МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ В НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

©2009 р. Галина ТОРГАН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів 79000

Редакція отримала статтю 11 червня 2009 р.

У праці одержано деякі достатні умови існування узагальненого розв'язку мішаної задачі для нелінійного параболічного рівняння четвертого порядку в необмеженій відносно просторових змінних області.

Рівняння з другою похідною за часом і четвертими похідними за просторовими змінними вигляду

$$u_{tt} = -\delta^2 \triangle^2 u + \triangle u_t + div\ \sigma(\nabla u), \tag{1}$$

де $\sigma \geq 0$,$0 < \delta < 1$, моделюють процеси фазового переходу у в'язкопружних середовищах з капілярністю. У працях [1, 2] розглянуто частковий випадок рівняння (1), коли присутня одна просторова змінна. Зазначимо, що задачі для рівнянь типу (1) з різними нелінійностями досліджено у роботах [3-9].

У цій праці одержано деякі достатні умови існування узагальненого розв'язку мішаної задачі для нелінійного параболічного рівняння, яке узагальнює (1) при $\sigma = 0$, в необмеженій за просторовими змінними області.

Нехай Ω – необмежена область у просторі $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega \in C^1$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, де $T < \infty$, $\Omega_\tau = Q_T \cap \{t = \tau\}$, $\tau \in [0,T]$, $\Omega^R = \Omega \cap B^R$, де $B^R = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| < R\}$, $Q_T^R = \Omega^R \times (0,T)$, $\Omega_\tau^R = Q_T^R \cap \{t = \tau\}$.

УДК 517.95; MSC 2000: 30E99

Припустимо, що для довільного додатного R область Ω^R регулярна в сенсі Кальдерона [12, с.44].

У області Q_T розглянемо задачу для рівняння

$$\mathcal{L}(u) \equiv u_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} (a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j})_{x_s x_l} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,t) u_{tx_i})_{x_j} -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} (a_i(x,t)|u_{tx_i}|^{p-2} u_{tx_i})_{x_i} + a_0(x,t)|u_t|^{q-2} u_t + c_0(x,t)u = f(x,t) \qquad (2)$$

з початковими умовами

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x) \qquad (3)$$

і крайовими умовами

$$u\big|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial \widetilde{\nu}}\Big|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \qquad (4)$$

де $\widetilde{\nu}$ – зовнішня нормаль до поверхні $\partial\Omega$, $p > 1$, $q > 1$.

Нехай $L_\nu^r(\Omega)$ – замикання множини функцій $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою $||u||_{L_\nu^r(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^r e^{-\nu\sqrt{|x|^2+1}} dx \right)^{1/r}$, $r \in [1, +\infty)$; $W_0^{k,p}(\Omega)$ – замикання множини $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою $||u||_0^{k,p}(\Omega) = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|\le k} \big|D^\alpha u\big|^p dx \right)^{1/p}$, де $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$, $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $W_{0,loc}^{k,p}(\overline{\Omega}) = \Big\{ u\ :\ u \in W_0^{k,p}(K)$ для довільної $K \subset \Omega \Big\}$, $k \ge 1$; $V_0(\Omega^R) = H_0^2(\Omega^R) \cap H^4(\Omega^R) \cap W_0^{2,r_0}(\Omega^R) \cap W_0^{1,p}(\Omega^R) \cap L^{2q-2}(\Omega^R)$ при $p > 2$ і $V_0(\Omega^R) = H_0^2(\Omega^R) \cap H^4(\Omega^R) \cap W_0^{1,p}(\Omega^R) \cap L^{2q-2}(\Omega^R)$ при $p \in (1, 2)$, де $r_0 = \dfrac{2n(q-1)}{n+2q-4}$ при $n > 2$ і $r_0 = 2 + \sigma_0$, $\sigma_0 > 0$ при $n \in \{1, 2\}$.

Припустимо виконання таких умов:

$$\textbf{(A)}:\ a_{ij},\ a_{ijt},\ a_{ijtt},\ a_i,\ a_{it},\ a_0,\ a_{0t} \in L^\infty(Q_T);\ D^\alpha a_{ij}^{sl}(\cdot),\ D^1 a_{ij}(\cdot, 0),$$

$D^1 a_i(\cdot, 0) \in L^\infty(\Omega)$, $|\alpha| \le 2$, $i, j, s, l \in \{1, ..., n\}$, $a_0(x,t) \ge A_0 > 0$ для майже всіх $(x,t) \in Q_T$; $0 < \nu_1 \le a_i(x,t) \le \nu_2 < +\infty$ для майже всіх $(x,t) \in Q_T$ і всіх $i \in \{1, ..., n\}$; $\sum_{i,j=i}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \ge A_1 \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2$ з $A_1 > 0$

для майже всіх $(x,t) \in Q_T$ і всіх $\xi_i \in \mathbb{R}$; $\sum\limits_{i,j,s,l=i}^{n} a_{ij}^{sl}(x)\xi_{ij}\xi_{sl} \geq A_2 \sum\limits_{i,j=1}^{n} |\xi_{ij}|^2$, $A_2 > 0$ для майже всіх $x \in \Omega$ і всіх $\xi_{ij} \in \mathbb{R}$ таких, що $\xi_{ij} = \xi_{ji}$; $a_{ij}^{sl}(x) = a_{sl}^{ij}(x)$, $a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t)$ майже для всіх $(x,t) \in Q_T$;

$$\textbf{(C)}: \quad c_0,\ c_{0t} \in L^{\infty}(Q_T).$$

Означення 1. *Функцію* $u \in L^2((0,T); H^2_{0,loc}(\overline{\Omega}))$, *таку, що* $u_t \in L^p((0,T); W^{1,p}_{0,loc}(\overline{\Omega})) \cap L^q((0,T); L^q_{loc}(\overline{\Omega})) \cap L^2((0,T); H^1_{0,loc}(\overline{\Omega}))$, *називаємо узагальненим розв'язком задачі (2)-(4), якщо вона задовольняє (2) в* Q_T *в сенсі розподілів і початкові умови (3).*

Розглянемо допоміжну задачу

$$\mathcal{L}(u) = f^R(x,t),\ (x,t) \in Q_T^R, \tag{5}$$

$$u(x,0) = u_0^R,\ u_t(x,0) = u_1^R(x),\ x \in \Omega^R, \tag{6}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega^R \times (0,T)} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial \widetilde{\nu}}\Big|_{\partial\Omega^R \times (0,T)} = 0, \tag{7}$$

де $R > 1$,
$f^R(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & (x,t) \in Q_T^R \\ 0, & (x,t) \in Q_T \setminus Q_T^R \end{cases}$,
$u_0^R(x) = u_0(x)\psi_R(x)$,
$u_1^R(x) = u_1(x)\psi_R(x)$,
$\psi_R \in C_0^4(\mathbb{R}^n)$,
$\psi_R(x) = \begin{cases} 1, & |x| < R-1 \\ 0, & |x| \geq R \end{cases}$,
$0 \leq \psi_R(x) \leq 1$ при $x \in \mathbb{R}^n$.

Означення 2. *Функцію* $u \in L^2((0,T); H_0^2(\Omega^R))$, *таку, що* $u_t \in L^p((0,T); W_0^{1,p}(\Omega^R)) \cap L^q(Q_T^R)$, $u_{tt} \in L^2(Q_T^R)$ *і* u *задовольняє початкові умови (3) та рівність*

$$\int_{Q_\tau^R} \Bigg[u_{tt}v + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_ix_j} v_{x_sx_l} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u_{tx_i} v_{x_j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t) |u_{tx_i}|^{p-2} u_{tx_i} v_{x_i} + a_0(x,t)|u_t|^{q-2} u_t v + \tag{8}$$

$$+ c_0(x,t)uv - f(x,t)v \Bigg] dxdt = 0$$

для довільних $\tau \in (0,T]$ *і* $v \in L^2((0,T); H_0^2(\Omega^R)) \cap L^p((0,T); W_0^{1,p}(\Omega^R)) \cap L^q(Q_T^R)$, *називаємо узагальненим розв'язком задачі (5)–(7).*

Приймемо $q_0 = \min\{q', 2\}$, де $1/q + 1/q' = 1$, і наведемо кілька потрібних нам надалі фактів.

Зауваження 1. Нехай $\psi = e^{-\nu\sqrt{|x|^2+1}}$, $\nu > 0$. Тоді $\left|\psi_{x_i}\right| \le \nu\psi$, $\left|\psi_{x_i x_j}\right| \le (\nu^2 + 3\nu)\psi$.

Зауваження 2. Нехай область Ω лежить в шарі $\gamma_0 < x_1 < \gamma_1$, $\Theta_0 = \gamma_1 - \gamma_0$, $u \in L^p((0,T); W_{0,\nu}^{1,p}(\Omega))$. Тоді згідно з нерівністю Фрідріхса

$$\int_{\Omega_t} |u|^p \psi dx \le C(\Theta_0, p) \int_{\Omega_t} \left| [(u\psi)^{\frac{1}{p}}]_{x_1} \right|^p dx \le$$

$$\le C(\Theta_0, p) 2^{p-1} \left[\int_{\Omega_t} |u_{x_1}|^p \psi dx + \left(\frac{\nu}{p}\right)^p \int_{\Omega_t} |u|^p \psi dx \right], \ \psi = e^{-\nu\sqrt{|x|^2+1}}.$$

Звідси $\left(1 - \dfrac{C(\Theta_0,p)2^{p-1}\nu^p}{p^p}\right) \displaystyle\int_{\Omega_t} |u|^p \psi dx \le C(\Theta_0,p)2^{p-1} \int_{\Omega_t} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^p \psi dx.$

Отже, якщо $\nu < \dfrac{p}{[C(\Theta_0,p)2^{p-1}]^{1/p}}$, то $\displaystyle\int_{\Omega_t} |u|^p \psi dx \le \gamma_2 \int_{\Omega_t} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^p \psi dx$, де $\gamma_2 = \dfrac{1 - C(\Theta_0,p)2^{p-1}\nu^p p^{-p}}{C(\Theta_0,p)2^{p-1}}$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* ***(A)****,* ***(C)****,* $q > 1$, $p \in (1,2) \cup (2, +\infty)$, $f^R \in L^{q_0}(Q_T^R)$, $f_t^R \in L^2(Q_T^R)$, $u_0^R \in H_0^2(\Omega^R) \cap H^4(\Omega^R)$, $u_1^R \in W_0^{2,r_0}(\Omega^R) \cap L^{2q-2}(\Omega^R)$ *при* $p > 2$ *і* $u_1 = 0$ *при* $p \in (1,2)$. *Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (5)–(7).*

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* ***(A)****,* ***(C)****,* $p \in (2, +\infty)$, $q \in (p, +\infty)$, $n < \dfrac{pq}{q-p}$, *область* Ω *лежить в шарі* $\gamma_0 < x_1 < \gamma_1$, $\nu < \min\left\{\dfrac{\nu_1 p p'}{2\nu_2(1+\gamma_2)}; \dfrac{p}{[C(\Theta_0,p)2^{p-1}]^{1/p}}\right\}$, $u_0 \in H_{0,\nu}^2(\Omega)$, $u_1 \in L_\nu^2(\Omega)$, $f \in L^{q'}((0,T); L_\nu^{q'}(\Omega))$. *Тоді існує узагальнений розв'язок и задачі (2)–(4) і він задовольняє оцінку*

$$\int_{Q_T} \left[|u|^2 + |u_t|^2 + |u_t|^q + |u_t|^p + \sum_{i=1}^n |u_{tx_i}|^p + \sum_{i=1}^n |u_{tx_i}|^2 + \sum_{i,j=1}^n |u_{x_i x_j}|^2 \right] \psi dx dt \le M_1,$$

де $\psi = e^{-\nu\sqrt{|x|^2+1}}$ *і стала* M_1 *залежить від початкових даних, вільного члена та коефіцієнтів рівняння, а також числа* ν.

Доведення. Розглянемо в обмеженій області Q_T^R, де R набуває значення k, $k\in\mathbb{N}$ (цю область позначатимемо чернез Q_T^k), допоміжну задачу

$$
\begin{gathered}
\mathcal{L}(u)=f^{k,k}(x,t),\ (x,t)\in Q_T^k,\\
u|_{\partial\Omega^k\times(0,T)}=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial\widetilde{\nu}}\right|_{\partial\Omega^k\times(0,T)}=0, \qquad (9)\\
u(x,0)=u_0^{k,k}(x),\ u_t(x,0)=u_1^{k,k}(x),\ x\in\Omega^k,
\end{gathered}
$$

де $f^{k,k}(x,t)=\begin{cases} f^k(x,t), & (x,t)\in Q_T^k\\ 0, & (x,t)\in Q_T\setminus Q_T^k,\end{cases}$ $u_0^{k,k}(x)=u_0^k(x)\psi^k(x)$, $u_1^{k,k}(x)=u_1^k(x)\psi^k(x)$.

Нехай послідовності $\{f^k\}$, $\{u_0^k\}$, $\{u_1^k\}$ такі, що

$$
f^k\in C^1([0,T];C(\Omega)),\ u_0^k\in C_0^4(\Omega),\ u_1^k\in C_0^2(\Omega),\ f^k\to f \text{ в } L^{q'}((0,T);L_\nu^{q'}(\Omega)),
$$

$$
u_0^k\to u_0 \text{ в } H_{0,\nu}^2(\Omega),\ u_1^k\to u_1 \text{ в } L_\nu^2(\Omega) \text{ при } k\to\infty.
$$

На підставі теореми 1 існує узагальнений розв'язок u^k задачі (9), $k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$. Згідно з (8) маємо рівність

$$
\int_{Q_\tau}\Bigg[u_{tt}^k u_t^k e^{-\mu t}\psi+\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}^k(u_t^k e^{-\mu t}\psi)_{x_sx_l}+c_0(x,t)u^k u_t^k e^{-\mu t}\psi+
$$

$$
+\sum_{i=1}^n a_i(x,t)|u_{tx_i}^k|^{p-2}u_{tx_i}^k(u_t^k e^{-\mu t}\psi)_{x_i}+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)u_{tx_i}(u_t^k e^{-\mu t}\psi)_{x_j}+
$$

$$
+a_0(x,t)|u_t^k|^q e^{-\mu t}\psi\Bigg]dxdt=\int_{Q_\tau}f^{k,k}(x,t)u_t^k e^{-\mu t}\psi dxdt, \qquad (10)
$$

де $\tau\in(0,T]$, $k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, $\psi=e^{-\nu\sqrt{|x|^2+1}}$, $\nu>0$, $\mu>0$.

Оцінимо доданки останньої рівності. Очевидно, що

$$
J_1:=\int_{Q_\tau}u_{tt}^k u_t^k e^{-\mu t}\psi dxdt=\frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau}|u_t^k|^2 e^{-\mu\tau}\psi dx+
$$

$$
+\frac{\mu}{2}\int_{Q_\tau}|u_t^k|^2 e^{-\mu t}\psi dxdt-\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}|u_1^{k,k}|^2\psi dx.
$$

На підставі зауваження 1 і умов **(A)**, **(C)** маємо

$$
J_2:=\int_{Q_\tau}\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}^k u_{tx_sx_l}^k e^{-\mu t}\psi dxdt\geq\frac{A_2}{2}\int_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^n|u_{x_ix_j}^k|^2 e^{-\mu\tau}\psi dx-
$$

$$-\frac{A_3+1}{4}\int_{\Omega_0}\sum_{i,j=1}^{n}|u^{k,k}_{0x_ix_j}|^2\psi dx+\frac{\mu A_2}{2}\int_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}|u^k_{x_ix_j}|^2e^{-\mu t}\psi dxdt,$$

де $A_3=\operatorname{ess\,sup}\limits_{\Omega}\sum\limits_{i,j,s,l=1}^{n}|a^{sl}_{ij}(x)|^2$;

$$J_3:=\int_{Q_\tau}\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a^{sl}_{ij}(x)u^k_{x_ix_j}u^k_{tx_s}\psi_{x_l}e^{-\mu t}dxdt\geq-\frac{\nu n^2A_4}{2\delta_1}\times$$

$$\times\int_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}|u^k_{x_ix_j}|^2e^{-\mu t}\psi dxdt-\frac{\nu n^3A_4\delta_1}{2}\int_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^k_{tx_i}|^2e^{-\mu t}\psi dxdt,$$

де $\delta_1>0,\ A_4=\max\limits_{i,j,s,l\in\{1,\ldots,n\}}\sup\limits_{\Omega}|a^{sl}_{ij}(x)|$;

$$J_4:=\int_{Q_\tau}\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a^{sl}_{ij}(x)u^k_{x_ix_j}u^k_t\psi_{x_sx_l}e^{-\mu t}dxdt\geq-\frac{n^2(\nu^2+3\nu)A_4}{2}\times$$

$$\times\int_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}|u^k_{x_ix_j}|^2e^{-\mu t}\psi dxdt-\frac{n^4(\nu^2+3\nu)A_4}{2}\int_{Q_\tau}|u^k_t|^2e^{-\mu t}\psi dxdt;$$

$$J_5:=\int_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}a_i(x,t)|u^k_{tx_i}|^pe^{-\mu t}\psi dxdt\geq\nu_1\int_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^k_{tx_i}|^pe^{-\mu t}\psi dxdt;$$

$$J_6=\int_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}a_i(x,t)|u^k_{tx_i}|^{p-2}u^k_{tx_i}u_te^{-\mu t}\psi_{x_i}dxdt\geq$$

$$\geq-\frac{\nu\nu_2}{p'}\int_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^k_{tx_i}|^pe^{-\mu t}\psi dxdt-\frac{\nu\nu_2 n}{p}\int_{Q_\tau}|u^k_t|^pe^{-\mu t}\psi dxdt.$$

Із зауваження 2 маємо

$$J_6\geq-\left(\frac{\nu\nu_2}{p'}+\frac{\nu\nu_2 n\gamma_2}{p}\right)\int_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^k_{tx_i}|^pe^{-\mu t}\psi dxdt.$$

Далі

$$J_7:=\int_{Q_\tau}a_0(x,t)|u^k_t|^qe^{-\mu t}\psi dxdt\geq A_0\int_{Q_\tau}|u^k_t|^qe^{-\mu t}\psi dxdt;$$

$$J_8:=\int_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)u^k_{tx_i}u^k_{tx_j}e^{-\mu t}\psi dxdt\geq A_1\int_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^k_{tx_i}|^2e^{-\mu t}\psi dxdt;$$

$$J_9 := \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u^k_{tx_i} u^k_t e^{-\mu t} \psi_{x_i} dxdt \geq -\frac{n\nu A_5 \delta_2}{2} \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |u^k_{tx_i}|^2 e^{-\mu t} \psi dxdt -$$

$$-\frac{n^2 \nu A_5}{2\delta_2} \int_{Q_\tau} |u^k_t|^2 e^{-\mu t} \psi dxdt, \text{ де } \delta_2 > 0, \ A_5 = \max_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} \sup_{Q_T} |a_{ij}(x)|;$$

$$J_{10} := \int_{Q_\tau} f^{k,k} u^k_t e^{-\mu t} \psi dxdt \leq \int_{Q_\tau} \left[\frac{\delta_3}{q} |u^k_t|^q + \frac{1}{q' \delta_3^{q'/q}} |f^{k,k}|^{q'} \right] e^{-\mu t} \psi dxdt,$$

де $\delta_3 > 0$;

$$J_{11} := \int_{Q_\tau} c_0(x,t) u^k u^k_t e^{-\mu t} \psi dxdt \leq \left(\frac{C_0}{2} + C_0 T^2 \right) \int_{Q_\tau} |u^k_t|^2 e^{-\mu t} \psi dxdt +$$

$$+ C_0 T \int_{\Omega_0} |u^{k,k}_0|^2 \psi dxdt, \text{ де } C_0 = \operatorname{ess\,sup}_{Q_T} c_0(x,t).$$

Враховуючи оцінки інтегралів $J_1 - J_{11}$, з рівності (10) одержимо нерівність

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_\tau} \left[|u^k_t|^2 + A_2 \sum_{i,j=1}^{k} |u^k_{x_i x_j}|^2 \right] e^{-\mu \tau} \psi dx + \int_{Q_\tau} \left[\left(\frac{\mu}{2} - \frac{n^4 A_4 (\nu^2 + 3\nu)}{2} - C_0 T^2 - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{C_0}{2} - \frac{n^2 \nu A_5}{2\delta_2} \right) |u^k_t|^2 + \left(\frac{\mu A_2}{2} - \frac{\nu n^2 A_4}{\delta_1} - \frac{n^2 (\nu^2 + 3\nu) A_4}{2} \right) \sum_{i,j=1}^{n} |u^k_{x_i x_j}|^2 + \left(\nu_1 - \right.$$

$$\left. - \frac{\nu \nu_2}{p'} - \frac{n \nu \nu_2 \gamma_2}{p} \right) \sum_{i=1}^{n} |u^k_{tx_i}|^p + \left(A_1 - \frac{n \nu A_5 \delta_2}{2} - \nu n^3 A_4 \delta_1 \right) \sum_{i=1}^{n} |u^k_{tx_i}|^2 +$$

$$\left. + \left(A_0 - \frac{\delta_3}{q} \right) |u^k_t|^q \right] e^{-\mu t} \psi dxdt \leq \frac{1}{q' \delta_3^{q'/q}} \int_{Q_\tau} |f^{k,k}|^{q'} e^{-\mu t} \psi dxdt +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \left[|u^{k,k}_1|^2 + \frac{A_3 + 1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} |u^{k,k}_{0x_i x_j}|^2 + 2C_0 T |u^{k,k}_0|^2 \right] \psi dx. \qquad (11)$$

Виберемо $\delta_1, \ \delta_2, \ \delta_3$ так, щоб $A_0 - \dfrac{\delta_3}{p} > 0, \ A_1 - \dfrac{n\nu A_5 \delta_2}{2} - \nu n^3 A_4 \delta_1 > 0$, і нехай

$$0 < \nu < \min \left\{ \frac{\nu_1 p p'}{\nu_2 (p + n p' \gamma_2)}; \frac{p}{\left[C(\Theta_0, p) 2^{p-1} \right]^{1/p}} \right\}.$$

Тоді з (11) та леми Ґронуола-Белмана одержимо нерівність

$$\int_{\Omega_\tau}\left[|u_t^k|^2+\sum_{i,j=1}^n|u^k_{x_ix_j}|^2\right]\psi dx+\int_{Q_\tau}\left[|u_t^k|^2+|u^k|^2+\sum_{i,j=1}^n|u^k_{x_ix_j}|^2+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^n|u^k_{tx_i}|^p+\sum_{i=1}^n|u^k_{tx_i}|^2+|u_t^k|^q\right]\psi dxdt\le M_2, \qquad (12)$$

де стала M_2 не залежить від k.

Зазначимо, що на підставі (12) послідовність $\{u^k\}$ обмежена у просторі $L^2((0,T);H^2_{0,\nu}(\Omega))$, а послідовність $\{u^k_t\}$ – у просторі $L^p((0,T);W^{1,p}_{0,\nu}(\Omega))\cap L^q((0,T);L^q_\nu(\Omega))\cap L^2((0,T);H^1_{0,\nu}(\Omega))$. Отже, існує підпослідовність послідовності $\{u^k\}$ (нехай це буде та сама послідовність) така, що

$$u^k\to u \ \ *\text{- слабко в } \ L^\infty((0,T);H^2_{0,\nu}(\Omega)),$$

$$u^k_t\to u_t \text{ слабко в } L^p((0,T);W^{1,p}_{0,\nu}(\Omega))\cap L^q((0,T);L^q_\nu(\Omega))\cap L^2((0,T);H^1_{0,\nu}(\Omega))$$

$$u^k_t\to u_t \ \ *\text{- слабко в } \ L^\infty((0,T);L^2_\nu(\Omega)) \ \text{ при } \ k\to\infty. \qquad (13)$$

Нехай $R_0>1$ – довільне фіксоване число. Позначимо $H^2_{0,\Omega}(\Omega^{R_0})=\left\{u:\ u\in H^2(\Omega^{R_0}),\ u\big|_{\partial\Omega\cap B_{R_0}}=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu}\bigg|_{\partial\Omega\cap B_{R_0}}=0\right\}$, $W^{1,p}_{0,\Omega}(\Omega^{R_0})=\left\{u:\ u\in W^{1,p}(\Omega^{R_0}),\ u\big|_{\partial\Omega\cap B_{R_0}}=0\right\}$, $\mathcal{R}_0u$ – звуження u на Ω^{R_0}.

На підставі (12) послідовність $\{\mathcal{R}_0u^k\}$ обмежена в просторі $L^2((0,T);H^2_{0,\Omega}(\Omega^{R_0}))$, а послідовність $\{\mathcal{R}_0u^k_t\}$ – у просторі $L^p((0,T);W^{1,p}_{0,\Omega}(\Omega^{R_0}))\cap L^q((0,T);L^q_\Omega(\Omega^{R_0}))$.

Зазначимо, що в області $Q_T^{R_0}$ $\forall k>R_0$ в сенсі розподілів правильна рівність

$$u^k_{tt}=-\sum_{i,j,s,l=1}^n(a^{sl}_{ij}(x)u^k_{x_ix_j})_{x_sx_l}+\sum_{i=1}^n(a_i(x,t)|u^k_{tx_i}|^{p-2}u^k_{tx_i})_{x_i}-$$

$$-a_0(x,t)|u^k_t|^{q-2}u^k_t-c_0(x,t)u^k+\sum_{i,j=1}^n(a_{ij}(x,t)u^k_{tx_i})_{x_j}+f^{k,k}(x,t). \qquad (14)$$

Тоді, використовуючи (12), (14) і умову **(A)**, легко одержати оцінку

$$||\mathcal{R}_0u^k_{tt}||_{V^*(Q_T^{R_0})}\le M_3, \qquad (15)$$

де M_3 не залежить від k, а $V^*(Q_T^{R_0}) = L^2((0,T);(H^2_{0,\Omega}(\Omega^{R_0}))^*)+L^{p'}((0,T);(W^{1,p}_{0,\Omega}(\Omega^{R_0}))^*) + L^{q'}((0,T);L^{q'}_{\Omega}(\Omega^{R_0}))$. Отже, існує така підпослідовність послідовності $\{\mathcal{R}_0 u^k\}$ (нехай це та сама послідовність), що

$$\mathcal{R}_0 u^k \to u^{R_0} \text{ слабко в } L^2((0,T);H^2(\Omega^{R_0})),$$

$$\mathcal{R}_0 u_t^k \to u_t^{R_0} \text{ слабко в } L^p((0,T);W^{1,p}_{0,\Omega}(\Omega^{R_0})) \cap L^q((0,T);L^q_{\Omega}(\Omega^{R_0})).$$

Крім того, оскільки

$$W^{1,p}_{0,\Omega}(\Omega^{R_0}) \subset L^q(\Omega^{R_0}) \subset (H^2_{0,\Omega}(\Omega^{R_0}))^* + (W^{1,p}_{0,\Omega}(\Omega^{R_0}))^* + L^{q'}_{\Omega}(\Omega^{R_0}),$$

причому вкладення $W^{1,p}_{0,\Omega}(\Omega^{R_0}) \subset L^q(\Omega^{R_0})$ компактне при $n < \dfrac{pq}{q-p}$, то враховуючи (15) і теорему 5.1 [12, С. 70], можемо вважати, що

$$\mathcal{R}_0 u_t^k \to u_t^{R_0} \text{ сильно в } L^q((0,T);L^q(\Omega^{R_0})),$$

а тому і майже всюди в $Q_T^{R_0}$.

Нехай R_0 послідовно набуває значень з множини натуральних чисел $\mathbb{N}$. Використовуючи діагональний процес, можемо побудувати таку підпослідовність (нехай це знову буде $\{u^k\}$), що

$$u^k \to u \text{ слабко в } L^2((0,T);H^2_{0,\nu}(\Omega)),$$

$$u_t^k \to u_t \text{ слабко в } L^p((0,T);W^{1,p}_{0,\nu}(\Omega)) \text{ при } k \to \infty. \tag{16}$$

Тоді $u_t^k \to u_t$ сильно в $L^q((0,T);L^q_{\nu}(\Omega))$. Легко довести, що $u_t^k \to u_t$ сильно в $L^2((0,T);L^2_{\nu}(\Omega))$. Зазначимо також, що на підставі (12)

$$\int_{Q_T} \left| |u^k_{tx_i}|^{p-2} u^k_{tx_i} e^{-\frac{\nu}{p'}\sqrt{|x|^2+1}} \right|^{p'} dxdt \le \int_{Q_T} |u^k_{tx_i}|^p \psi dxdt \le M_4,$$

$i \in \{1,...,n\}$, де стала M_4 не залежить від k. Тому можемо вважати, що

$$|u^k_{tx_i}|^{p-2} u^k_{tx_i} \to \chi_i \text{ слабко в } L^{p'}((0,T);L^{p'}_{\nu}(\Omega)) \text{ при } k \to \infty,\ i \in \{1,...,n\}.$$

Зазначимо, що для кожного $w \in L^2((0,T);H^2_{0,\nu}(\Omega))$, такого, що $w_t \in L^p((0,T);W^{1,p}_{0,\nu}(\Omega)) \cap L^q((0,T);L^q_{\nu}(\Omega)) \cap L^2((0,T);H^1_{0,\nu}(\Omega))$ правильна рівність

$$\int_{\Omega_T} u_t^k w e^{-\mu T}\psi dx + \int_{Q_T} \Big[\mu u_t^k w\psi - u_t^k w_t \psi + \sum_{i,j,s,l=1}^n a^{sl}_{ij}(x) u^k_{x_i x_j} (w\psi)_{x_s x_l} +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u^k_{tx_i}(w\psi)_{x_j}+\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|u^k_{tx_i}|^{p-2}u^k_{tx_i}(w\psi)_{x_i}+c_0(x,t)u^k w\psi+$$

$$+a_0(x,t)|u^k_t|^{q-2}u^k_t w\psi - f^{k,k}(x,t)w\psi\Bigg]e^{-\mu t}dxdt=\int_{\Omega_0} u^k_t(x,0)w\psi dx, \quad (17)$$

де $k\in\mathbb{N}\backslash\{1\},\ \mu\geq 0,\ \nu>0$, причому у цій рівності можна прийняти $w=u^k_t$.

Якщо $\mu=0$, то враховуючи (13), (15), (16), перейдемо до границі в (17) при $k\to\infty$ $(w(x,T)=0,\ w(x,0)=0)$:

$$\int_{Q_T}\Bigg[-u_t w_t\psi+\sum_{i,j,s,l=1}^{n} a^{sl}_{ij}(x)u_{x_ix_j}(w\psi)_{x_sx_l}+\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{tx_i}(w\psi)_{x_j}+$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\chi_i(w\psi)_{x_i}+a_0(x,t)|u_t|^{q-2}u_t w\psi+c_0(x,t)uw\psi-f(x,t)w\psi\Bigg]dxdt=0. \quad (18)$$

З (18) зокрема випливає, що в області Q_T в сенсі розподілів правильна рівність

$$u_{tt}=-\sum_{i,j,s,l=1}^{n}(a^{sl}_{ij}(x)u_{x_ix_j})_{x_sx_l}+\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x,t)u_{tx_i})_{x_j}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(a_i(x,t)\chi_i)_{x_i}-a_0(x,t)|u_t|^{q-2}u_t-c(x,t)u-f(x,t).$$

Отже, $u_{tt}\in L^2((0,T);(H^2_{0,\nu}(\Omega))^*)+L^{p'}((0,T);(W^{1,p}_{0,\nu}(\Omega))^*)+L^{q'}((0,T);(L^q_\nu(\Omega))^*)$. Але $u_t\in L^2((0,T);H^1_{0,\nu}(\Omega))\cap L^p((0,T);W^{1,p}_{0,\nu}(\Omega))\cap L^q((0,T);L^q_\nu(\Omega))$, тому $u_t\in C([0,T];(H^2_{0,\nu}(\Omega))^*+(W^{1,p}_{0,\nu}(\Omega))^*+(L^q_\nu(\Omega))^*)$.

Нехай $\tau_0,\ \beta\in(0,T),\ \tau_0<\beta,\ \Theta_m$ – неперервна кусково лінійна функція на $[0,T]$; $\Theta_m(t)=1$ при $\tau+2/m<t<1-2/m$; $\Theta_m(t)=0$ при $t>1/m,\ t<\tau_0+1/m$. Нехай ρ_l – регуляризуюча послідовність в $D(\mathbb{R}),\ \rho_l(t)=\rho_l(-t)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\rho_l(t)dt=1,\quad \mathrm{supp}\,\rho_l\subset\left[-\frac{1}{l},\frac{1}{l}\right],\ \ l>2m.$$

Приймемо в формулі (18) $w=\left[(\Theta_m u_t e^{-\frac{\mu t}{2}})*\rho_l*\rho_l\right]\Theta_m e^{-\mu t/2}$, де $*$ позначає згортку за змінною t. Нехай $\varphi(t)=e^{-\mu t/2}$. Тоді для майже всіх β і τ_0 одержимо

$$-\int_{Q_T}u^2_t\Theta_m(t)\Theta'_m(t)e^{-\mu t}\psi dxdt+\int_{Q_T}\Bigg[\frac{\mu}{2}\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a^{sl}_{ij}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}e^{-\mu t}\psi\Theta^2_m(t)+$$

$$-\sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}e^{-\mu t}\psi\Theta_m(t)\Theta_m'(t)+\sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}\big(u_{tx_s}(\psi)_{x_l}+$$

$$+u_{tx_l}(\psi)_{x_s}\big)e^{-\mu t}\Theta_m^2(t)+\sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_t(\psi)_{x_sx_l}e^{-\mu t}\Theta_m^2(t)+$$

$$+\frac{\mu}{2}u_t^2\Theta_m^2(t)e^{-\mu t}\psi+\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{tx_i}(u_t\psi)_{x_j}e^{-\mu t}\Theta_m^2(t)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\chi_i(u_t\psi)_{x_i}e^{-\mu t}\Theta_m^2(t)+a_0(x,t)|u_t|^q\Theta_m^2(t)\psi e^{-\mu t}+$$

$$+c_0(x,t)uu_t\Theta_m^2(t)\psi e^{-\mu t}-f(x,t)u_t\psi\Theta_m^2(t)e^{-\mu t}\Bigg]dxdt=0. \qquad (19)$$

Оскільки

$$\Theta_m(t)=\begin{cases} m(t-\tau_0)-1, & t\in\left[\tau_0+\dfrac{1}{m},\tau_0+\dfrac{2}{m}\right] \\ -m(t-\beta)+1, & t\in\left[\beta-\dfrac{2}{m},\beta-\dfrac{1}{m}\right], \end{cases}$$

то за теоремою про середнє [[13], С. 114]

$$m\int_{\tau_0+\frac{1}{m}}^{\tau_0+\frac{2}{m}} g(t)\big(m(t-\tau_0)-1\big)dt=mg(\xi)\left[\frac{mt^2}{2}-\big(m\tau_0+1\big)t\right]\Bigg|_{\tau_0+\frac{1}{m}}^{\tau_0+\frac{2}{m}}=\frac{\mu_0}{2},$$

де $\mu_0\in[\beta_0,\beta_1],\ \beta_0\le g(x)\le\beta_1$ на $\left[\tau_0+\dfrac{1}{m},\tau_0+\dfrac{2}{m}\right]$.

Перейдемо в (19) до границі при $m\to\infty$:

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\beta}\left[u_t^2+\sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}\right]\psi e^{-\mu t}dx+\int_{Q_{\tau_0,\beta}}\left[\frac{\mu}{2}\sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}\psi+\right.$$

$$+\sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}\big(u_{tx_s}(\psi)_{x_l}+u_{tx_l}(\psi)_{x_s}\big)+\sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_t(\psi)_{x_sx_l}+ \qquad (20)$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{tx_i}(u_t\psi)_{x_j}+\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\chi_i(u_t\psi)_{x_i}+c_0(x,t)uu_t\psi+a_0(x,t)|u_t|^q\psi+$$

$$\left.+\frac{\mu}{2}|u_t|^2\psi-f(x,t)u_t\psi\right]e^{-\mu t}dxdt=\frac{1}{2}\int_{\Omega_{\tau_0}}\left[|u_t|^2+\sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_s,x_l}\right]\psi e^{-\mu t}dx.$$

Множина $\{u_t(\cdot,t)\}$ обмежена в $L^2_\nu(\Omega)$ і $u_t \in C\Big([0,T];(H^2_{0,\nu}(\Omega))^* + (W^{1,p}_{0,\nu}(\Omega))^* + (L^q_\nu(\Omega))^*\Big)$. Отже, існує послідовність точок $t_k \in [0,T]$, $t_k \to 0$, таких, що $u_t(\cdot,t_k) \to z_1$ слабко в $L^2_\nu(\Omega)$. З іншого боку $u_t(\cdot,t_k) \to u_t(\cdot,0) \to u_1$ слабко в $(H^2_{0,\nu}(\Omega))^* + (W^{1,p}_{0,\nu}(\Omega))^* + (L^q_\nu(\Omega))^*$. Тому $z_1 = u_1$ і $u_t(\cdot,t_k) \to u_1$ слабко в $L^2_\nu(\Omega)$.

Множина $\{u(\cdot,t)\}$ обмежена в $L^2_\nu(\Omega)$, $u \in L^\infty([0,T];H^2_{0,\nu}(\Omega))$. Отже, існує послідовність точок $\{t_k\} \subseteq (0,T]$, $t_k \to 0$, таких, що $u(\cdot,t_k) \to z_0$ слабко в $H^2_{0,\nu}(\Omega)$, $u(\cdot,t_k) \to u(\cdot,0) = u_0$ в $L^2_\nu(\Omega)$. Тому $z_0 = u_0$ і $u(\cdot,t_k) \to u_0$ слабко в $H^2_{0,\nu}(\Omega)$.

Розглянемо послідовність $\{Y_k\}$, визначену рівностями

$$0 \le Y_k := \int_{Q_\beta}\Bigg[\sum_{i=1}^n a_i(x,t)(|u^k_{tx_i}|^{p-2} - |w_{x_i}|^{p-2}w_{x_i})\cdot(u^k_{tx_i} - w_{x_i})e^{-\mu t}\psi +$$

$$+a_0(x,t)(|u^k_t|^{q-2}u^k_t - |w|^{q-2}w)(u^k_t - w)e^{-\mu t}\psi\Bigg]dxdt =$$

$$= \int_{Q_\beta}\Bigg[\sum_{i=1}^n a_i(x,t)|u^k_{tx_i}|^p + a_0(x,t)|u^k_t|^q\Bigg]e^{-\mu t}\psi dxdt -$$

$$-\int_{Q_\beta}\Bigg[\sum_{i=1}^n a_i(x,t)|u^k_{tx_i}|^{p-2}u^k_{tx_i}(w\psi)_{x_i} + a_0(x,t)|u^k_t|^{q-2}u^k_t w\psi\Bigg]e^{-\mu t}dxdt -$$

$$-\int_{Q_\beta}\Bigg[\sum_{i=1}^n a_i(x,t)|w_{x_i}|^{p-2}w_{x_i}(u^k_t - w)_{x_i}\psi + a_0(x,t)|w|^{q-2}w(u^k_t - w)\psi\Bigg]e^{-\mu t}dxdt.$$

Приймемо

$$g_k := \int_{Q_\beta}\Bigg[f^k u^k_t e^{-\mu t}\psi - \frac{\mu}{2}|u^k_t|^2 e^{-\mu t}\psi - \sum_{i,j,l,s=1}^n \frac{1}{2}\mu a^{sl}_{ij}(x)u^k_{x_ix_j}u^k_{x_sx_l}e^{-\mu t}\psi -$$

$$-\sum_{i,j,l,s=1}^n a^{sl}_{ij}(x)u^k_{x_ix_j}\big(u^k_{tx_s}(e^{-\mu t}\psi)_{x_l} + u^k_{tx_l}(e^{-\mu t}\psi)_{x_s}\big) - \sum_{i,j,l,s=1}^n a^{sl}_{ij}(x)u^k_{x_ix_j}u^k_t \times$$

$$\times(e^{-\mu t}\psi)_{x_sx_l} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u^k_{tx_i}u^k_{tx_j}e^{-\mu t}\psi - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u^k_{tx_i}u^k_t(e^{-\mu t}\psi)_{x_j} -$$

$$-\sum_{i=1}^n a_i(x)|u^k_{tx_i}|^{p-2}u^k_{tx_i}u^k_t\psi_{x_i}(x)e^{-\mu t} - c_0(x)u^k u^k_t e^{-\mu t}\psi\Bigg]dxdt -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega_\beta}\left[|u_t^k|^2+\sum_{i,j,l,s=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}^k u_{x_sx_l}^k\right]e^{-\mu\beta}\psi dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\left[|u_1^k|^2+\sum_{i,j,l,s=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{0x_ix_j}^k u_{0x_sx_l}^k\right]\psi dx.$$

Зазначимо, що у просторі X функцій, таких, що

$$\int_{Q_\beta}\left[u_t^2+u^2+\sum_{i,j=1}^{n}|u_{x_ix_j}|^2+\sum_{i,j=1}^{n}|u_{tx_ix_j}|^2\right]dxdt<\infty,$$

можна ввести еквівалентну норму за формулою (при досить великих μ)

$$||u||_X=\Bigg(\int_{Q_\beta}\Bigg[\frac{1}{2}\mu\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}e^{-\mu t}\psi+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}\big(u_{tx_s}(\psi)_{x_l}+$$

$$+u_{tx_l}(\psi)_{x_s}\big)e^{-\mu t}+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_t(e^{-\mu t}\psi)_{x_lx_s}+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{tx_i}u_{tx_j}e^{-\mu t}\psi+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}u_{tx_i}u_t(e^{-\mu t}\psi)_{x_j}-uu_te^{-\mu t}\psi+c_0(x)uu_te^{-\mu t}\psi+\frac{\mu}{2}u^2e^{-\mu t}\psi+\frac{\mu}{2}u_t^2e^{-\mu t}\psi\Bigg]dxdt\Bigg)^{1/2}.$$

Тому

$$\sup\lim_{k\to\infty}g_k\le\int_{Q_\beta}\Bigg[-\frac{\mu}{2}|u_t|^2e^{-\mu t}\psi-\frac{\mu}{2}\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}(ue^{-\mu t}\psi)_{x_sx_l}+$$

$$+f(x,t)u_te^{-\mu t}\psi-\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}\big(u_{tx_s}(e^{-\mu t}\psi)_{x_l}+u_{tx_l}(e^{-\mu t}\psi)_{x_s}\big)-$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{tx_i}u_{tx_j}e^{-\mu t}\psi-\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_t(e^{-\mu t}\psi)_{x_sx_l}-$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{tx_i}u_t(e^{-\mu t}\psi)_{x_j}-\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\chi_iu_t\psi_{x_i}(x)e^{-\mu t}-c_0(x)uu_te^{-\mu t}\psi\Bigg]dxdt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega_\beta}\left[u_t^2+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}\right]e^{-\mu\beta-\nu\sqrt{|x|^2+1}}dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\left[u_1^2+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{0x_ix_j}u_{0x_sx_l}\right]\psi dx.$$

Отож,

$$0 \le \sup \lim_{k\to\infty} Y_k \le \int_{Q_\beta} \Big[-\frac{\mu}{2}|u_t|^2 e^{-\mu t}\psi - \frac{\mu}{2}\sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}e^{-\mu t}\psi +$$

$$+f(x,t)u_te^{-\mu t}\psi - \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}\big(u_{tx_s}(e^{-\mu t}\psi)_{x_l} + u_{tx_l}(e^{-\mu t}\psi)_{x_s}\big) -$$

$$-\sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_t(e^{-\mu t}\psi)_{x_sx_l} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{tx_i}u_{tx_j}e^{-\mu t}\psi -$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{tx_i}u_te^{-\mu t}(\psi)_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\chi_i u_t w_{x_i}e^{-\mu t} - c_0(x)uu_te^{-\mu t}\psi\Big]dxdt -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega_\beta}\Big[u_t^2 + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}\Big]e^{-\mu\beta-\nu\sqrt{|x|^2+1}}dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\Big[u_1^2 + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{0x_ix_j}u_{0x_sx_l}\Big]\psi dx - \int_{Q_\beta}\Big[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|w_{x_i}|^{p-2}w_{x_i}\times$$

$$\times\big((u_t-w)e^{-\mu t}\psi\big)_{x_i} + a_0(x,t)|w|^{q-2}w(u_t-w)e^{-\mu t}\psi\Big]dxdt +$$

$$+\int_{Q_\beta}\Big[-\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\chi_i(w_{x_i}\psi)e^{-\mu t} - a_0(x,t)|u_t|^{q-2}u_twe^{-\mu t}\Big]dxdt. \quad (21)$$

Додавши (20) і (21), одержимо

$$\int_{Q_\beta}\Big[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\chi_i(u_t\psi)_{x_i} + a_0(x,t)|u_t|^q\psi - \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\chi_i w_{x_i}\psi -$$

$$-a_0(x,t)|u_t|^{q-2}u_tw\psi\Big]e^{-\mu t}dxdt - \int_{Q_\beta}\Big[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|w_{x_i}|^{p-2}w_{x_i}((u_t-w)_{x_i}\psi) +$$

$$+a_0(x,t)|w|^{q-2}w(u_t-w)\psi\Big]e^{-\mu t}dxdt \ge 0.$$

Нехай $w = u_t - \lambda z,\ \lambda > 0$. Тоді отримана нерівність набуде вигляду

$$\int_{Q_\beta}\Big[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\chi_i(z_{x_i}\psi) + a_0(x,t)|u_t|^{q-2}u_tz\psi - \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|u_{tx_i} - \lambda z_{x_i}|^{p-2}\times$$

$$\times(u_{tx_i} - \lambda z_{x_i})z_{x_i}\psi - a_0(x,t)|u_t - \lambda z|^{q-2}(u_t - \lambda z)z\psi\Bigg]e^{-\mu t}dxdt \geq 0. \quad (22)$$

Перейдемо в (22) до границі при $\lambda \to +0$:

$$\int_{Q_\beta}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)(\chi_i - |u_{tx_i}|^{p-2}u_{tx_i})(z_{x_i}\psi)\right]e^{-\mu t}dxdt \geq 0.$$

Звідки зокрема

$$\int_{Q_\beta}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)(\chi_i - |u_{tx_i}|^{p-2}u_{tx_i})(z_{x_i}\psi)\right]e^{-\mu t}dxdt = 0$$

для всіх $z \in L^p((0,T); W^{1,p}_{0,\nu}(\Omega))$. Отже, $\chi_i = |u_{tx_i}|^{p-2}u_{tx_i}$ майже всюди в Q_T, $i \in \{1,...,n\}$.

Залишилося показати виконання початкових умов. На підставі (13) можемо вважати, що $u^k(\cdot,0) \to u(\cdot,0)$ слабко в $L^2_\nu(\Omega)$. Але $u^k(\cdot,0) = u_0^{k,k} \to u_0$ в $H^2_{0,\nu}(\Omega)$. Тому $u(x,0) = u_0(x)$. Аналогічно, $u^k_t(\cdot,0) \to u_t(\cdot,0)$ слабко в $L^2_\nu(\Omega)$, а $u^k_t(\cdot,0) = u_1^{k,k} \to u_1$ в $L^2_\nu(\Omega)$. Отож, $u_t(x,0) = u_1(x)$.

Теорему доведено.

[1] *W.D.Kallies, P.J.Holmes.* On a dynamical model for phase transformation in nonlinear elasticity, in: J.Chadam, M.Golubitsky, W.Langford, B.Wetton (eds.), Pattern formation: symmetry methods and applications, Fields Institute Communications 5, AMS, Providence, 1996.

[2] *W.D.Kallies.* Regularized models of phase transformation in one-dimensional nonlinear elasticity//Ph.D. Thesis, Cornell University, 1994.

[3] *Piotr Rybka and Karl-Heinz Hoffmann.* Convergence of solutions to the Equation of Quasi-Static Approximation of Viscoelasticity with Capillarity // Journal of mathematical analysis and applications. – 1998. – T. 226 – N.1. – C. 61-81.

[4] *R. Abeyaratne and J. K. Knowles.* Kinetic relations and propagation of phase boundaries in solids//Arch. Rational Mech. Anal. – 1991. – T.114 – C.119-154.

[5] *R. Abeyaratne and J. K. Knowles.* Implications of viscosity and strain gradient effects for the kinetics of propagating phase boundaries in solids // SIAM J. Appl. Math. – 1991. – T. 51 – C. 1205-1221.

[6] *M.Slemrod* Admissibility criteria for propagating phase boundaries in a van der Waals fluid//Arch. Rational Mech. Anal. – 1983. – T. 81 – C. 37-85.

[7] *Працах Н. П.* Мішана задача для нелінійного еволюційного рівняння з другою похідною за часом в узагальнених просторах Лебега//Математичні студії. – 2001. – Т. 16, N. 2. – С. 157-168.

[8] *Працах Наталія* Існування та єдиність розв'язку мішаної задачі для одного параболіч- ного нелінійного рівняння//Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. – 2001. – Вип. 59. – С. 148-157.

[9] *Слепцова И. П., Шишков А. Е.* Принцип Фрагмена-Линделефа для неоднородных квазилинейних еволюционних уравнений вищого порядка//Укр. матем. журнал. – 2005. – Т. 57, N. 2. – С. 239-249.

[10] *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М., 1958. – 474 с.

[11] *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные диференциальные уравнения. – М.: Мир. – 1972. – 336 с.

[12] *Лионс Ж.- Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир.– 1972. – 588 с.

[13] *Фихтенгольц Г. М.* Основи математического анализа. Т. 2. – М.: Наука. – 1968. – 588 с.

THE INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A NONLINEAR PARABOLIC EQUATION OF THE FOURTH ORDER

Galyna TORGAN

Ivan Franko Lviv National University,
1 Universytetska Str., Lviv 79000, Ukraine

We obtaine some sufficient conditions of the existence of a generalized solution of the initial boundary value problem for a nonlinear parabolic equation of the fourth order in an unbounded domain with respect to spatial variables.