ФУНКТОР ГІПЕРПРОСТОРУ І ПРОДОВЖЕННЯ РОЗМИТИХ МЕТРИК

©*2009 р.* *Олександр САВЧЕНКО*

Херсонський державний аграрний університет

Редакція отримала статтю 20 листопада 2009 р.

Розмиті метричні простори тісно пов'язані з ймовірнісними розмитими просторами; у останніх відстань набуває значення не в множині дійсних чисел, а в множині функцій розподілу. Розв'язується проблема продовження розмитих метрик у випадку, коли множина, з якої метрика продовжується, є зв'язною. При цьому ми використовуємо розмиту метризацію функтора гіперпростору.

1 Вступ

Поняття розмитого метричного простору (fuzzy metric space) тісно пов'язане з поняттям ймовірнісного метричного простору [12], яке, в свою чергу, є узагальненням поняття метричного простору. У ймовірнісних метричних просторах значення відстані є не числами, як у випадку метричних просторів, а функціями розподілу. Існує кілька версій поняття розмитого метричного простору. Однією з найпоширеніших є запропонована в [5].

Інтерес до розмитих метричних просторів викликаний не лише їх різноманітними застосуваннями, але також і тим фактом, що структура розмитого метричного простору багатша, ніж структура метричного простору. Це може бути проілюстровано хоча б тим фактом, що існує поняття повного розмитого простору, та, на відміну від випадку метричних просторів, існують як поповнювані, так і непоповнювані розмиті метричні простори. Теорія розмитих метричних просторів розвивається у різних напрямках і зараз розмитим метричним просторам присвячена обширна література. Загальною проблемою є знаходження змістовних

MSC 2000: 54E15, 54B20, 54B30

аналогів результатів метричної геометрії та топології метричних просторів у теорії розмитих метричних просторів.

У цій статті ми розглядаємо задачу продовження розмитих метрик. Ця тематика веде свій початок від класичної праці Гаусдорфа [7], у якій показано, що кожна сумісна метрика, означена на замкненій підмножині метризовного простору, може бути продовжена до сумісної метрики на всьому просторі. Ця теорема одержала в наступні десятиліття багато доведень і узагальнень (див., наприклад, [1, 2, 3, 14, 16]). Нашим основним результатом є доведення цієї теореми для випадку, коли множина, з якої продовжують метрику, є зв'язною. Метод доведення базується на вкладенні розмитого метричного простору у його гіперпростір (простір замкнених множин) а також у простір гіперпросторів включення; зауважмо, що аналог метрики Гаусдорфа на просторі замкнених підмножин розмитого метричного простору означено в [11].

2 Вступні відомості

Нагадаємо, що *неперервною t-нормою* називають бінарну операцію $*\colon [0,1]\times[0,1]\to[0,1]$, що задовольняє умови:

(i) $*$ асоціативна і комутативна;

(ii) $*$ неперервна;

(iii) $a*1=a$ для кожного $a\in[0,1]$;

(iv) $a*b\le c*d$, якщо $a\le c$ і $b\le d$, де $a,b,c,d\in[0,1]$.

(Коротко кажучи, неперервна t-норма — це бінарна операція $*:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ така, що трійка $([0,1],\le,*)$ є впорядкованим абелевим топологічним моноїдом з одиницею 1.) Прикладами t-норм є функції $a*b=ab$ та $a*b=\min\{a,b\}$.

Означення 1. *(George and Veeramani [5, Denition 1]).* Розмитим метричним простором називають упорядковану таку трійку $(X,M,*)$, що X — непорожня множина, $*$ — неперервна t-норма і M — розмита множина на $X\times X\times(0,+\infty)$, що задовольняє умови для всіх $x,y,z\in X$, $s,t>0$:

(i) $M(x,y,t)>0$;

(ii) $M(x,y,t)=1$ тоді і лише тоді, коли $x=y$;

(iii) $M(x,y,t) = M(y,x,t)$;

(iv) $M(x,y,t) * M(y,z,s) \le M(x,z,t+s)$;

(v) функція $M(x,y,-)\colon (0,+\infty) \to (0,1]$ неперервна.

Функцію M називають *розмитою метрикою* на X (стосовно $*$). Зауважмо, що для кожного метричного простору (X,d) функція

$$M_d(x,y,t) = \frac{t}{t + d(x,y)}$$

є розмитою метрикою на X для t-норми $* = \min$.

Нескладно показати, що функція $M(x,y,-)$ неспадна $x,y \in X$ (див., наприклад, [6]).

Якщо замінити умову (ii) в означенні 1 на умову

$$(\text{ii}')\, M(x,x,t) = 1,$$

то ми одержимо означення *розмитої псевдометрики* на множині X, а якщо в умові (v) вимагати, щоби функція $M(x,y,-)\colon (0,+\infty) \to (0,1]$ була неперервною зліва, то одержимо поняття *розмитого метричного простору* в сенсі статті [8].

Ми залишаємо читачеві доведення такого простого твердження.

Лема 2. *Нехай $(X,M,*)$ — розмитий метричний простір. Для кожного відображення $f\colon Y \to X$ функція $M'\colon Y \times Y \times (0,\infty) \to (0,1]$, означена формулою $M'(x,y,t) = M(f(x),f(y),t)$, є розмитою псевдометрикою на множині Y. Більше того, якщо відображення f є вкладенням, то M' — розмита метрика.*

Лема 3. *Нехай $(X,M_i,*)$, $i = 1,2$, — розмиті метричні простори. Тоді $(X,M,*)$, де $M = \min\{M_1,M_2\}$, — також розмитий метричний простір.*

Доведення. Нетривіальним є лише доведення умови (iv) з означення 1. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $M(x,z,t+s) = M_1(x,z,t+s)$. Тоді з умови (iv) означення t-норми випливає

$$M(x,y,t) * M(y,z,s) \le M_1(x,y,t) * M_1(y,z,s) \le M(x,z,t+s).$$

□

В [5] доведено, що кожна розмита метрика $(M, *)$ на множині X породжує топологію τ_M на X. Базою цієї топології є сім'я множин

$$B_M(x, \varepsilon, t) = \{y \in X \mid M(x, y, t) > 1 - \varepsilon\},$$

де $x \in X$, $0 < \varepsilon < 1$ і $t > 0$. Якщо топологія τ_M збігається з вихідною топологією на просторі X, то кажуть, що розмита метрика на топологічному просторі *сумісна* з його топологією.

Лема 4. *Якщо $t \leq t'$, то $B_M(x, \varepsilon, t) \subseteq B_M(x, \varepsilon, t')$ для всіх $x \in X$ та ε.*

Доведення. Якщо $y \in B_M(x, \varepsilon, t)$, то $M(x, \varepsilon, t') \geq M(x, \varepsilon, t) > 1-\varepsilon$, звідки одержуємо, що $y \in B_M(x, \varepsilon, t')$. $\square$

2.1 Розмита метрика Гаусдорфа

Нехай B — непорожня підмножина розмитого метричного простору $(X, M, *)$. Для кожних $a \in X$ і $t > 0$, нехай

$$M(a, B, t) = \sup\{M(a, b, t) \mid b \in B\}$$

(див. [11, Definition 2.4]).

Нехай $(X, M, *)$ — розмитий метричний простір. Позначимо через $\exp X$ сім'ю всіх непорожніх компактних підмножин в просторі X. Як і в [11], означимо функцію M_H на $\exp X \times \exp X \to (0, \infty)$ формулою:

$$M_H(A, B, t) = \min\left\{\inf_{a \in A} M(a, B, t), \inf_{b \in B} M(A, b, t)\right\}$$

для всіх $A, B \in \exp X$ і $t > 0$. Основний результат (Теорема 1) статті [11] стверджує, що $(M_H, *)$ — розмита метрика на множині $\exp X$ (*розмита метрика Гаусдорфа*). Більше того, ця розмита метрика породжує топологію Вієторіса на гіперпросторі $\exp X$. Нагадаємо, що база топології Вієторіса складається з множин вигляду

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \{A \in \exp X \mid A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i,\ A \cap U_i \neq \emptyset \text{ для всіх } i\},$$

де $U_1, \ldots, U_n$ — відкриті в X множини.

Зауваження 5. *Ми використовуємо позначення M_H замість вжитого в статті [11] позначення H_M; це пов'язане з тим, що тоді природно позначати розмиті метрики на ітераціях $\exp^2 = \exp\exp$, $\exp^3$, \ldots функтора $\exp$ через M_{HH}, $M_{HHH}, \ldots$.*

Виразимо відстань Гаусдорфа у дещо іншій, еквівалентній формі. Нехай $C \subseteq X$. Позначимо $B(C, \varepsilon, t) = \cup\{B_M(c, \varepsilon, t) \mid c \in C\}$.

Твердження 6. *Для кожних* $C, D \in \exp X$ *маємо*

$$M_H(C, D, t) = \sup\{\varepsilon \mid C \subseteq B(D, 1-\varepsilon, t),\ D \subseteq B(C, 1-\varepsilon, t)\}.$$

Доведення. Тимчасово позначимо праву частину рівності у формулюванні через $M'_H(C, D, t)$.

Припустимо, що $M_H(C, D, t) > r$. Тоді $\inf\limits_{c \in C} M(c, D, t) > r$, тому для кожного $c \in C$ існує $d \in D$ таке, що $M(c, d, t) > r = 1 - (1 - r)$, тобто $c \in M(D, 1-r, t)$ для кожного $c \in C$. Отже, $C \subseteq B(D, 1-r, t)$. Аналогічно можна показати, що $D \subseteq B(C, 1-r, t)$. Таким чином, $r \in \{\varepsilon \mid C \subseteq B(D, 1-\varepsilon, t),\ D \subseteq B(C, 1-\varepsilon, t)\}$ і $M'_H(C, D, t) \geq r$. Тепер, спрямувавши $r \to M_H(C, D, t)$, одержимо, що $M_H(C, D, t) \leq M'_H(C, D, t)$.

Обернена нерівність доводиться аналогічно.

□

2.2 Гільбертів куб

Нагадаємо, що гільбертів куб Q — це зліченний степінь відрізка $I = [0, 1]$, $Q = I^\omega$. Геометрії гільбертового куба присвячено книгу [4].

Нагадаємо, що в компактному метричному просторі Y, замкнена множина $A \subseteq Y$ називається Z*-множиною*, якщо тотожне відображення простору Y може бути наближене, в топології рівномірної збіжності, відображеннями, образи яких не перетинають A (деталі див., наприклад, в [4, 9]). Відомо, що кожне відображення $f\colon A \to Q$, яке є Z-вкладенням (тобто образ $f(A)$ є Z-множиною) і означене на замкненій підмножині A метризовного сепарабельного простору X, може бути продовжене до вкладення $\bar{f}\colon X \to Q$.

2.3 Гіперпростори включення

Нехай X — компактний гаусдорфовий простір. Непорожня замкнена підмножина $\mathcal{A}$ простору $\exp X$ називається *гіперпростором включення,* якщо для кожного $A \in \mathcal{A}$ і кожного $B \in \exp X$ такого, що $A \subseteq B$, маємо $B \in \mathcal{A}$. Множина $G(X)$ всіх гіперпросторів включення наділяється топологією, замкненою передбазою якої є сім'я множин вигляду

$$\begin{aligned} A^+ &= \{\mathcal{A} \in G(X) \mid A \in \mathcal{A}\}, \\ A^- &= \{\mathcal{A} \in G(X) \mid A \cap B \neq \emptyset \text{ для всіх } B \in \mathcal{A}\}, \end{aligned}$$

де A пробігає сім'ю всіх замкнених множин у просторі X.

Відомо (див., наприклад, [9]), що множина $G(X)$ замкнена в $\exp^2 X$ і топологія на $G(X)$ збігається з індукованою з простору $\exp^2 X$ топологією. Для кожного $x \in X$ позначимо $\eta(x) = \eta_X(x) = \{A \in \exp X \mid x \in A\} \in G(X)$.

Твердження 7. *Нехай M — сумісна розмита метрика на компактному метризовному просторі X. Тоді для кожних $x, y \in X$ і кожного $t \in (0, \infty)$ маємо $M(x, y, t) = M_{HH}(\eta(x), \eta(y), t)$.*

Доведення. Припустимо, що $r \in (0, M(x, y, t))$. Тоді для кожного $A \in \eta(x)$ маємо $M_H(A, A \cup \{y\}, t) \geq r$ і для кожного $A \in \eta(y)$ маємо $M_H(A, A \cup \{x\}, t) \geq r$. Отже, $M_{HH}(\eta(x), \eta(y), t) \geq M(x, y, t)$.

Обернена нерівність випливає з такого зауваження: маємо $\{x\} \in \eta(x)$ і водночас не існує $B \in \eta(y)$ такого, що $M_H(\{x\}, B, t) > M(x, y, t)$. $\square$

Нам знадобиться такий результат з статті [10]: простір $G(X)$ гомеоморфний гільбертовому кубові Q для кожного невиродженого метричного континуума X. Доведення наступного твердження долучаємо для повноти викладу.

Твердження 8. *Нехай X — невироджений метричний континуум. Множина $\eta_X(X)$ є Z-множиною в просторі $G(X)$.*

Доведення. Зафіксуємо деяку метрику в X. Нехай $r \in (0, 1)$ і A_r – деяка скінченна r-сітка в просторі X. Не обмежуючи загальності ми можемо вважати, що $X \neq U_r(x)$ для довільних $r \in (0, 1)$ і $x \in A_r$, де $U_r(x)$ – відкрита куля з центром x і радіусом r. Означимо відображення $f_r \colon G(X) \to G(X)$ формулою:

$$f_r(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \cup \{B \in \exp X \mid \emptyset \neq A \setminus U_r(x) \subseteq B \text{ для деякого } x \in A_r\}.$$

З властивостей простору $G(X)$ (див., наприклад, [13]) випливає, що відображення f_r коректно означене і при $r \to 0$ відображення f_r рівномірно прямують до тотожнього відображення множини $G(X)$.

Нескладно побачити, що для кожного $x \in X$ і для кожного $\mathcal{A} \in G(X)$ існує $B \in f_r(\mathcal{A})$ таке, що $x \notin B$. Звідси випливає, що $f_r(G(X)) \cap \eta_X(X) = \emptyset$, тобто ми показали, що $\eta_X(X)$ є Z-множиною в просторі $G(X)$. $\square$

3 Продовження розмитих метрик

Основним результатом статті є таке твердження.

Теорема 9. *Нехай A — непорожна зв'язна замкнена підмножина компактного метризовного простору X. Нехай M — неперервна розмита метрика на A. Тоді існує неперервна розмита метрика на X, що продовжує M.*

Доведення. Розглянемо розмиту метрику M_{HH} на множині $\exp^2 A = \exp\exp A$. Оскільки, як зауважено раніше, простір $G(A) \subseteq \exp^2 A$ гомеоморфний гільбертовому кубові, який, як відомо, є абсолютним екстензором у класі метричних просторів, то існує $F\colon X \to G(A)$ таке, що $F(x) = \eta(x)$ для кожного $x \in A$. Більше того, використовуючи той факт, що множина $\eta(A)$ є Z-множиною в просторі $G(A)$, можна додатково припустити, що відображення F є вкладенням (див. вище).

Означимо функцію $M'\colon X \times X \times (0,\infty) \to [0,1]$ формулою:

$$M'(x,y,t) = M_{HH}(F(x),F(y),t),\ (x,y,t) \in X \times X \times (0,\infty).$$

Згідно з лемою 2, M' є розмитою метрикою на множині X і, згідно з твердженням 7, для кожних $x,y \in A$ і $(t \in (0,\infty)$, маємо

$$M'(x,y,t) = M_{HH}(F(x),F(y),t) = M_{HH}(\eta(x),\eta(y),t) = M(x,y,t),$$

тобто функція M' є продовженням функції M. Оскільки відображення F є вкладенням, розмита метрика M' є сумісною з топологією на X. $\square$

Аналогічний результат нескладно одержати для випадку розмитих псевдометрик.

4 Зауваження і відкриті проблеми

Метод доведення теореми 9 не працює, коли простір, з якого продовжуємо метрику, незв'язний. Це веде до такого запитання.

Питання 10. *Чи істотною є умова зв'язності в теоремі 9?*

У зв'язку з цим питанням виникають і інші проблеми

Питання 11. *Чи можна продовжити розмиту метрику з заданого компактного метризовного простору на деякий оточуючий континуум?*

Існують різні підходи до цієї проблеми. Зокрема, можна продовжувати розмиті метрики на конус (зокрема і на стиснутий конус [2]) над метричним простором. Виявляється, результат залежить від існування розмитих метрик з заданою t-нормою на відрізку.

Оскільки кожен компактний метризовний простір може бути перетворений в континуум доклеюванням деякої нуль-послідовності дуг, це веде також до такої проблеми.

Питання 12. *Чи можна продовжити розмиту метрику на дугу, приклеєну до компактного розмитого метричного простору?*

Знову ж таки, результат залежить від існування розмитих метрик з заданою t-нормою на відрізку.

Загальна проблема продовження розмитих метрик допускає різноманітні варіації.

Питання 13. *Чи існує конструкція продовження розмитих метрик, що зберігає операцію $*$ на множині всіх розмитих метрик (див лему 3)?*

Можна розглядати також задачу продовження розмитих метрик у сенсі [8]. Зауважмо, що у цьому випадку топологія, індукована розмитою метрикою, є лише T_0-топологією.

[1] *T. Banakh, C. Bessaga.* On linear operators extending [pseudo]metrics. // Bull. Polish Acad. Sci. Math. – 2000. – **48** , no.1. – P. 35–49.

[2] *C. Bessaga.* On linear operators and functors extending pseudometrics // Fund. Math. – 1993. – **142**, no.2. – P. 101–122.

[3] *R.H. Bing.* Extending a metric. // Duke Math. J. – 1947. – **14**. – P. 511–519.

[4] *T.A. Chapman.* Lectures on Hilbert cube manifolds // CBMS Regional Conf. Series. – 1975. – **28**. (Amer. Math. Soc, Providence, RI).

[5] *A. George, P.V. Veeramani.* On some results in fuzzy metric spaces // Fuzzy Sets and Systems. – 1994. – **64**. – P. 395–399.

[6] *M. Grabiec,* Fixed points in fuzzy metric spaces // Fuzzy Sets and Systems. – 1989. – **27**. – P. 385–389.

[7] *F. Hausdorff.* Erweiterung einer Homöomorphie // Fund. Math. – 1930. – **16**. – P. 353–360.

[8] *O. Kramosil, J. Michalek.* Fuzzy metric and statistical metric spaces // Kyberneti...

[9] *J. van Mill.* Infinite-Dimensional Topology: Prerequisites and Introduction. – North-Holland Mathematical Library Series, # 43. – Elsevier Science, 1988. – 416 p.

[10] E.V. Moiseev, Spaces of closed hyperspaces of growth and inclusion. (in Russian) // Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. – 1988. – **3**. – P. 54–57. translation in Moscow Univ. Math. Bull. – 1988. – **43**, no.3. – P. 48–51.

[11] *J. Rodríguez-López, S. Romaguera.* The Hausdorff fuzzy metric on compact sets // Fuzzy Sets and Systems. – **147**, Issue 2. – P. 273–283.

[12] *B. Schweizer, A. Sklar.* Probabilistic Metric Spaces // Elsevier Science Publishing Company. – 1983.

[13] *A. Teleiko, M. Zarichnyi* Categorical topology of compact Hausdorff spaces // Mathematical Studies: Monograph Series. – Vol.5. - 200 pp.

[14] *H. Toruńczyk.* A short proof of Hausdorff's theorem on extending metrics // Fund. Math. – 1972. – **77**, no.2. – P. 191–193.

[15] *P. Veeramani*, Best approximation in fuzzy metric spaces // J. Fuzzy Math. – 2001. – **9**. – P. 75–80.

[16] *M. Zarichnyi*, Regular linear operators extending metrics: a short proof // Bull. Polish Acad. Sci. Math. – 1996. – **44**, no.3. – P. 267-269.

HYPERSPACE FUNCTOR AND EXTENSION OF FUZZY METRICS

Oleksandr SAVCHENKO

Herson state agrarian university

The fuzzy metric spaces are tightly connected with the probabilistic metric spaces; in the latter, the distance function takes its values in the set of distribution functions, not in the reals. The problem of extension of fuzzy metrics is solved in the case of connected set from which the fuzzy metric is extended. Here we use the fuzzy metrization of the hyperspace functor.