ВІЛЬНА ГРУПА, ЩО ПОРОДЖУЄТЬСЯ ДВОМА МНОГОЧЛЕНАМИ

©2009 р. Михайло СУМАРЮК

Київський національний університет ім. Т. Шевченка

Редакція отримала статтю 7 вересня 2009 р

Будується вільна група, яка породжується двома перетвореннями дійсного або комплексного поля $x \to \frac{1}{p}x^p + \frac{p-1}{p}$ та $x \to \frac{1}{q}x^q + \frac{q-1}{q}$, де p, q – різні непарні прості числа.

1. Вступ

У теорії вільних напівгруп та вільних груп важливою є задача побудови конкретних зображень за допомогою різноманітних алгебро-комбінаторних об'єктів. Добре відомі, наприклад, зображення Маґнуса вільної групи скінченного рангу формальними степеневими рядами від некомутативних змінних за допомогою якого охарактеризовано її нижній центральний ряд [3], матричне зображення Санова, яке дозволило встановити, що вільні групи апроксимуються скінченними p-групами для довільного простого числа p [7], також побудовані зображення вільних груп у вінцевих добутках [4], зображення унітрикутними матрицями нескінченного порядку над полем із двох елементів [5], зображення вільних напівгруп автоматними перетвореннями [6] і т. ін., які нині широко використовуються у різноманітних розділах сучасної алгебри і на даному етапі інтерес до таких конструкцій неухильно зростає.

Як відомо (див., наприклад, [1, 2]), вільна група (напівгрупа) рангу 2 містить ізоморфну копію будь-якої вільної групи (напівгрупи) скінченного або зліченного рангу. Тому, якщо обмежитися розглядом лише

УДК 512.54

зліченних вільних груп (напівгруп), то, як правило, будують зображення вільних 2-породжених алгебраїчних конструкцій, тобто будують зображення вільної групи (напівгрупи) з двоелементною вільною базою.

Серед усіх зображень вільних алгебраїчних структур тими чи іншими об'єктами, виділяються зображення певними функціями над полями нульової характеристики. Задача про побудову таких зображень виникла ще у першій половині XX століття. Зокрема, у 1949 році Б. Нейман довів [10], що у групі всіх дійсних монотонних функцій над $\mathbb{R}$ існує вільна підгрупа континуального рангу. Доведення результату цієї статті є громіздким і складним і воно не дало змоги побудувати конкретні зображення вільних груп дійсними монотонними функціями. Це зумовило дослідників до знаходження саме таких конкретних зображень, щоб певним чином спростити доведення, яке запропоноване Б. Нейманом.

Х. Фрідманом було висловлено гіпотезу, що напевно, перетворення дійсного поля $x \to x+1$ та $x \to x^3$ породжують вільну групу і ця гіпотеза отримала назву проблеми Фрідмана, розв'язанням якої займався Г. Цассенгаус [12]. Однак, як зазначає С. Вайт у роботі [11], що розв'язання проблеми Фрідмана, яке наводиться Г. Цассенгаусом [12], є неповним. У свою чергу С. Вайт у згаданій роботі [11] доводить, що перетворення дійсного поля $x \to x + 1$ та $x \to x^p$, де p – деяке фіксоване просте число, вільно породжують вільну групу, звідки при значенні $p = 3$ випливає позитивна відповідь стосовно проблеми Фрідмана. Це було першим конкретним зображенням вільної групи рангу 2 дійсними монотонними функціями, яке супроводжувалося повним доведенням. Однак, доведення С. Вайта також є громіздким і опирається на декілька складних теорем теорії полів та алгебраїчної геометрії. Пізніше С. Коеном було отримано загальніший результат, який формулюється таким чином [9]: перетворення дійсного або комплексного поля $x \to x + 1$ та $x \to x^q$, де $q > 1$ – довільне фіксоване непарне натуральне число у випадку дійсного поля $\mathbb{R}$ та довільне фіксоване натуральне число у випадку комплексного поля $\mathbb{C}$, вільно породжують вільну групу.

К. Беннет у [8] наводить значно простіше розв'язання задачі про побудову конкретних зображень вільних груп дійсними монотонними функціями і вказує конкретні аналітичні задання набору $n > 1$ дійсних монотонних функцій, які породжують вільну групу рангу n. Хоча вказані К. Беннетом функції мають дещо складніше задання, ніж ті функції, що запропоновані С. Вайтом та С. Коеном, більш того, функції К. Беннета не відносяться до класу елементарних функцій.

У даній роботі будується конкретне зображення вільної групи рангу

2, яка породжується многочленами

$$f(x) = \frac{1}{p}x^p + \frac{p-1}{p}, g(x) = \frac{1}{q}x^q + \frac{q-1}{q}, x \in \mathbb{R} \quad (x \in \mathbb{C}),$$

де p, q – різні непарні прості числа.

2. Основний результат

Отже, нехай F – група, що породжується многочленами f та g.

Тоді має місце наступне твердження.

Теорема. *Група F є вільною групою вільно породженою многочленами f та g над дійсним або комплексним полем.*

Доведення. 1) Розглянемо спочатку випадок комплексного поля. Нехай $\sqrt[p]{1}$ та $\sqrt[q]{1}$ – множини всіх коренів p-го та q-го степеня з 1 відповідно. Оскільки p, q – різні непарні прості числа, то $\sqrt[p]{1} \bigcap \sqrt[q]{1} = \{1\}$.

Тоді маємо такі умови:

$$f(\sqrt[p]{1}) = \{1\}, g(\sqrt[q]{1}) = \{1\}, f(\sqrt[q]{1}) \neq \{1\}, g(\sqrt[p]{1}) \neq \{1\},$$

звідки випливає, що

$$f^{-1}(1) = \sqrt[p]{1}, g^{-1}(1) = \sqrt[q]{1}, f^{-1}(1) \neq \sqrt[q]{1}, g^{-1}(1) \neq \sqrt[p]{1}.$$

Приймемо такі індуктивні припущення:

а) нехай для довільного нескоротного слова u від многочленів f та g, довжина якого дорівнює $k \geq 2$, всі непорожні підслова v від многочленів f та g, не здійснюють тотожного перетворення поля $\mathbb{C}$;

б) для довільного непорожнього підслова v нескоротного слова u довжини $k \geq 2$ маємо: якщо слово v закінчується літерою f, то $v(\sqrt[q]{1}) \neq \{1\}$; якщо слово v закінчується літерою f^{-1}, то $v(1) \neq \sqrt[q]{1}$; якщо слово v закінчується літерою g, то $v(\sqrt[p]{1}) \neq \{1\}$; якщо слово v закінчується літерою g^{-1}, то $v(1) \neq \sqrt[p]{1}$.

Зазначимо, що для всіх підслів v довжини 1 слова u, наведені припущення виконуються.

Для доведення теореми достатньо розглядати слово u, яке подається у вигляді

$$u = g_1^{(\alpha_1)} \circ g_2^{(\alpha_2)} \circ g_1^{(\alpha_3)} \circ g_2^{(\alpha_4)} \circ ... \circ g_1^{(\alpha_{2m-1})} \circ g_2^{(\alpha_{2m})},$$

де

$$g_1, g_2 \in \{f, g\}, g_1 \neq g_2, \alpha_1, \alpha_2, ... \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}.$$

Зазначимо, що слово u є нескоротним, оскільки функції виду

$$h_1^{\varepsilon_1} \circ h_2^{\varepsilon_2}, h_1, h_2 \in \{f, g\}, h_1 \neq h_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\},$$

не здійснюють тотожного перетворення поля $\mathbb{R}$ (або $\mathbb{C}$), а також тому, що многочлени f та g у групі F мають нескінченний порядок.

Припустимо, що виконується тотожність $u(x) \equiv x, x \in \mathbb{C}$. Тоді серед показників $\alpha_1, \alpha_2, ... \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ не можуть бути всі додатними або всі від'ємними; у першому випадку степінь многочлена $u(x)$ більша 1, а в другому випадку отримуємо тотожність $u^{-1}(x) \equiv x, x \in \mathbb{C}$, де многочлен $u^{-1}(x)$ також має степінь вищий, ніж 1.

Отже, серед показників $\alpha_1, \alpha_2, ... \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ є як додатні числа, так і від'ємні. Тоді слово u містить хоча б одне із підслів

$$g_1 \circ g_2^{-1}, g_1^{-1} \circ g_2, g_2 \circ g_1^{-1}, g_2^{-1} \circ g_1,$$

тобто слово u подається у вигляді нескоротного слова таким чином: $u = u_1 \circ w \circ u_2$, де

$$w \in \{g_1 \circ g_2^{-1}, g_1^{-1} \circ g_2, g_2 \circ g_1^{-1}, g_2^{-1} \circ g_1\},$$

а u_1, u_2 деякі нескоротні слова від многочленів f та g, або одне із них може бути порожнім.

Отже, маємо тотожність $(u_1 \circ w \circ u_2)(x) \equiv x, x \in \mathbb{C}$. Із вигляду слова u випливає, що слово $u_2 \circ u_1 \circ w$ є нескоротним, причому з наведеної тотожності випливає і така тотожність $(u_2 \circ u_1 \circ w)(x) \equiv x, x \in \mathbb{C}$.

Якщо $w = f \circ g^{-1}$, то згідно наведених припущень

$$(u_2 \circ u_1 \circ f \circ g^{-1})(1) = (u_2 \circ u_1 \circ f)(\sqrt[q]{1}) \neq \{1\};$$

якщо $w = f^{-1} \circ g$, то

$$(u_2 \circ u_1 \circ f^{-1} \circ g)(\sqrt[q]{1}) = (u_2 \circ u_1 \circ f^{-1})(1) \neq \sqrt[q]{1};$$

якщо $w = g \circ f^{-1}$, то

$$(u_2 \circ u_1 \circ g \circ f^{-1}(1) = (u_2 \circ u_1 \circ g)(\sqrt[p]{1}) \neq \{1\};$$

якщо $w = g^{-1} \circ f$, то

$$(u_2 \circ u_1 \circ g^{-1} \circ f)(\sqrt[q]{1}) = (u_2 \circ u_1 \circ g^{-1})(1) \neq \sqrt[q]{1}.$$

Таким чином, отримали суперечність щодо виконання тотожності $(u_2 \circ u_1 \circ w)(x) \equiv x, x \in \mathbb{C}$, відтак і тотожності $u(x) \equiv x, x \in \mathbb{C}$. Тому методом математичної індукції доведено, що многочлени f та g у випадку комплексного поля $\mathbb{C}$ породжують вільну групу.

2) Якщо у випадку дійсного поля $\mathbb{R}$ для деякого нескоротного слова u від многочленів f та g, виконується тотожність $u(x) \equiv x, x \in \mathbb{R}$, то ліва і права її частини є аналітичними функціями в $\mathbb{R}$. Тоді за теоремою про аналітичне продовження функції, виконується і така тотожність $u(x) \equiv x, x \in \mathbb{C}$, а це суперечить попередній частині доведення. Отже, сформульовану теорему доведено повністю. □

[1] *Курош А.Г.* Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.

[2] *Ляпин Е.С.* Полугруппы. – М.: Физматгиз, 1960. – 592с.

[3] *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. Пер. с англ. – М.: Наука, 1979. – 456 с.

[4] *Олійник А.С.* Вільні групи автоматних підстановок // Доп. НАН України. – 1998. – №7. – С. 40-44.

[5] *Олийнык А.С., Сущанский В.И.* Свободная группа бесконечных унитреугольных матриц // Мат. заметки. – 2000. – **67**, №3, – С. 386-391.

[6] *Олийнык А.С.* О свободных полугруппах автоматных преобразований // Матем. заметки. – 1998. – **63**. – С. 248-259.

[7] *Санов И.Н.* Свойство одного представления свободной группы. – Докл. АН СССР. – 1947. – **57**. – С. 657-659.

[8] *Bennett C.D.* Explicit free subgroups of $Aut(\mathrm{R}, \leq)$. – Proc. Amer. Math. Soc. – 1997. – **125**, №5. – P. 1305-1308.

[9] *Cohen S.D.* The group of translations and positive rational powers is free // Quart. J.Math. Oxford. – 1995. – **46**, №2. – P. 21-93.

[10] *Neumann B.H.* On ordered groups // Amer. J. Math. – 1949. – **71**, №1-2. – P. 1-18.

[11] *White S.* The group, generated by $x \to x+1$ and $x \to x^p$ is free // Journal of Algebra. – 1988. – **118**. – P. 408-422.

[12] *Zassenhaus H.* On a problem Harvey Friedman // Comm. Algebra. – 1978. – **6**. – P. 1629-1634.

FREE GROUP THAT GENERATED BY TWO POLINOMIALS

Mykhaylo SUMARYUK

Taras Shevcheno Kyiv National University

We constructed the free group that generated by two transformations of the real or complex field $x \to \frac{1}{p}x^p + \frac{p-1}{p}$ and $x \to \frac{1}{q}x^q + \frac{q-1}{q}$ for p, q different odd prime numbers.