|\, dyd\tau < +\infty \quad \forall \mathrm{v} \in \mathcal{M}_k(Q,\, \widehat{P}) \tag{6}$$

*та існує стала* $K_2 > 0$ *така, що для довільних* $\mathrm{v}, \mathrm{w} \in \mathcal{M}_k(Q,\ \widehat{P})$

$$\int\limits_Q |f_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau)) - f_0(y,\tau,\mathrm{w}(y,\tau))|\, dyd\tau \le K_2 ||\mathrm{v}-\mathrm{w};\ \widehat{P}||_k. \qquad (7)$$

*Тоді існує стала* $\varkappa_0 > 0$ *така, що при* $\widehat{\varkappa} < \varkappa_0$ *інтегральне рівняння (1) з функцією* $F_0(x,t,\mathrm{v}) = \varkappa(x,t)\cdot f_0(x,t,\mathrm{v})$ *однозначно розв'язне у просторі* $\mathcal{M}_k(Q,\ \widehat{P})$. *У цьому випадку оператор* $H_1$ *є стисним.*

Зауважимо, що стала $\varkappa_0$ залежить від сталих $K_2$ та де $L_0^{'}$ – стала з властивості (A2) ядра $\mathcal{K}$ при $|\eta| + 2\eta_0 = 0$, а саме $\varkappa_0 = \frac{1}{K_2 L_0^{'}}$.

**Зауваження 1.** *За умов щодо функції* $\varphi(z)$ *в теоремі 1 для довільних додатних сталих* $C_1^{'}$, $C_2^{'}$ *існує стала* $C_3^{'} > 0$ *така, що*

$$C_1^{'} + C_2^{'}\varphi(C) < C \text{ при } C > C_3^{'}.$$

*Функція* $\varphi(z) = \widehat{K}_1 z^\mu$, $\mu \in (0,1)$, *де* $\widehat{K}_1 = const > 0$, *задовольняє умову теореми 1.*

***Доведення теореми 1.*** Використаємо теорему Шаудера [10, с. 291].

1) Покажемо, що $H_1$ відображає $\mathcal{M}_{k,C}(Q,\ \widehat{P})$ на свою частину.

При $\mathrm{v} \in \mathcal{M}_k(Q,\ \widehat{P})$

$$||H_1\mathrm{v};\ \widehat{P}||_k = \int\limits_Q \varrho_0^k(x,t,\hat{x},\hat{t})|(H_1\mathrm{v})(x,t)|\, dxdt \le ||H\mathrm{v};\ \widehat{P}||_k + ||h_0;\ \widehat{P}||_k \le$$

$$\le \int\limits_Q \varrho_0^k(x,t,\hat{x},\hat{t})\Big(\int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega |\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\cdot|F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))|\, dy\Big)\, dxdt + ||h_0;\ \widehat{P}||_k.$$

Розглянемо

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega |F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))|\Big(\int\limits_\tau^T dt \int\limits_\Omega \varrho_0^k(x,t,\hat{x},\hat{t})|\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\, dx\Big)\, dyd\tau. \qquad (8)$$

За властивістю (A2) ядра $\mathcal{K}$ оцінюємо внутрішній інтеграл. Із (4) випливає скінченість (8), а за теоремою Фубіні – скінченість $||H\mathrm{v};\ \widehat{P}||_k$. Оскільки $h_0 \in \mathcal{M}_k(Q,\ \widehat{P})$, то існує додатна стала $C^{'} = ||h_0;\ \widehat{P}||_k$. Тоді за умови (4) та за властивостями функції $\varphi$ для довільних $\mathrm{v} \in \mathcal{M}_{k,C}(Q,\ \widehat{P})$ та всіх $C > C_0$ одержуємо $||H_1\mathrm{v};\ \widehat{P}||_k \le L_0^{'}\varphi(||\mathrm{v};\ \widehat{P}||_k) + C^{'} \le L_0^{'}\varphi(C) + C^{'} < C$. Отож, випуклу замкнену обмежену підмножину $\mathcal{M}_{k,C}(Q,\ \widehat{P})$ простору $\mathcal{M}_k(Q,\ \widehat{P})$ оператор $H_1$ відображає в себе.

Якщо ж виконується (6), то $||H_1\mathrm{v};\,\widehat{P}||_k < +\infty$ при всіх $\mathrm{v} \in \mathcal{M}_k(Q,\,\widehat{P})$ (оператор $H_1$ діє із простору $\mathcal{M}_k(Q,\,\widehat{P})$ в себе).

2) Так як $\varrho_0^k \cdot h_0 \in L^1(Q)$ при $h_0 \in \mathcal{M}_k(Q,\,\widehat{P})$, то за теоремою про неперервність в цілому функції з $L^1(Q)$ ([12, с. 21]) одержуємо: для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta'' = \delta''(\varepsilon) > 0$ таке, що для довільних $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta''$, $|z_0| < \delta''$
$\int\limits_Q |\varrho_0^k(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \cdot h_0(x+z, t+z_0) - \varrho_0^k(x, t, \hat{x}, \hat{t}) \cdot h_0(x,t)|\,dxdt < \varepsilon.$
Звідси та з леми 2 одержуємо, що $H_1$ є цілком неперервним оператором на $\mathcal{M}_{k,C}(Q,\,\widehat{P})$.

За умови (7) при $k > -n-2$ матимемо

$$||H_1\mathrm{v} - H_1\mathrm{w};\,\widehat{P}||_k \le L_0' K_2 \widehat{\varkappa} ||\mathrm{v}-\mathrm{w};\,\widehat{P}||_k \quad \forall \mathrm{v}, \mathrm{w} \in \mathcal{M}_k(Q,\,\widehat{P}).$$

За умови $L_0' K_2 \widehat{\varkappa} < 1$ одержуємо, що оператор $H_1$ є стисним, а отже, одержуємо не тільки існування, але і єдиність розв'язку інтегрального рівняння (1) в $\mathcal{M}_k(Q,\,\widehat{P})$.

**Наслідок 1.** *Нехай $-n-2 < s < 0$, $k > -n-s-2$, $h_0 \in \mathcal{M}_k(Q,\,\widehat{P})$, $F_0(x,t,\mathrm{v}) = |\mathrm{v}|^q$. Тоді для всіх $q \in (0, \min\{\frac{n+2}{k+n+2}; 1\})$ існує розв'язок рівняння (1) у просторі $\mathcal{M}_k(Q,\,\widehat{P})$.*

***Доведення.*** Достатньо переконатися, що функція $F_0(x,t,\mathrm{v}) = |\mathrm{v}|^q$ задовольняє умови теореми 1. Застосовуючи нерівність Гельдера, оцінимо

$$\int\limits_Q |\mathrm{v}(y,\tau)|^q\,dyd\tau = \int\limits_Q \varrho_0^{kq}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\varrho_0^{-kq}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\mathrm{v}(y,\tau)|^q\,dyd\tau =$$

$$= \int\limits_Q (\varrho_0^k(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\mathrm{v}(y,\tau)|)^q [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{-kq}\,dyd\tau \le$$

$$\le (||\mathrm{v};\,\widehat{P}||_k)^q \Big(\int\limits_Q [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\frac{-kq}{1-q}}\,dyd\tau\Big)^{1-q}.$$

Інтеграл в останній рівності збігається при $\frac{-kq}{1-q} > -n-2$, а отже, при всіх $q \in (0, \min\{\frac{n+2}{k+n+2}; 1\})$ функція $F_0$ задовольняє умову (4).

Використовуючи формулу $|a^\mu - b^\mu| \le |a-b|^\mu$ при $a,\,b > 0$, $\mu \in (0,1)$ та нерівність Гельдера, оцінюємо

$$\int\limits_Q ||\mathrm{v}(y,\tau)|^q - |\mathrm{w}(y,\tau)|^q|\,dyd\tau \le (||\mathrm{v}-\mathrm{w};\,\widehat{P}||_k)^q \Big(\int\limits_Q [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\frac{-kq}{1-q}}\,dyd\tau\Big)^{1-q},$$

де інтеграл збігається при $q \in (0, \min\{\frac{n+2}{k+n+2}; 1\})$. Отже, виконується умова (5).

Якщо $q$ відоме, то наслідок 1 можна сформулювати по-іншому (отримати простори $\mathcal{M}_k(Q,\, \widehat{P})$, для яких існує розв'язок $u \in \mathcal{M}_k(Q,\, \widehat{P})$ рівняння (1)): *якщо* $-n-2 < s < 0$, $q \in (0,1)$, $h_0 \in \mathcal{M}_k(Q,\, \widehat{P})$, $-n-s-2 < \\ < k < -(n+2) + \frac{n+2}{q}$, *то існує розв'язок* $u \in \mathcal{M}_k(Q,\, \widehat{P})$ *рівняння (1).*

**Зауваження 2.** *При* $-n-2 < s < 0$ *умова наслідку 1 щодо* $q$ *рівнозначна наступному:*
$q \in (0,1)$ *для* $-s-n-2 < k < 0$,
$q \in (0, \frac{n+2}{k+n+2})$ *для* $k \geq 0$.

## ХАРАКТЕР ТОЧКОВИХ СТЕПЕНЕВИХ ОСОБЛИВОСТЕЙ РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ВОЛЬТЕРРИ

Для довільної фіксованої точки $\widehat{P} = (\hat{x}, \hat{t}) \in Q$ та $\alpha \in \mathbb{R}_- \cup \{0\}$ введемо функційний простір:
$\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\, \widehat{P}) = \{\mathrm{v} \in C(\overline{Q} \setminus \{\widehat{P}\}) : \varrho_0^{-\alpha}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\mathrm{v}(y,\tau) \in C(\overline{Q})$
$(||\mathrm{v};\, \widehat{P}||'_\alpha = \sup\limits_{(y,\tau)\in\overline{Q}} \varrho_0^{-\alpha}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})|\mathrm{v}(y,\tau)| < +\infty)\}$.

Оскільки при $\mathrm{v} \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\, \widehat{P})$ та $k + \alpha > -n-2$ виконується

$$||\mathrm{v};\, \widehat{P}||_k = \int\limits_Q \varrho_0^k(M,\widehat{P})|\mathrm{v}(y,\tau)|\, dyd\tau \leq \widehat{C} \int\limits_Q \varrho_0^k(M,\widehat{P})[\varrho_0(M,\widehat{P})]^\alpha\, dyd\tau \leq$$

$$\leq \widehat{C} \int\limits_{\{M:\, |M\widehat{P}|<\varepsilon_0\}} [\varrho_0(M,\widehat{P})]^{k+\alpha}\, dyd\tau + \widehat{C} \int\limits_{\{M:\, |M\widehat{P}|>\varepsilon_0\}} dyd\tau < +\infty,$$

то $\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\, \widehat{P}) \subset \mathcal{M}_k(Q,\, \widehat{P})$ при $k > -\alpha-n-2$, де $\widehat{C}$ – додатна стала.

Нехай $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q},\, \widehat{P}) = \{\mathrm{v} \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\, \widehat{P}) : ||\mathrm{v};\, \widehat{P}||'_\alpha \leq \widetilde{C}\}$ – замкнена куля радіуса $\widetilde{C}$ у просторі $\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\, \widehat{P})$.

Нехай $h_0 \in \widetilde{\mathcal{M}}_l(\overline{Q}, \widehat{P})$, де $l \in \mathbb{R}$. Із зробленого зауваження випливає, що $h_0 \in \mathcal{M}_k(Q,\, \widehat{P})$ при $k > -l-n-2$.

Розглянемо інтегральне рівняння

$$\mathrm{v}(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega \varkappa(y,\tau)\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\mathrm{v}(y,\tau)|^q\, dy + h_0(x,t) \qquad (9)$$

при $q > 1$, $\varkappa \in L^\infty(Q)$, $\sup\limits_{(x,t)\in Q} |\varkappa(x,t)| = \widehat{\varkappa}$ та $h_0 \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\, \widehat{P})$.

**Теорема 2.** *Нехай* $-n-2 < s < 0$, $q > 1$, $h_0 \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\, \widehat{P})$, *де* $-\frac{n+s+2}{q-1} \leq \alpha \leq 0$ *та* $\alpha > -\frac{n+2}{q}$.
*Тоді існує додатна стала* $\varkappa_0$ *така, що при* $\widehat{\varkappa} < \varkappa_0$ *інтегральне рівняння (9) має розв'язок у просторі* $\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q}, \widehat{P})$ *і при* $k > -\alpha-n-2$ *цей розв'язок належить* $\mathcal{M}_k(Q,\, \widehat{P})$.

Зауважимо, що стала $\varkappa_0$ залежить від сталих $q$, $\widetilde{C}$ та $L_0'$, де $L_0'$ – стала з властивості (A1) ядра $\mathcal{K}$ при $|\eta| + 2\eta_0 = 0$.

Для доведення теореми 2 використаємо принцип стисних відображень: покажемо існування сталої $\widetilde{C}$ такої, що рівняння (9) однозначно розв'язне у $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\, \widehat{P})$. Тоді при $k > -\alpha - n - 2$ цей розв'язок належатиме $\mathcal{M}_k(Q,\, \widehat{P})$. Використаємо наступну лему.

**Лема 3.** *За умов теореми 2 існують додатні сталі* $\widetilde{C}$, $\varkappa_0$ *такі, що при* $\widehat{\varkappa} \leq \varkappa_0$ *оператор* $H_1$ *відображає* $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\, \widehat{P})$ *в себе.*

***Доведення.*** При $\mathrm{v} \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\, \widehat{P})$, де $\widetilde{C}$ – довільна додатна стала, розглянемо $||H_1\mathrm{v}; \widehat{P}||_\alpha' \leq \sup\limits_{(x,t)\in\overline{Q}} \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\Big(\widehat{\varkappa}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega |\mathcal{K}(x,t;y,\tau)| \times$
$\times |\mathrm{v}(y,\tau)|^q\, dy\Big) + ||h_0; \widehat{P}||_\alpha'$.

Використовуючи властивість (A1) ядра $\mathcal{K}$ при $-n-2 < \alpha q \leq 0$ і те, що при $h_0 \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\, \widehat{P})$ існує додатна стала $\widehat{C}$ така, що $||h_0;\, \widehat{P}||_\alpha' \leq \widehat{C}$ матимемо $||H_1\mathrm{v}; \widehat{P}||_\alpha' \leq$
$\leq \widehat{\varkappa}L_0'\widetilde{C}^q \sup\limits_{(x,t)\in\overline{Q}} \{\max\{[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha(q-1)+2+n+s},\, [\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\}\} + \widehat{C}$.

Звідси випливає, що за умов

$$\begin{cases} -n-2 < \alpha q \leq 0, \\ \alpha(q-1) + 2 + n + s \geq 0, \\ -\alpha \geq 0 \end{cases} \tag{10}$$

при $\mathrm{v} \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\, \widehat{P})$, $\widetilde{C}\,' = \widetilde{C}\,'(q) = \widehat{\varkappa}L_0'\widetilde{C}^q + \widehat{C}$

$$||H_1\mathrm{v}; \widehat{P}||_\alpha' \leq \widetilde{C}\,'. \tag{11}$$

Розглянемо нерівність

$$\mathcal{B}_0\widetilde{C}^q + \widehat{C} \leq \widetilde{C}, \text{ де } \mathcal{B}_0 = \widehat{\varkappa}L_0'. \tag{12}$$

Згідно з [2, с. 320], при $a > 0$, $b > 0$, $\alpha > 1$ та умові $\min\limits_{0\leq s<+\infty}(bs^\alpha - s) \leq$ $\leq -a$ існує $r > 0$, яке задовольняє нерівність $a + br^\alpha \leq r$.

Розглянемо функцію $\mathcal{F}(s)=\mathcal{B}_0 s^q - s$ і знайдемо $\min\limits_{0\le s<+\infty}\mathcal{F}(s)$. Маємо $\mathcal{F}'(s)=\mathcal{B}_0 q s^{q-1}-1$, $\mathcal{F}'(s)=0 \Leftrightarrow s_0=(\mathcal{B}_0 q)^{-\frac{1}{q-1}}$; $s_0$ – точка локального та абсолютного мінімуму функції $\mathcal{F}(s)$.
Тоді $\mathcal{F}(s_0)=\mathcal{B}_0(\mathcal{B}_0 q)^{-\frac{q}{q-1}}-(\mathcal{B}_0 q)^{-\frac{1}{q-1}}=-\frac{1}{(\mathcal{B}_0 q)^{\frac{1}{q-1}}}\cdot\frac{q-1}{q}$;

(12) $\Leftrightarrow \min\limits_{0\le s<+\infty}\mathcal{F}(s)\le -\widehat{C} \Leftrightarrow -\frac{1}{(\mathcal{B}_0 q)^{\frac{1}{q-1}}}\cdot\frac{q-1}{q}\le -\widehat{C} \Leftrightarrow \widehat{\varkappa}\le \frac{(q-1)^{q-1}}{q^q L_0'\widehat{C}^{q-1}}$.
Тому за умов (10) та при $\widehat{\varkappa}\le\varkappa_0=\frac{(q-1)^{q-1}}{q^q L_0'\widehat{C}^{q-1}}$ із (11) одержуємо існування додатної сталої $\widetilde{C}$ такої, що оператор $H_1$ відображає $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q},\,\widehat{P})$ в себе.

***Доведення теореми 2.*** Використаємо принцип стисних відображень.

За лемою 3 існують додатні сталі $\widetilde{C}$, $\varkappa_0=\varkappa_0(L_0',h_0,q)$ такі, що при $\widehat{\varkappa}\le\varkappa_0$ оператор $H_1$ діє із простору $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q},\,\widehat{P})$ в себе.

Розглянемо для довільних v, w $\in\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q},\,\widehat{P})$

$$||H_1\mathrm{v}-H_1\mathrm{w};\,\widehat{P}||_\alpha'=\sup_{(x,t)\in\overline{Q}}\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})|(H_1\mathrm{v})(x,t)-(H_1\mathrm{w})(x,t)|\le$$

$$\le\widehat{\varkappa}\sup_{(x,t)\in\overline{Q}}\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\int_0^t d\tau\int_\Omega|\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\cdot||\mathrm{v}(y,\tau)|^q-|\mathrm{v}(y,\tau)|^q|\,dy.$$

Враховуючи, що при $a>0$, $b>0$, $\lambda>1$ виконується нерівність $a^\lambda-b^\lambda\le R(\lambda)(a-b)(a+b)^{\lambda-1}$, де $R(\lambda)$ – додатна стала [13, с. 133], при $a=|\mathrm{v}(y,\tau)|$, $b=|\mathrm{w}(y,\tau)|$, $\lambda=q$ одержуємо
$||\mathrm{v}(y,\tau)|^q-|\mathrm{w}(y,\tau)|^q|\le R(q)||\mathrm{v}(y,\tau)|-|\mathrm{w}(y,\tau)||\cdot(|\mathrm{v}(y,\tau)|+|\mathrm{w}(y,\tau)|)^{q-1}$,
а, отже, матимемо

$$\int_0^t d\tau\int_\Omega|\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\cdot||\mathrm{v}(y,\tau)|^q-|\mathrm{v}(y,\tau)|^q|\,dy\le$$

$$\le R(q)\int_0^t d\tau\int_\Omega|\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\cdot(|\mathrm{v}(y,\tau)|+|\mathrm{w}(y,\tau)|)^{q-1}|\mathrm{v}(y,\tau)-\mathrm{w}(y,\tau)|\,dy\le$$

$$\le 2R(q)\widetilde{C}^{q-1}\int_0^t d\tau\int_\Omega|\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\cdot[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha(q-1)}|\mathrm{v}(y,\tau)-\mathrm{w}(y,\tau)|\,dy\le$$

$$\leq 2R(q)\widetilde{C}^{q-1}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_\Omega |\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\cdot[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha q}\sup_{(y,\tau)\in\overline{Q}}[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\times$$

$$\times|\mathrm{v}(y,\tau)-\mathrm{w}(y,\tau)|\,dy\leq 2R(q)\widetilde{C}^{q-1}||\mathrm{v}-\mathrm{w};\,\widehat{P}||_\alpha'\int\limits_0^t d\tau\int\limits_\Omega |\mathcal{K}(x,t;y,\tau)|\times$$

$$\times[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha q}\,dy.$$

Використовуючи властивості ядра $\mathcal{K}$, при умовах теореми щодо $\alpha$ та $-n-2<\alpha q\leq 0$ знаходимо

$$||H_1\mathrm{v}-H_1\mathrm{w};\,\widehat{P}||_\alpha'\leq 2\widehat{\varkappa}L_0'R(q)\widetilde{C}^{q-1}||\mathrm{v}-\mathrm{w};\,\widehat{P}||_\alpha'\times$$

$$\times\sup_{(x,t)\in\overline{Q}}\{\max\{[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha(q-1)+2+n+s},\,[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\}\}\leq$$

$$\leq 2\widehat{\varkappa}L_0'K_2||\mathrm{v}-\mathrm{w};\,\widehat{P}||_\alpha'.$$

За умови $\widehat{\varkappa}L_0'K_2(q,\,\widetilde{C})<1$ одержуємо, що оператор $H_1$ є стисним у $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\,\widehat{P})$.

**Зауваження 3.** *У випадках*
$-n-2<s<0,\ 1<q\leq-\frac{n+2}{s},\ -\frac{n+2}{q}<\alpha\leq 0;$
$-n-2<s<0,\ q>-\frac{n+2}{s},\ -\frac{n+s+2}{q-1}\leq\alpha\leq 0,$
*зокрема,*
$s=-1,\ 1<q\leq n+2,\ -\frac{n+2}{q}<\alpha\leq 0,$
*або* $s=-1,\ q>n+2,\ -\frac{n+1}{q-1}\leq\alpha\leq 0;$
$s=-n,\ 1<q\leq\frac{n+2}{n},\ -\frac{n+2}{q}<\alpha\leq 0,$
*або* $s=-n,\ q>\frac{n+2}{n},\ -\frac{2}{q-1}\leq\alpha\leq 0$
*при* $k>-\alpha-n-2$ *умови теореми 2 виконуються.*

Для довільної фіксованої точки $(\hat{x},\hat{t})\in\Sigma$ розглянемо задачу

$$\begin{aligned}&Lu(x,t)\equiv\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\triangle u(x,t)=\varkappa(x,t)|u(x,t)|^q,\ (x,t)\in Q,\\&u\,|_{\Sigma}=F_1(x,t),\ (x,t)\in\Sigma,\qquad u\,|_{t=0}=F_2(x),\ x\in\Omega,\end{aligned}\tag{13}$$

де $q>1,\ \varkappa\in L^\infty(Q),\ \sup\limits_{(x,t)\in Q}|\varkappa(x,t)|=\widehat{\varkappa};$

$$\begin{aligned}&F_1(x,t)=\sum_{|l|\leq p_1}\sum_{m=0}^{p_2}C_{lm}D_x^l\delta(x-\hat{x})\delta^{(m)}(t-\hat{t}),\\&\qquad C_{lm}=const,\ l=\overline{0,p_1},\ m=\overline{0,p_2},\\&\qquad p_1,p_2\in\mathbb{N}\cup\{0\};\\&F_2(x)=\sum_{|r|\leq p_3}C_rD_x^r\delta(x-\hat{x}),\ C_r=const,\ r=\overline{0,p_3},\ p_3\in\mathbb{N}\cup\{0\}.\end{aligned}\tag{14}$$

Розв'язність задачі (13) у просторі $\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\widehat{P})$ зводиться до розв'язності інтегрального рівняння (9) з ядром – функцією Ґріна першої крайової задачі для рівняння теплопровідності. З теореми 2 та зауваження 3 випливає

**Наслідок 2.** *Існує стала $\varkappa_0$ така, що при $\widehat{\varkappa} < \varkappa_0$ крайова задача (13) при $q \in (1, 1+\frac{2}{n}]$, функціях $F_1$, $F_2$ вигляду (14), де $p_1 = p_2 = 0$, $p_3 = \{0;1\}$, $-\frac{n+2}{q} < \alpha \le -1-n$*
*($F_1(x,t) = C_{0\,0}\delta(x-\hat{x})\delta(t-\hat{t})$;*
*$F_2(x) = C_0\delta(x-\hat{x}) + \sum\limits_{j=1}^{n} C_j\frac{\partial}{\partial x_j}\delta(x-\hat{x})$, де $p_3 = 0$, якщо $C_j = 0$, $j = \overline{1,n}$, $p_3 = 1$, якщо хоч одна із сталих $C_j \ne 0$, $j = \overline{1,n}$), має розв'язок у просторі $\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\widehat{P})$ і при $k > -\alpha - n - 2$ цей розв'язок належить $\mathcal{M}_k(Q,\widehat{P})$.*

Для узагальненої крайової задачі Неймана

$$\begin{aligned} &Lu(x,t) \equiv \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \triangle u(x,t) = \varkappa(x,t)|u(x,t)|^q,\ (x,t)\in Q,\\ &\frac{\partial u}{\partial \nu}\,|_{\Sigma} = F_1(x,t),\ (x,t)\in\Sigma, \qquad u\,|_{t=0} = F_2(x),\ x\in\Omega, \end{aligned} \tag{15}$$

де $\nu$ – орт внутрішньої нормалі до $S$, одержуємо подібний результат.

**Наслідок 3.** *Існує стала $\varkappa_0$ така, що при $\widehat{\varkappa} < \varkappa_0$ крайова задача (15) при $q \in (1, 1+\frac{2}{n}]$, функціях $F_1$, $F_2$ вигляду (14), де $p_1 = \{0;1\}$, $p_2 = 0$, $p_3 = \{0;1\}$, $-\frac{n+2}{q} < \alpha \le \min\{-p_1;-p_3\} - n$*
*($F_1(x,t) = C_{0\,0}\delta(x-\hat{x})\delta(t-\hat{t}) + \sum\limits_{i=1}^{n} C_{i\,0}\frac{\partial}{\partial x_i}\delta(x-\hat{x})\delta(t-\hat{t})$;*
*$F_2(x) = C_0\delta(x-\hat{x}) + \sum\limits_{j=1}^{n} C_j\frac{\partial}{\partial x_j}\delta(x-\hat{x})$, де $p_1 = 0$, $p_3 = 0$, якщо відповідно $C_{i\,0} = 0$, $C_j = 0$, $i$, $j = \overline{1,n}$, $p_1 = 1$, $p_3 = 1$, якщо відповідно хоч одна із сталих $C_{i\,0} \ne 0$, $C_j \ne 0$, $i$, $j = \overline{1,n}$), має розв'язок у просторі $\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\widehat{P})$ і при $k > -\alpha - n - 2$ цей розв'язок належить $\mathcal{M}_k(Q,\widehat{P})$.*

## ВИСНОВКИ

У статті розглянуто нелінійне інтегральне рівняння Вольтерри з полярним ядром у $L^1$- просторі з вагою порядку функції $dist^k((x,t),\widehat{P})$ при $dist((x,t),\widehat{P}) \to 0$, $k \in \mathbb{R}$. Методом нерухомої точки встановлено достатні умови розв'язності нелінійного інтегрального рівняння Вольтерри. Досліджено характер точкових степеневих особливостей розв'язку цього рівняння.

[1] *Ивасишен С.Д.* О композиции параболических ядер // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 1. – С. 35 – 45.

[2] *Крейн В.С.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1972. – 544 с.

[3] *Лопушанська Г. П.* Задача Діріхле для квазілінійних еліптичних рівнянь у просторі розподілів // Вісн. Львів. нац. ун-ту Сер. мех.– матем. – 1990, вип. 34. – С. 26–31.

[4] *Лопушанська Г. П.* Про розв'язок параболічної граничної задачі із сильними степеневими особливостями в правих частинах // Математичні Студії. – 2001. – **15**, № 2. – С. 179 – 190.

[5] *Лопушанська Г.П.* Крайові задачі у просторі узагальнених функцій $D^{'}$. – Львів: Вид.-во Львів. нац. ун-ту, 2002. – 285 с.

[6] *Лопушанська Г.П., Чмир О.Ю.* Про деякі властивості спряжених операторів Ґріна параболічної крайової задачі // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. – Математика. – Вип. 191–192, 2004. – С. 82–88.

[7] *Лопушанська Г.П.* Узагальнені крайові задачі для лінійних та напівлінійних еліптичних рівнянь // Укр. мат. вісн. – 2005. **2**, №3. – С. 377 – 394.

[8] *Лопушанська Г.П., Чмир О.Ю.* Узагальнені крайові значення розв'язків півлінійних еліптичних та параболічних рівнянь // Нелинейные граничные задачи. – 2007. – **17**. – С. 51 – 73.

[9] *Лопушанська Г.П., Чмир О.Ю.* Про розв'язки узагальнених нормальних крайових задач для квазілінійних параболічних систем рівнянь з лінійними головними частинами // Математичні Студії. – 2007. – **27**, № 2. – С. 149 – 162.

[10] *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с.

[11] *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. – М.:Наука, 1981. – 800 с.

[12] *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988. – 336 с.

[13] *Соболев С.Л.* Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщённых функций. – М.: Наука, 1989. – 254 с.

## THE POINTED POWER SPECIALITIES OF THE SOLUTION OF VOLTERRA NONLINEAR INTEGRAL EQUATION

*Oksana CHMYR*

Lviv State University of vital activity safety,
35 Kleparivska Str., Lviv 79000, Ukraine

The sufficient conditions of the solvability for Volterra nonlinear integral equation with the polar kernel in weight $L^1$ - spaces of functions with pointed specialities are obtained. The character of specialities of the solution of the equation is investigated.