ПРО АСИМПТОТИЧНУ РІВНІСТЬ ПОХІДНИХ ЛОГАРИФМІВ МАКСИМУМУ МОДУЛЯ І МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ

©2009 р. Петро ФІЛЕВИЧ

Львівський національний університет ветеринарної медицини та біотехнології ім. С.З.Гжицького, вул. Пекарська, 50, Львів 79010

Редакція отримала статтю 13 лютого 2009 р.

Для цілої функції $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ з максимумом модуля $M_f(r)=\max\{|f(z)|:|z|=r\}$ і максимальним членом $\mu_f(r)=\max\{|a_n|r^n:n\geq 0\}$ знайдено достатні і необхідні умови, за яких $(\ln M_f(r))'_+\sim(\ln\mu_f(r))'_+$, $r\to+\infty$.

1. Вступ. Нехай $\mathcal{A}$ — клас трансцендентних цілих функцій

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n. \tag{1}$$

Для функції (1) і довільного $r>0$ покладемо $M_f(r)=\max\{|f(z)|:|z|=r\}$, $\mu_f(r)=\max\{|a_n|r^n:n\geq 0\}$, $\nu_f(r)=\max\{n\geq 0:|a_n|r^n=\mu_f(r)\}$, $K_f(r)=r(\ln M_f(r))'_+$. Відомо, що $\mu_f(r)\leq M_f(r)$ і $\nu_f(r)=r(\ln\mu_f(r))'_+$ для всіх $r>0$.

Через I позначимо клас неперервних справа, неспадних, необмежених на $[a;+\infty)$ функцій, через L — клас неперервних, зростаючих до $+\infty$ на $[a;+\infty)$ функцій, а через Ω — класс опуклих на $[a;+\infty)$ функцій Φ, для яких $\frac{\Phi(\sigma)}{\sigma}\to+\infty$, $\sigma\to+\infty$. Відомо, що $\Phi\in\Omega$ тоді і лише тоді, коли $\Phi'_+\in I$, і $\ln M_f(e^\sigma)\in\Omega$, $\ln\mu_f(e^\sigma)\in\Omega$ для кожної цілої функції $f\in\mathcal{A}$.

Для довільної $\Phi\in\Omega$ покладемо $\mathcal{A}(\Phi)=\{f\in\mathcal{A}:\ln\mu_f(r)\sim\Phi(\ln r),\ r\to+\infty\}$. Ж. Клуні [1] довів наступне твердження.

УДК 517.53; MSC 2000: 30D20

Теорема A ([1]). *Для кожної функції $\Phi \in \Omega$ існує ціла функція $f \in \mathcal{A}(\Phi)$ вигляду (1), для якої $a_n \geq 0$ і*

$$\ln M_f(r) \sim \ln \mu_f(r), \qquad r \to +\infty. \tag{2}$$

З іншого боку, правильне наступне твердження.

Теорема B ([2]). *Нехай $\Phi \in \Omega$. Для того щоб для довільної цілої функції $f \in \mathcal{A}(\Phi)$ виконувалось співвідношення (2), необхідно і досить, щоб*

$$\ln \Phi'_+(\sigma) = o(\Phi(\sigma)), \qquad \sigma \to +\infty. \tag{3}$$

Метою цієї роботи є встановлення аналогу теореми B для співвідношення

$$K_f(r) \sim \nu_f(r), \qquad r \to +\infty. \tag{4}$$

Тут доведемо таку теорему.

Теорема 1. *Нехай $\Phi \in \Omega$. Для того, щоб для довільної цілої функції $f \in \mathcal{A}(\Phi)$ було правильним співвідношення (4), необхідно і досить, щоб одночасно виконувались співвідношення (3) і умова*

$$\forall l \in L: \qquad \Phi'_+\left(\sigma + \frac{\Phi(\sigma)}{l(\sigma)\Phi'_+(\sigma)}\right) \sim \Phi'_+(\sigma), \qquad \sigma \to +\infty. \tag{5}$$

Наступне твердження, яке використаємо при доведенні теореми 1, доповнює результати роботи [3].

Теорема 2. *Нехай $\Phi \in \Omega$. Для того, щоб для довільної функції $\Psi \in \Omega$ такої, що $\Psi(\sigma) \sim \Phi(\sigma)$, $\sigma \to +\infty$, було правильним співвідношення $\Psi'_+(\sigma) \sim \Phi'_+(\sigma)$, $\sigma \to +\infty$, необхідно і досить, щоб виконувалась умова (5).*

Зауважимо, що з теорем 2 і A випливає також

Теорема 3. *Нехай $\varphi \in I$, $\Phi(\sigma) = \int_a^\sigma \varphi(x)dx$. Якщо виконується умова (5), то існує ціла функція f вигляду (1), для якої $a_n \geq 0$ і $rf'(r)/f(r) \sim \varphi(\ln r)$, $r \to +\infty$.*

Справді, за теоремою A існує ціла функція f вигляду (1), така, що $a_n \geq 0$ і $\ln M_f(r) \sim \Phi(\ln r)$, $r \to +\infty$. За теоремою 2 для функції f отримуємо $K_f(r) \sim \nu_f(r)$, $r \to +\infty$, тобто $rf'(r)/f(r) \sim \varphi(\ln r)$, $r \to +\infty$, що й стверджує теорема 3.

Зазначимо, що в [4] справедливість висновку теореми 3 встановлено у випадку, якщо $\varphi(\ln r) = r\gamma(r)$, де γ — неперервно диференційовна функція, для якої $r\gamma'(r)/\gamma(r) \to 0$, $r \to +\infty$. Але остання умова означає [5], що γ — повільно змінна функція, тобто $\gamma(cx) \sim \gamma(x)$, $x \to +\infty$, для кожного $c > 1$. Отже, $\varphi(\ln r)$ — правильно змінна функція порядку 1. (Нагадаємо, що функція $\varphi(\ln r)$ називається правильно змінною порядку $\rho > 0$, якщо $\varphi(\ln r) = r^\rho \gamma(x)$, де γ — повільно змінна.) Можна довести (на цьому зупинятися не будемо), що $\varphi(\ln r)$ — правильно змінна функція порядку $\rho > 0$ тоді і лише тоді, коли $\varphi(\ln r)/\Phi(\ln r) \to \rho$, $r \to +\infty$. Отже, у випадку, коли $\varphi(\ln r)$ — правильно змінна функція порядку $\rho > 0$, співвідношення (5) виконується, а тому згаданий результат з [4] міститься в теоремі 3.

2. Допоміжні результати. Для доведення теорем 1 і 2 нам потрібні наступні прості леми, які, для повноти картини, подаємо з доведеннями.

Лема 1. *Нехай $\varphi \in I$, $\beta(\sigma) = [\varphi(\sigma)]$. Тоді*

1) $\varphi(\sigma) \sim \beta(\sigma)$, $\sigma \to +\infty$;

2) існують зростаючі до $+\infty$ послідовності $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ і $(\varkappa_k)_{k=0}^{\infty}$ відповідно значень і точок розриву функції β такі, що

$$\beta(\sigma) = n_0 \ (\sigma \in [a; \varkappa_0)), \qquad \beta(\sigma) = n_{k+1} \ (\sigma \in [\varkappa_k; \varkappa_{k+1}), \ k \geq 0); \tag{6}$$

3) для того, щоб існувала функція $\gamma \in L$ така, що $\varphi(\sigma) \sim \gamma(\sigma)$, $\sigma \to +\infty$, необхідно і досить, щоб $n_{k+1} \sim n_k$, $k \to +\infty$;

4) існує функція $\gamma \in L$ така, що $\varphi(\sigma) \sim \gamma(\sigma)$, $\sigma \to +\infty$, якщо існує неперервна, додатна на $[a; +\infty)$ функція α, для якої

$$\varphi(\sigma + \alpha(\sigma)) \sim \varphi(\sigma), \qquad \sigma \to +\infty. \tag{7}$$

Доведення. Твердження 1)–3) очевидні. Доведемо 4).

Перш за все зауважимо, що для кожної точки $\varkappa \in (a; +\infty)$ існує точка $\sigma \in (a; \varkappa)$ така, що $\sigma + \alpha(\sigma) > \varkappa$. Справді, якщо $\sigma + \alpha(\sigma) \leq \varkappa$ для всіх $\sigma \in (a; \varkappa)$, то тоді при $\sigma \to \varkappa - 0$ отримали б, що $\varkappa + \alpha(\varkappa) \leq \varkappa$, тобто $\alpha(\varkappa) \leq 0$, а це неможливо.

Отже, для кожного $k \geq 0$ можна знайти точку $\sigma_k > a$ таку, що $\sigma_k + \alpha(\sigma_k) > \varkappa_k$. Звідси випливає, що $n_{k+1} \sim n_k$, $k \to +\infty$. Справді, якщо $n_{k+1} \geq (1+\varepsilon)n_k$ для деякого $\varepsilon > 0$ і для нескінченного числа значень k, то для таких k

$$\frac{\beta(\sigma_k + \alpha(\sigma_k))}{\beta(\sigma_k)} \geq \frac{\beta(\varkappa_k)}{\beta(\sigma_k)} \geq \frac{n_{k+1}}{n_k} \geq 1 + \varepsilon.$$

Це суперечить (7), бо $\varphi(\sigma) \sim \beta(\sigma)$, $\sigma \to +\infty$. Отже, співвідношення $n_{k+1} \sim n_k$, $k \to +\infty$, виконується, а тому 4) випливає з 3). Лему доведено.

Лема 2. *Нехай $\Phi \in \Omega$. Якщо умова (5) не виконується, то існують функції $\Psi \in \Omega$ і $\psi \in I$ з наступними властивостями:*

1) $\Psi(\sigma) = \int_a^\sigma \psi(x)dx$ і $\Phi(\sigma) \sim \Psi(\sigma)$, $\sigma \to +\infty$;

2) не існує функції $h \in L$ такої, що $\psi(\sigma) \sim h(\sigma)$, $\sigma \to +\infty$.

Доведення. Нехай $\beta(\sigma) = [\Phi'_+(\sigma)]$, а $(n_k)_{k=0}^\infty$ і $(\varkappa_k)_{k=0}^\infty$ — зростаючі до $+\infty$ послідовності такі, що виконується (6). Якщо $n_{k+1} \not\sim n_k$, $k \to \infty$, то, згідно з лемою 1, можемо вибрати $\psi(\sigma) = \Phi'_+(\sigma)$.

Розглянемо випадок, коли $n_{k+1} \sim n_k$, $k \to \infty$. Тоді за лемою 1 існує функція $\gamma \in L$ така, що $\Phi'(\sigma) \sim \gamma(\sigma)$, $\sigma \to +\infty$, а тому $\Phi(\sigma) \sim \Gamma(\sigma)$, $\sigma \to +\infty$, де $\Gamma(\sigma) = \int_a^\sigma \gamma(x)dx$. Оскільки для функції Φ умова (5) не виконується, то аналогічна умова не виконується і для функції Γ, тобто існують функція $l \in L$, число $\varepsilon > 0$ і настільки швидко зростаюча до $+\infty$ послідовність $(\sigma_k)_{k=0}^\infty$, що $\sigma_0 > a$ і для кожного $k \geq 0$

$$\gamma\left(\sigma_k + \frac{\Gamma(\sigma_k)}{l(\sigma_k)\gamma(\sigma_k)}\right) \geq (1+\varepsilon)\gamma(\sigma_k), \qquad \sigma_{k+1} > \sigma_k + \frac{\Gamma(\sigma_k)}{l(\sigma_k)\gamma(\sigma_k)},$$

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{\Gamma(\sigma_i)}{l(\sigma_i)} \leq \frac{\Gamma(\sigma_k)}{k+1}.$$

Оскільки $\gamma \in L$, то існує додатна послідовність $(\delta_k)_{k=0}^\infty$ така, що $\gamma(\sigma_k + \delta_k) = (1+\varepsilon)\gamma(\sigma_k)$. Зрозуміло, що тоді

$$\delta_k \leq \frac{\Gamma(\sigma_k)}{l(\sigma_k)\gamma(\sigma_k)} < \sigma_{k+1} - \sigma_k.$$

Визначимо функцію ψ так: якщо $\sigma \in [\sigma_k; \sigma_k + \delta_k)$ для деякого $k \geq 0$, то нехай $\psi(\sigma) = \gamma(\sigma_k + \delta_k)$, а якщо $\sigma \notin [\sigma_k; \sigma_k + \delta_k)$ для кожного $k \geq 0$, то нехай $\psi(\sigma) = \gamma(\sigma)$. Зрозуміло, що $\psi \in I$ і $\psi(\sigma) \geq \gamma(\sigma)$. Тому для всіх $\sigma \in [\sigma_k; \sigma_k + \delta_k)$ і $k \geq 0$ отримуємо

$$0 \leq \Psi(\sigma) - \Gamma(\sigma) = \int\limits_a^\sigma (\psi(x) - \gamma(x))dx \leq \sum_{i=0}^{k} \int\limits_{\sigma_i}^{\sigma_i+\delta_i} (\psi(x) - \gamma(x))dx \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{k} \delta_i(\gamma(\sigma_i + \delta_i) - \gamma(\sigma_i)) = \varepsilon \sum_{i=0}^{k} \delta_i \gamma(\sigma_i) \leq \varepsilon \sum_{i=0}^{k} \frac{\Gamma(\sigma_i)}{l(\sigma_i)\gamma(\sigma_i)} \gamma(\sigma_i) \leq$$

$$\leq \frac{\Gamma(\sigma_k)}{k+1},$$

звідки бачимо, що

$$\int\limits_a^\sigma \psi(x)dx \sim \Gamma(\sigma) \sim \Phi(\sigma), \qquad \sigma \to +\infty,$$

і, отже, твердження 1) доведено. Твердження 2) випливає з твердження 3) леми 1, оскільки $\psi(\sigma_k) = (1+\varepsilon)\gamma(\sigma_k) = (1+\varepsilon)\psi(\sigma_k - 0)$ для всіх $k \geq 0$. Лему доведено.

Лема 3. *Для довільної функції $\Phi \in \Omega$ існує неперервно диференційовна функція $\Psi \in \Omega$, така, що $\Phi(\sigma) \sim \Psi(\sigma)$, $\sigma \to +\infty$.*

Доведення. Нехай $\beta(\sigma) = [\Phi'_+(\sigma)]$ і $(n_k)_{k=0}^\infty$ та $(\varkappa_k)_{k=0}^\infty$ — зростаючі до $+\infty$ послідовності такі, що виконується (6). Покладемо

$$\delta_k = \min\left\{\frac{\varkappa_k + \varkappa_{k+1}}{2}; \frac{1}{2^k(n_{k+2} - n_{k+1})}\right\}.$$

Зрозуміло, що $\varkappa_k < \varkappa_k + \delta_k < \varkappa_{k+1}$ і існує неперервна функція $\psi \in I$ така, що $\psi(\sigma) = \beta(\sigma)$, якщо $\sigma \notin [\sigma_k; \sigma_k + \delta_k)$ для кожного $k \geq 0$. Тоді, очевидно, $\psi(\sigma) \leq \beta(\sigma)$ $(\sigma \geq a)$ і тому для всіх $\sigma \in [\sigma_k; \sigma_k + \delta_k)$ і $k \geq 0$ отримуємо

$$0 \leq \int\limits_a^\sigma \beta(x)dx - \int\limits_a^\sigma \psi(x)dx \leq \sum_{i=0}^k \int\limits_{\sigma_i}^{\sigma_i+\delta_i} (\beta(x) - \psi(x))dx \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^k \delta_i(n_{i+2} - n_{i+1}) \leq \sum_{i=0}^k \frac{1}{2^i} < 2.$$

Отже,

$$\Phi(\sigma) \sim \int\limits_a^\sigma \Phi'_+(x)dx \sim \int\limits_a^\sigma \beta(x)dx \sim \int\limits_a^\sigma \psi(x)dx, \qquad \sigma \to +\infty,$$

і залишається прийняти $\Psi(\sigma) = \int_a^\sigma \psi(x)dx$.

Лема 4 ([6]). *Нехай $R \in (0; +\infty]$, $c_k > 0$, n_k — невід'ємне ціле число і $a_k \in \mathbb{C}$ для кожного цілого $k \geq 0$. Якщо $c_k \uparrow R$ і $n_k \uparrow \infty$ при $k \to \infty$, $a_0 = \ldots = a_{n_0-1} = 0$, $a_{n_0} \neq 0$ і*

$$|a_{n_{k+1}}| = |a_{n_0}| \prod_{j=0}^k \frac{1}{c_j^{n_{j+1}-n_j}} \quad (k \geq 0),$$

$$|a_n|c_k^n \leq |a_{n_k}|c_k^{n_k} \quad (n \in (n_k; n_{k+1}),\ k \geq 0),$$

то: (i) радіус збіжності R_f ряду (1) з такими коефіцієнтами a_n дорівнює R; (ii) $\nu_f(r) = n_0$, якщо $0 < r < c_0$; (iii) $\nu_f(r) = n_{k+1}$, якщо $c_k \le r < c_{k+1}$ і $k \ge 0$.

Лема 5. *Для довільної функції $\varphi \in L$ існує ціла функція $f \in \mathcal{A}$ така, що $\nu_f(r) \sim \varphi(\ln r)$, $r \to +\infty$.*

Доведення. Нехай $\beta(\sigma) = [\varphi(\sigma)]$ і $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ та $(\varkappa_k)_{k=0}^{\infty}$ — зростаючі до $+\infty$ послідовності такі, що виконується (6). Вважаємо (це не зменшує загальності), що $n_0 \ge 0$.

Для всіх $k \ge 0$ покладемо $c_k = \exp\{\varkappa_k\}$ і за послідовностями $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ та $(c_k)_{k=0}^{\infty}$ визначимо коефіцієнти a_n так, щоб виконувались умови леми 4. Розглянемо ряд (1) з такими коефіцієнтами a_n. За лемою 4 цей ряд задає цілу функцію, для якої $\nu_f(r) = n_{k+1} = \beta(\ln r)$, якщо $r \in [c_k; c_{k+1})$ і $k \ge 0$. Отже, $\nu_f(r) \sim \beta(\ln r) \sim \varphi(\ln r)$, $r \to +\infty$.

3. Доведення теореми 2. Достатність. Нехай виконується умова (5), а $\Psi \in \Omega$ — довільна функція така, що $\Psi(\sigma) \sim \Phi(\sigma)$, $\sigma \to +\infty$.

Легко бачити, що для функції $\varphi(\sigma) = \Phi'_+(\sigma)$, згідно з (5), справджується співвідношення (7) з деякою додатною, неперервною на $[a; +\infty)$ функцією α. Отже, за лемою 1 існує функція $\gamma \in L$ така, що $\Phi'_+(\sigma) \sim \gamma(\sigma)$, $\sigma \to +\infty$. Покладемо $\Gamma(\sigma) = \int_a^\sigma \gamma(x)dx$. Ясно, що тоді

$$\Psi(\sigma) \sim \Phi(\sigma) \sim \Gamma(\sigma), \qquad \sigma \to +\infty, \tag{8}$$

а з (5) випливає, що

$$\forall l \in L: \qquad \gamma\left(\sigma + \frac{\Gamma(\sigma)}{l(\sigma)\gamma(\sigma)}\right) \sim \gamma(\sigma), \qquad \sigma \to +\infty. \tag{9}$$

Далі, згідно з (8), існує функція $\eta \in L$ така, що

$$1 - \frac{1}{\eta(\sigma)} \le \frac{\Psi(\sigma)}{\Gamma(\sigma)} \le 1 + \frac{1}{\eta(\sigma)}, \qquad \sigma \ge \sigma_0.$$

Тому для довільних $c>0$ і $\sigma\ge\sigma_0$ маємо

$$\Psi'_+(\sigma)\le\frac{1}{c}\int\limits_{\sigma}^{\sigma+c}\Psi'_+(x)dx=\frac{\Psi(\sigma+c)-\Psi(\sigma)}{c}\le$$
$$\le\frac{1}{c}\left(\left(1+\frac{1}{\eta(\sigma)}\right)\Gamma(\sigma+c)-\left(1-\frac{1}{\eta(\sigma)}\right)\Gamma(\sigma)\right)=$$
$$=\left(1+\frac{1}{\eta(\sigma)}\right)\frac{\Gamma(\sigma+c)-\Gamma(\sigma)}{c}+\frac{2\Gamma(\sigma)}{c\eta(\sigma)}\le$$
$$\le\left(1+\frac{1}{\eta(\sigma)}\right)\gamma(\sigma+c)+\frac{2\Gamma(\sigma)}{c\eta(\sigma)}, \tag{10}$$

і, подібно,

$$\Psi'_+(\sigma+c)\ge\frac{1}{c}\int\limits_{\sigma}^{\sigma+c}\Psi'_+(x)dx=\frac{\Psi(\sigma+c)-\Psi(\sigma)}{c}\ge$$
$$\ge\frac{1}{c}\left(\left(1-\frac{1}{\eta(\sigma)}\right)\Gamma(\sigma+c)-\left(1+\frac{1}{\eta(\sigma)}\right)\Gamma(\sigma)\right)=$$
$$=\left(1-\frac{1}{\eta(\sigma)}\right)\frac{\Gamma(\sigma+c)-\Gamma(\sigma)}{c}-\frac{2\Gamma(\sigma)}{c\eta(\sigma)}\ge$$
$$\ge\left(1-\frac{1}{\eta(\sigma)}\right)\gamma(\sigma)-\frac{2\Gamma(\sigma)}{c\eta(\sigma)}. \tag{11}$$

Прийнявши

$$c=c(\sigma)=\frac{\Gamma(\sigma)}{\sqrt{\eta(\sigma)}\gamma(\sigma)},\qquad \sigma\ge\sigma_1,$$

і скориставшись (9) при $l(\sigma)=\sqrt{\eta(\sigma)}$, з (10) при $\sigma\to+\infty$ отримуємо

$$\Psi'_+(\sigma)\le\left(1+\frac{1}{\eta(\sigma)}\right)\gamma(\sigma+c(\sigma))+\frac{2\gamma(\sigma)}{\sqrt{\eta(\sigma)}}=(1+o(1))\gamma(\sigma)=$$
$$=(1+o(1))\Phi'_+(\sigma).$$

Аналогічно з (11) при $\sigma\to+\infty$ маємо

$$\Psi'_+(\sigma+c(\sigma))\ge\left(1-\frac{1}{\eta(\sigma)}\right)\gamma(\sigma)-\frac{2\gamma(\sigma)}{\sqrt{\eta(\sigma)}}=(1-o(1))\gamma(\sigma)=$$
$$=(1-o(1))\gamma(\sigma+c(\sigma)),$$

звідки випливає, з огляду на неперервність функції $c(\sigma)$, що $\Psi'_+(\sigma) \geq (1 - o(1))\gamma(\sigma) = (1 - o(1))\Phi'_+(\sigma)$. В підсумку отримуємо $\Psi'_+(\sigma) \sim \Phi'_+(\sigma)$, $\sigma \to +\infty$, що й потрібно було довести.

Необхідність. Нехай $\Phi \in \Omega$ і умова (5) не виконується. Доведемо, що існує $\Psi \in \Omega$ така, що $\Phi(\sigma) \sim \Psi(\sigma)$, $\sigma \to +\infty$, і $\Phi'_+(\sigma) \not\sim \Psi'_+(\sigma)$, $\sigma \to +\infty$.

За лемою 3 існує неперервно диференційовна функція $\mathrm{A} \in \Omega$ така, що $\Phi(\sigma) \sim \mathrm{A}(\sigma)$, $\sigma \to +\infty$. Якщо $\Phi'_+(\sigma) \not\sim \mathrm{A}'(\sigma)$, $\sigma \to +\infty$, то досить вибрати $\Psi(\sigma) = \mathrm{A}(\sigma)$.

Припустимо, що $\Phi'_+(\sigma) \sim \mathrm{A}'(\sigma)$, $\sigma \to +\infty$. Тоді за лемою 2 існує функція $\mathrm{B} \in \Omega$ така, що $\Phi(\sigma) \sim \mathrm{B}(\sigma)$, $\sigma \to +\infty$, і для кожної $h \in L$ виконується співвідношення $h(\sigma) \not\sim \mathrm{B}'_+(\sigma)$, $\sigma \to +\infty$. Оскільки A' неперервна і неспадна, то $\mathrm{A}'(\sigma) \not\sim \mathrm{B}'_+(\sigma)$, $\sigma \to +\infty$. Залишилось покласти $\Psi(\sigma) = \mathrm{B}(\sigma)$.

4. Доведення теореми 1. Достатність. Нехай виконуються умови (3) і (5), а $f \in \mathcal{A}(\Phi)$. Тоді, згідно з теоремою B,

$$\ln M_f(e^\sigma) \sim \ln \mu_f(e^\sigma) \sim \Phi(\sigma), \qquad \sigma \to +\infty,$$

а тому, згідно з теоремою 2,

$$K_f(e^\sigma) \sim \nu_f(e^\sigma) \sim \Phi'_+(\sigma), \qquad \sigma \to +\infty,$$

що й слід було довести.

Необхідність. Нехай для функції $\Phi \in \Omega$ не виконується принаймні одна з умов (3) чи (5). Доведемо, що тоді існує ціла функція $f \in \mathcal{A}(\Phi)$, для якої співвідношення (4) неправильне.

Справді, якщо не виконується (3), то за теоремою B існує ціла функція $f \in \mathcal{A}(\Phi)$ така, що співвідношення (2) не виконується. Зрозуміло, що тоді не виконується і співвідношення (4).

Якщо ж не виконується (5), то нехай $\psi \in I$ і $\Psi \in \Omega$ — функції, для яких правильні висновки леми 2. Згідно з лемою 5, існує ціла функція $f \in \mathcal{A}(\Phi)$ вигляду (1) така, що всі $a_n \geq 0$ (в разі, якщо це не так, нижче замість f розглядаємо цілу функції $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| z^n$, для якої $\nu_g(r) = \nu_f(r)$) і для f виконується співвідношення $\nu_f(r) \sim \psi(\ln r)$, $r \to +\infty$. Тоді $\ln \mu_f(r) \sim \Psi(\ln r) \sim \Phi(\sigma)$, $r \to +\infty$, тобто $f \in \mathcal{A}(\Phi)$. Але якщо всі $a_n \geq 0$, то $K_f(r) = r f'(r)/f(r)$ є неперервною функцією, а тому, згідно з твердженням 2) леми 2, $\psi(\ln r) \not\sim K_f(r)$, $r \to +\infty$. Звідси випливає, що $\nu_f(r) \not\sim K_f(r)$, $r \to +\infty$. Теорему доведено.

Зауваження. Легко показати, що для функції $\Phi \in \Omega$ з умови (3) умова (5), взагалі кажучи, не випливає. З іншого боку, нам не відомо, чи існує функція $\Phi \in \Omega$ така, що (5) виконується, а (3) не виконується (якщо це не так, то умова (3) в теоремі 1 є зайвою).

[1] *Clunie J.* On integral functions having prescribed asymptotic growth // Can. J. Math. 1965. V. 17, B 3. P. 396–404.

[2] *Філевич П. В.* Зростання цілої і випадкової цілої функції // Мат. студії. 2008. T.30, B 1. C.15–21.

[3] *Братищев А. В.* Об обращении правила Лопиталя // Мех. сплошной среды. Ростов-на-Дону: Изд.-во РГУ, 1985. С. 28–42.

[4] *Sheremeta M. M.* On the logarithmic derivative of an entire function // Mat. Studii. 2001. V. 16, B 1. P. 107–109.

[5] *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.

[6] *Filevych P. V.* On the slow growth of power series convergent in the unit disk // Mat. Studii. 2001. V. 16, B 2. P. 217–221.

ON THE ASYMPTOTIC EQUALITY BETWEEN THE DERIVATIVES OF THE LOGARITHMS OF THE MAXIMUM MODULUS AND THE MAXIMAL TERM OF AN ENTIRE FUNCTION

Petro FILEVYCH

Lviv S.Z.Gzhytskyi national university of veterinary medicine and biotechnologies,
50, Pekarska Str., Lviv 79010, Ukraine

For an entire function $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ with the maximum modulus $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$ and the maximum term $\mu_f(r) = \max\{|a_n|r^n : n \geq 0\}$ necessary and sufficient conditions is established in order that $(\ln M_f(r))'_+ \sim (\ln \mu_f(r))'_+$, $r \to +\infty$.