ЗАПРОВАДЖЕННЯ ГІБРИДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ БЕССЕЛЯ-ЕЙЛЕРА-ФУР'Є НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ

©*2009 р.* *Ольга НІКІТІНА*

Національний технічний університет "ХПІ"
вул. Головна, 203а, Чернівці, 58018

Редакція отримала статтю 25 червня 2009 р.

Методом дельта-подібної послідовності (ядро Діріхле) запроваджено інтегральне перетворення, породжене на полярній осі з двома точками спряження гібридним диференціальним оператором Бесселя-Ейлера-Фур'є.

Аналіз та мета статті. Вивчення фізико-технічних характеристик композитних матеріалів, які знаходяться в різних умовах експлуатації, математично приводить до задачі інтегрування сепаратної системи диференціальних рівнянь другого порядку на кусково-однорідному інтервалі. Одним із ефективних методів одержання інтегрального зображення розв'язку таких задач є метод гібридних інтегральних перетворень (ГІП), започаткований в роботі [1]. Основи теорії ГІП закладено в роботі [2]. Дана стаття присвячена запровадженню одного із типів ГІП.

Основна частина. Введемо методом дельта-подібної послідовності інтегральне перетворення, породжене на множині

$$I_2^+ = \{r : r \in (0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty)\}$$

гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)} = \theta(r)\theta(R_1-r)a_1^2 B_{\nu,\alpha_1} + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)a_2^2 B^*_{\alpha_2} + \theta(r-R_2)a_3^2 d^2/dr^2 < \quad (1)$$

$\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда [3].

УДК 517.91:532.2

У рівності (1) беруть участь диференціальні оператори Бесселя B_{ν,α_1} [4], Ейлера $B^*_{\alpha_2}$ [5] та Фур'є d^2/dr^2 [5]:

$$B_{\nu,\alpha_1} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\alpha_1+1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\nu^2-\alpha_1^2}{r^2}, B^*_{\alpha_2} = r^2\frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_2+1)r\frac{d}{dr} + \alpha_2^2.$$

Означення. За область визначення ГДО $\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}$ приймемо множину G вектор-функцій $g(r) = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$ з такими властивостями: 1) вектор-функція $f(r) = \{B_{\nu,\alpha_1}[g_1(r)]; B^*_{\alpha_2}[g_2(r)]; g_3^{''}(r)\}$ неперервна на множині I_2^+; 2) функції $g_j(r)$ задовольняють умови обмеження

$$\lim_{r\to 0}[r^{\gamma_1}g_1(r)] = 0, \lim_{r\to\infty}[r^{\gamma_2}g_3(r)] = 0; \tag{2}$$

3) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$\left[\left(\alpha^k_{j1}\frac{d}{dr} + \beta^k_{j1}\right)g_k(r) - \left(\alpha^k_{j2}\frac{d}{dr} + \beta^k_{j2}\right)g_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k} = 0, j,k = 1,2. \tag{3}$$

Припускаємо, що виконані умови на коефіцієнти: $a_j > 0$, $\alpha^k_{jm} \geq 0$, $\beta^k_{jm} \geq 0$, $c_{1k}\cdot c_{2k} > 0$, $c_{jk} = \alpha^k_{2j}\beta^k_{1j} - \alpha^k_{1j}\beta^k_{2j}$, $\nu \geq \alpha_1$, $2\alpha_k + 1 > 0$; $j,m,k = 1,2$; $i = \overline{1,3}$.

Визначимо числа

$$\sigma_1 = \frac{c_{11}c_{12}R_1^{2(\alpha_2-\alpha_1)}}{c_{21}c_{22}R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{a_1^2}, \sigma_2 = \frac{c_{12}}{c_{22}}\frac{a_2^{-2}}{R_2^{2\alpha_2+1}}, \sigma_3 = \frac{1}{a_3^2},$$

вагову функцію

$$\sigma(r) = \theta(r)\theta(R_1-r)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1} + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1} + \theta(r-R_2)\sigma_3$$

і скалярний добуток

$$(u(r),v(r)) = \int_0^\infty u(r)v(r)\sigma(r)\,dr \equiv \int_0^{R_1} u_1(r)v_1(r)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr +$$

$$+\int_{R_1}^{R_2} u_2(r)v_2(r)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}\,dr + \int_{R_2}^\infty u_3(r)v_3(r)\sigma_3\,dr, u\in G, v\in G. \tag{4}$$

Для $u \in G$ та $v \in G$ із умов спряження (3) випливає базова тотожність

$$[u_k(r)v_k'(r) - v_k(r)u_k'(r)]\Big|_{r=R_k} = \frac{c_{2k}}{c_{1k}}[u_{k+1}(r)v_{k+1}'(r) - u_{k+1}'(r)v_{k+1}(r)]\Big|_{r=R_k}. \tag{5}$$

На основі базової тотожності (5), властивостей функцій $u \in G$ та $v \in G$ і структури σ_1, σ_2, σ_3 встановлюємо рівність

$$(\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}[u], v) = (u, \mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}[v]). \tag{6}$$

Рівність (6) означає, що ГДО $\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}$ самоспряжений. Отже, його спектр дійсний [6]. Оскільки ГДО $\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}$ має на множині I_2^+ одну особливу точку $r = \infty$, то його спектр неперервний. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta \in (0, \infty)$ і йому відповідає спектральна векторфункція

$$V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta) = \sum_{j=1}^{2} \theta(r - R_{j-1})\theta(R_j - r)V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta) + \theta(r - R_2)V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta). \tag{7}$$

Функції $V_{\nu,\alpha;j}(r,\beta)$ знайдемо як обмежений на множині I_2^+ розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь Бесселя, Ейлера та Фур'є

$$(B_{\nu,\alpha_1} + b_1^2)V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta) = 0, \quad r \in (R_0, R_1), R_0 = 0,$$

$$(B^*_{\alpha_2} + b_2^2)V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta) = 0, \quad r \in (R_1, R_2),$$

$$(d^2/dr^2 + b_3^2)V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta) = 0, \quad r \in (R_2, \infty) \tag{8}$$

за умовами спряження (3); $b_j^2 = (\beta^2 + k_j^2)$, $k_j^2 \geq 0$, $j = \overline{1,3}$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $(B_{\nu,\alpha_1} + b_1^2)v = 0$ утворюють функції $v_1 = J_{\nu,\alpha_1}(b_1 r)$ та $v_2 = N_{\nu,\alpha_1}(b_1 r)$ [4]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B^*_{\alpha_2} + b_2^2)v = 0$ утворюють функції $v_1 = r^{-\alpha_2}\cos(b_2 \ln r)$ та $v_2 = r^{-\alpha_2}\sin(b_2 \ln r)$; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(d^2/dr^2 + b_3^2)v = 0$ утворюють функції $v_1 = \cos b_3 r$ та $v_2 = \sin b_3 r$ [5].

Якщо покласти

$$V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta) = A_1 J_{\nu,\alpha_1}(b_1 r),$$

$$V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta) = A_2 r^{-\alpha_2}\cos(b_2 \ln r) + B_2 r^{-\alpha_2}\sin(b_2 \ln r),$$

$$V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta) = A_3 \cos b_3 r + B_3 \sin b_3 r, \tag{9}$$

то умови спряження (3) дають алгебраїчну систему

$$u^{11}_{\nu,\alpha_1;j1}(b_1 R_1)A_1 - Y^{11}_{\alpha_2;j2}(b_2, R_1)A_2 - Y^{12}_{\alpha_2;j2}(b_2, R_1)B_2 = 0, j = 1, 2,$$

$$Y^{21}_{\alpha_2;j1}(b_2,R_2)A_2+Y^{22}_{\alpha_2;j1}(b_2,R_2)B_2-v^{21}_{j2}(b_3R_2)A_3-v^{22}_{j2}(b_3R_2)B_3=0. \quad (10)$$

У системі (10) беруть участь функції:

$$u^{11}_{\nu,\alpha_1;j1}(b_1R_1)=\Big(\alpha^1_{j1}\frac{\nu-\alpha_1}{R_1}+\beta^1_{j1}\Big)J_{\nu,\alpha_1}(b_1R_1)-\alpha^1_{j1}b_1^2R_1J_{\nu+1,\alpha_1+1}(b_1R_1),$$

$$Y^{m1}_{\alpha_2;jk}(b_2,R_m)=[(\beta^m_{jk}-\alpha_2R_m^{-1}\alpha^m_{jk})\cos(b_2\ln R_m)-\alpha^m_{jk}b_2R_m^{-1}\sin(b_2\ln R_m)]R_m^{-\alpha_2},$$

$$Y^{m2}_{\alpha_2;jk}(b_2,R_m)=[(\beta^m_{jk}-\alpha_2R_m^{-1}\alpha^m_{jk})\sin(b_2\ln R_m)+\alpha^m_{jk}b_2R_m^{-1}\cos(b_2\ln R_m)]R_m^{-\alpha_2},$$

$$v^{21}_{j2}(b_3R_2)=-b_3\alpha^2_{j2}\sin b_3R_2+\beta^2_{j2}\cos b_3R_2;\, v^{22}_{j2}(b_3R_2)=b_3\alpha^2_{j2}\cos b_3R_2+\beta^2_{j2}\sin b_3R_2.$$

При довільному $A_1\neq 0$ розглянемо алгебраїчну систему стосовно A_2, B_2:

$$Y^{11}_{\alpha_2;j2}(b_2,R_1)A_2+Y^{12}_{\alpha_2;j2}(b_2,R_1)B_2=A_1u^{11}_{\nu,\alpha_1;j1}(b_1R_1),\, j=1,2. \quad (11)$$

Визначник алгебраїчної системи (11)

$$q_{\alpha_2}(\beta)\equiv Y^{11}_{\alpha_2;12}(b_2,R_1)Y^{12}_{\alpha_2;22}(b_2,R_1)-Y^{11}_{\alpha_2;22}(b_2,R_1)Y^{12}_{\alpha_2;12}(b_2,R_1)=c_{21}b_2R_1^{-(2\alpha_2+1)}\neq 0.$$

Алгебраїчна система (11) має єдиний розв'язок [7]:

$$A_2=A_1q^{-1}_{\alpha_2}[u^{11}_{\nu,\alpha_1;11}(b_1R_1)Y^{12}_{\alpha_2;22}(b_2,R_1)-u^{11}_{\nu,\alpha_1;21}(b_1R_1)Y^{12}_{\alpha_2;12}(b_2,R_1)],$$

$$B_2=-A_1q^{-1}_{\alpha_2}[u^{11}_{\nu,\alpha_1;11}(b_1R_1)Y^{11}_{\alpha_2;22}(b_2,R_1)-u^{11}_{\nu,\alpha_1;21}(b_1R_1)Y^{11}_{\alpha_2;12}(b_2,R_1)]. \quad (12)$$

При довільному $A_1\neq 0$ розглянемо алгебраїчну систему стосовно A_3, B_3:

$$v^{21}_{j2}(b_3R_2)A_3+v^{22}_{j2}(b_3R_2)B_3=-A_1q^{-1}_{\alpha_2}a_{\nu,(\alpha);j}(\beta),\, j=1,2. \quad (13)$$

У системі (13) беруть участь функції:

$$\delta_{\alpha_2;jk}(\beta)=Y^{11}_{\alpha_2;j2}(b_2,R_1)Y^{22}_{\alpha_2;k1}(b_2,R_2)-Y^{12}_{\alpha_2;j2}(b_2,R_1)Y^{21}_{\alpha_2;k1}(b_2,R_2),\, j,k=1,2,$$

$$a_{\nu,(\alpha);j}(\beta)=u^{11}_{\nu,\alpha_1;11}(b_1R_1)\delta_{\alpha_2;2j}(\beta)-u^{11}_{\nu,\alpha_1;21}(b_1R_1)\delta_{\alpha_2;1j}(\beta),\, j=1,2.$$

Визначник алгебраїчної системи (13)

$$q_2(\beta)\equiv v^{21}_{12}(b_3R_2)v^{22}_{22}(b_3R_2)-v^{21}_{22}(b_3R_2)v^{22}_{12}(b_3R_2)=c_{22}b_3\neq 0.$$

Алгебраїчна система (13) має єдиний розв'язок [7]:

$$A_3=\omega_{\nu,(\alpha);2}(\beta),\, B_3=-\omega_{\nu,(\alpha);1}(\beta),\, A_1=q_{\alpha_2}(\beta)q_2(\beta),$$

$$\omega_{\nu,(\alpha);j}(\beta) = a_{\nu,(\alpha);1}(\beta) v_{22}^{2j}(b_3 R_2) - a_{\nu,(\alpha);2}(\beta) v_{12}^{2j}(b_3 R_2), j = 1, 2. \qquad (14)$$

Підставивши визначені величини A_j $(j = \overline{1,3})$ та B_k $(k = 2, 3)$ згідно формул (12) та (14) у рівності (9), маємо шукані функції $V_{\nu,(\alpha);j}(r, \beta)$:

$$V_{\nu,(\alpha);1}(r, \beta) = q_{\alpha_2}(\beta) q_2(\beta) J_{\nu,\alpha_1}(b_1 r), r \in (0, R_1),$$

$$V_{\nu,(\alpha);2}(r, \beta) = q_2(\beta)[u_{\nu,\alpha_1;11}^{11}(b_1 R_1)\Psi_{\alpha_2;22}^{1}(b_2, r) - u_{\nu,\alpha_1;21}^{11}(b_1 R_1)\Psi_{\alpha_2;12}^{1}(b_2, r)],$$

$$V_{\nu,(\alpha);3}(r, \beta) = \omega_{\nu,(\alpha);2}(\beta) \cos b_3 r - \omega_{\nu,(\alpha);1}(\beta) \sin b_3 r, \qquad (15)$$

$$\Psi_{\alpha_2;j2}^{1}(b_2, r) = Y_{\alpha_2;j2}^{12}(b_2, R_1) r^{-\alpha_2} \cos(b_2 \ln r) - Y_{\alpha_2;j2}^{11}(b_2, R_1) r^{-\alpha_2} \sin(b_2 \ln r), j = 1, 2.$$

Наявність спектральної функції $V_{\nu,(\alpha)}(r, \beta)$, вагової функції $\sigma(r)$ та спектральної щільності

$$\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta) = \beta [b_3(\beta)]^{-1} ([\omega_{\nu,(\alpha);1}(\beta)]^2 + [\omega_{\nu,(\alpha);2}(\beta)]^2)^{-1}$$

дає можливість визначити пряме $H_{\nu,(\alpha)}$ та обернене $H_{\nu,(\alpha)}^{-1}$ гібридне інтегральне перетворення (ГІП), породжене на множині I_2^+ ГДО $\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}$ [8]:

$$H_{\nu,(\alpha)}[g(r)] = \int_0^\infty g(r) V_{\nu,(\alpha)}(r, \beta) \sigma(r) dr \equiv \tilde{g}(\beta), \qquad (16)$$

$$H_{\nu,(\alpha)}^{-1}[\tilde{g}(\beta)] = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tilde{g}(\beta) V_{\nu,(\alpha)}(r, \beta) \Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta) d\beta \equiv g(r), \qquad (17)$$

де функція $g(r) \in G$.

Математичним обгрунтуванням правил (16), (17) є твердження.

Теорема 1 (про інтегральне зображення). *Якщо вектор-функція* $f(r) = [\theta(r)\theta(R_1 - r) r^{\alpha_1 + \frac{1}{2}} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r) r^{\alpha_2 - \frac{1}{2}} + \theta(r - R_2) \cdot 1] g(r)$ *неперервна, абсолютно сумовна й має обмежену варіацію на множині* $(0, \infty)$*, то для будь-якого* $r \in I_2^+$ *справджується інтегральне зображення*

$$g(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty V_{\nu,(\alpha)}(r, \beta) \Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta) \int_0^\infty g(\rho) V_{\nu,(\alpha)}(\rho, \beta) \sigma(\rho) d\rho d\beta. \qquad (18)$$

Доведення. Функції $V_{\nu,(\alpha);1}(r, \lambda)$ та $V_{\nu,(\alpha);1}(r, \beta)$, де $\lambda \neq \beta \in (0, \infty)$, задовольняють відповідно диференціальні рівняння Бесселя:

$$[a_1^2 B_{\nu,\alpha_1} + (\lambda^2 + k_1^2)] V_{\nu,(\alpha);1}(r, \lambda) = 0,$$

$$[a_1^2 B_{\nu,\alpha_1} + (\beta^2 + k_1^2)] V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta) = 0.$$

Помножимо перше з цих рівнянь на $r^{2\alpha_1+1} V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)$, а друге – на $r^{2\alpha_1+1} V_{\nu,(\alpha);1}(r,\lambda)$ й віднімемо від першого друге:

$$V_{\nu,(\alpha;1)}(r,\lambda) V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta) r^{2\alpha_1+1} =$$

$$= \frac{a_1^2}{\beta^2 - \lambda^2} \frac{d}{dr} \Big[r^{2\alpha_1+1} \Big(V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta) \frac{dV_{\nu,(\alpha);1}(r,\lambda)}{dr} - V_{\nu,(\alpha);1}(r,\lambda) \frac{dV_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)}{dr} \Big) \Big]. \qquad (19)$$

Функції $V_{\nu,(\alpha);2}(r,\lambda)$ та $V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)$, де $\lambda \neq \beta \in (0,\infty)$, задовольняють відповідно диференціальні рівняння Ейлера:

$$[a_2^2 B^*_{\alpha_2} + (\lambda^2 + k_2^2)] V_{\nu,(\alpha);2}(r,\lambda) = 0,$$

$$[a_2^2 B^*_{\alpha_2} + (\beta^2 + k_2^2)] V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta) = 0.$$

Помножимо перше з цих рівнянь на функцію $r^{2\alpha_2-1} V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)$, а друге – на $r^{2\alpha_2-1} V_{\nu,(\alpha);2)}(r,\lambda)$ й віднімемо від першого друге:

$$r^{2\alpha_2-1} V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta) V_{\nu,(\alpha);2}(r,\lambda) = \frac{a_2^2}{\beta^2 - \lambda^2} \frac{d}{dr} \Big[r^{2\alpha_2+1} \Big(V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta) \times$$

$$\times \frac{dV_{\nu,(\alpha);2}(r,\lambda)}{dr} - V_{\nu,(\alpha);2}(r,\lambda) \frac{dV_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)}{dr} \Big) \Big]. \qquad (20)$$

Функції $V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)$ та $V_{\nu,(\alpha);3}(r,\lambda)$, де $\lambda \neq \beta \in (0,\infty)$, задовольняють диференціальні рівняння Фур'є:

$$[a_3^2 d^2/dr^2 + (\lambda^2 + k_3^2)] V_{\nu,(\alpha);3}(r,\lambda) = 0, \qquad (22)$$

$$[a_3^2 d^2/dr^2 + (\beta^2 + k_3^2)] V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta) = 0.$$

Помножимо перше з цих рівнянь на $V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)$, а друге – на $V_{\nu,(\alpha);3}(r,\lambda)$ й віднімемо від першого друге:

$$V_{\nu,(\alpha);3}(r,\lambda) V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta) = \frac{a_3^2}{\beta^2 - \lambda^2} \frac{d}{dr} \Big[V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta) \times$$

$$\times \frac{dV_{\nu,(\alpha);3}(r,\lambda)}{dr} - V_{\nu,(\alpha);3}(r,\lambda) \frac{dV_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)}{dr} \Big]. \qquad (21)$$

Помножимо рівність (19) на $\sigma_1 dr$ й проінтегруємо по r від $r = 0$ до $r = R_1$; помножимо рівність (20) на $\sigma_2 dr$ й проінтегруємо по r від $r = R_1$ до $r = R_2$; помножимо рівність (21) на $\sigma_3 dr$ й проінтегруємо по r від $r =$

R_2 до $r = A$, де A як завгодно велике число. Якщо одержані результати додати, то в силу базової тотожності (5) при $k = 1, 2$ й структури σ_1, σ_2, σ_3 будемо мати рівність:

$$\int\limits_0^A V_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr = \frac{1}{\beta^2-\lambda^2}\Big[V_{\nu,(\alpha);3}(A,\beta)V'_{\nu,(\alpha);3}(A,\lambda)-$$

$$-V_{\nu,(\alpha);3}(A,\lambda)V'_{\nu,(\alpha);3}(A,\beta)\Big]. \tag{22}$$

Для довільних додатних c та d ($c < d$) й довільної скінченної функції $\Psi(\lambda)$ неперервної, абсолютно сумовної з обмеженою варіацією, визначеної на $[c, d]$, знайдемо величину подвійного невласного інтегралу

$$I = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_c^d \Psi(\lambda)V_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\lambda)d\lambda V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\frac{2}{\pi}\int\limits_0^A\int\limits_c^d \Psi(\lambda)V_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\lambda)d\lambda V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\frac{2}{\pi}\int\limits_c^d\int\limits_0^A \Psi(\lambda)V_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr\Omega_{\nu,(\alpha)}(\lambda)d\lambda. \tag{23}$$

Внаслідок рівності (22) подвійний інтеграл (23) набуває вигляду:

$$I = \lim_{A\to\infty}\frac{2}{\pi}\int\limits_c^d \Psi(\lambda)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\lambda)\frac{1}{\beta^2-\lambda^2}\Big[V_{\nu,(\alpha);3}(A,\beta)V'_{\nu,(\alpha);3}(A,\lambda)-$$

$$-V_{\nu,(\alpha);3}(A,\lambda)V'_{\nu,(\alpha);3}(A,\beta)\Big]. \tag{24}$$

Введемо до розгляду функції:

$$G_{\nu,(\alpha);1}(\lambda,\beta) = \omega_{\nu,(\alpha);2}(\lambda)\omega_{\nu,(\alpha);2}(\beta) - \omega_{\nu,(\alpha);1}(\lambda)\omega_{\nu,(\alpha);1}(\beta),$$

$$G_{\nu,(\alpha);2}(\lambda,\beta) = \omega_{\nu,(\alpha);1}(\lambda)\omega_{\nu,(\alpha);1}(\beta) + \omega_{\nu,(\alpha);2}(\lambda)\omega_{\nu,(\alpha);2}(\beta),$$

$$G_{\nu,(\alpha);3}(\lambda,\beta) = \omega_{\nu,(\alpha);1}(\lambda)\omega_{\nu,(\alpha);2}(\beta) + \omega_{\nu,(\alpha);1}(\beta)\omega_{\nu,(\alpha);2}(\lambda),$$

$$G_{\nu,(\alpha);4}(\lambda,\beta) = \omega_{\nu,(\alpha);1}(\lambda)\omega_{\nu,(\alpha);2}(\beta) - \omega_{\nu,(\alpha);1}(\beta)\omega_{\nu,(\alpha);2}(\lambda),$$

$$z^{\pm}(\lambda,\beta)=q_3(\lambda)\pm q_3(\beta).$$

Безпосередньо знаходимо, що

$$2[V_{\nu,(\alpha);3}(A,\beta)V'_{\nu,(\alpha);3}(A,\lambda)-V_{\nu,(\alpha);3}(A,\lambda)V'_{\nu,(\alpha);3}(A,\beta)]=$$

$$=z^-(\lambda,\beta)G_{\nu,(\alpha);1}(\lambda,\beta)\sin[Az^+(\lambda,\beta)]+z^+(\lambda,\beta)G_{\nu,(\alpha);2}(\lambda,\beta)\sin[Az^-(\lambda,\beta)]+$$

$$+z^-(\lambda,\beta)G_{\nu,(\alpha);3}(\lambda,\beta)\cos[Az^+(\lambda,\beta)]+z^+(\lambda,\beta)G_{\nu,(\alpha);4}(\lambda,\beta)\cos[Az^-(\lambda,\beta)]. \quad (25)$$

Невласний інтеграл (24) з врахуванням рівності (25) перепишемо в такому вигляду:

$$I=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{1}{a_3^2}\int\limits_c^d\Psi(\lambda)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\lambda)\Big\{\frac{G_{\nu,(\alpha);1}(\lambda,\beta)}{b_3(\lambda)+b_3(\beta)}\sin[Az^+(\lambda,\beta)]+$$

$$+G_{\nu,(\alpha);2}(\lambda,\beta)\frac{\sin A[b_3(\lambda)-b_3(\beta)]}{b_3(\lambda)-b_3(\beta)}+\frac{G_{\nu,(\alpha);3}(\lambda,\beta)}{b_3(\lambda)+b_3(\beta)}\cos[Az^+(\lambda,\beta)]+$$

$$+\frac{G_{\nu,(\alpha);4}(\lambda,\beta)}{b_3(\lambda)-b_3(\beta)}\cos[A(b_3(\lambda)-b_3(\beta))]\Big\}d\lambda\equiv I_1+I_2+I_3+I_4=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\Big\{\frac{1}{\pi a_3^2}\int\limits_c^d\Psi(\lambda)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\lambda)\frac{G_{\nu,(\alpha);1}(\lambda,\beta)}{b_3(\lambda)+b_3(\beta)}\sin[A(b_3(\lambda)+b_3(\beta))]d\lambda+$$

$$+\frac{1}{a_3^2}\int\limits_c^d\Psi(\lambda)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\lambda)G_{\nu,(\alpha);2}(\lambda,\beta)\frac{1}{\pi}\frac{\sin A[b_3(\lambda)-b_3(\beta)]}{b_3(\lambda)-b_3(\beta)}d\lambda+$$

$$+\frac{1}{\pi a_3^2}\int\limits_c^d\Psi(\lambda)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\lambda)\frac{G_{\nu,(\alpha);3}(\lambda,\beta)}{b_3(\lambda)+b_3(\beta)}\cos[A(b_3(\lambda)+b_3(\beta))]d\lambda+$$

$$+\frac{1}{\pi a_3^2}\int\limits_c^d\Psi(\lambda)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\lambda)\frac{G_{\nu,(\alpha);4}(\lambda,\beta)}{b_3(\lambda)-b_3(\beta)}\cos[A(b_3(\lambda)-b_3(\beta))]d\lambda\Big\}. \quad (26)$$

В силу леми Рімана [9]

$$\lim_{A\to\infty}I_m=0, m=1,3,4. \quad (27)$$

В силу леми Діріхле [9]

$$\lim_{A\to\infty}I_2=\begin{cases}\Psi(\beta), & \text{якщо } \lambda=\beta\in[c,d],\\ 0, & \text{якщо } \lambda=\beta\overline{\in}[c,d].\end{cases} \quad (28)$$

Отже, внаслідок рівностей (27), (28) одержуємо, що подвійний невласний інтеграл

$$I \equiv \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \int\limits_c^d \Psi(\lambda) V_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\lambda)d\lambda V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr = \Psi(\beta), \qquad (29)$$

якщо $\beta = \lambda \in [c,d]$. Якщо ж $\lambda = \beta \overline{\in} [c,d]$, то $I = 0$.

Якщо функція $\Psi(\lambda)$ володіє вказаними вище властивостями на множині $(0,\infty)$, то подвійний невласний інтеграл

$$I = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \Psi(\lambda) V_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\lambda)d\lambda V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr = \Psi(\beta), \qquad (30)$$

якщо $\lambda = \beta \in (0,\infty)$. Якщо ж $\lambda = \beta \overline{\in} (0,\infty)$, то $I = 0$.

Припустимо, що функція

$$g(r) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \Psi(\beta) V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta. \qquad (31)$$

Помножимо рівність (31) на вираз $\sigma(r)V_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)dr$, де λ – довільне додатне число, й проінтегруємо по r від $r = 0$ до $r = \infty$. В силу рівності (30) маємо функцію

$$\Psi(\lambda) = \int\limits_0^\infty g(r) V_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)\sigma(r)dr.$$

Підставивши функцію

$$\Psi(\beta) = \int\limits_0^\infty g(\rho) V_{\nu,(\alpha)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho$$

в рівність (31), приходимо до інтегрального зображення (18). Доведення теореми завершено.

Зауваження. Якщо вектор-функція $g(r)$ кусково-неперервна, то зліва в (18) зліва замість $g(r)$ треба писати

$$\frac{1}{2}[g(r-0) + g(r+0)].$$

Побудова алгебри ГДО $\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}$ здійснюється на основі основної тотожності ГІП ГДО $\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}$, визначеного рівністю (1).

Визначимо величини та функції:

$$h_1 = a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}c_{11}^{-1}, h_2 = a_2^2\sigma_2 c_{12}^{-1}, Z_{\nu,(\alpha);i2}^{(\mu),k}(\beta) =$$

$$= (\alpha_{i2}^k d/dr + \beta_{i2}^k)V_{\nu,(\alpha);k+1}(r,\beta)\Big|_{r=R_k},$$

$$\tilde{g}_1(\beta) = \int\limits_0^{R_1} g_1(r)V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr, i,k = 1,2;$$

$$\tilde{g}_2(\beta) = \int\limits_{R_1}^{R_2} g_2(r)V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}dr, \tilde{g}_3(\beta) = \int\limits_{R_2}^{\infty} g_3(r)V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3 dr.$$

Теорема 2 (про основну тотожність). *Якщо вектор-функція*

$$f = \{B_{\nu,\alpha_1}[g_1(r)]; B_{\alpha_2}^*[g_2(r)]; g_3''(r)\}$$

неперервна на множині I_2^+, а функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k\right) g_k(r) - \left(\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k\right) g_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k} = \omega_{jk}, j,k = 1,2, \qquad (32)$$

та умови обмеження

$$\lim_{r\to 0}\Big(r^{2\alpha_1+1}[g_1'(r)V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta) - g_1(r)V_{\nu,(\alpha);1}'(r,\beta)]\Big) = 0, \qquad (33)$$

$$\lim_{r\to\infty}[g_3'(r)V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta) - g_3(r)V_{\nu,(\alpha);3}'(r,\beta)] = 0, \qquad (34)$$

то справджується основна тотожність ГІП ГДО $\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}$:

$$H_{\nu,(\alpha)}[\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}[g(r)]] = -\beta^2\widetilde{g}(\beta) - \sum_{j=1}^{3} k_j^2\widetilde{g}_j +$$

$$+\sum_{k=1}^{2} h_k[Z_{\nu,(\alpha);12}^k(\beta)\omega_{2k} - Z_{\nu,(\alpha);22}^k(\beta)\omega_{1k}]. \qquad (35)$$

Доведення. Згідно з правилом (16) маємо:

$$\mathfrak{R} = H_{\nu,(\alpha)}[\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}[g(r)]] = \int\limits_0^{\infty} \mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}[g(r)]V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr =$$

$$= \int_0^{R_1} (a_1^2 B_{\nu,\alpha_1}[g_1(r)]) V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1} dr+$$

$$+\int_{R_1}^{R_2} (a_2^2 B^*_{\alpha_2}[g_2(r)]) V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1} dr + \int_{R_2}^{\infty} \left(a_3^2 \frac{d^2 g_3}{dr^2}\right) V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3 dr. \quad (36)$$

Проінтегруємо під знаком інтегралів два рази частинами:

$$\mathfrak{R} = \int_0^{R_1} g_1(r)(a_1^2 B_{\nu,\alpha_1}[V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)])\sigma_1 r^{2\alpha_1+1} dr + \int_{R_1}^{R_2} g_2(r)(a_2^2 B^*_{\alpha_2}[V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)])\sigma_2 \times$$

$$\times r^{2\alpha_2-1} dr + \int_{R_2}^{\infty} g_3(r)(a_3^2 d^2/dr^2 V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta))\sigma_3 dr + a_1^2\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}\left[\frac{dg_1}{dr}V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)-\right.$$

$$\left.-g_1(r)\frac{dV_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)}{dr}\right]\Bigg|_0^{R_1} + a_2^2\sigma_2 r^{2\alpha_2+1}\left[\frac{dg_2}{dr}V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta) - g_2(r)\frac{dV_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)}{dr}\right]\Bigg|_{R_1}^{R_2} +$$

$$+\sigma_3\left(\frac{dg_3}{dr}V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta) - -g_3(r)\frac{dV_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)}{dr}\right)\Bigg|_{R_2}^{\infty}. \quad (37)$$

На основі умови обмеження (33) позаінтегральний член в точці $r=0$ перетворюється в нуль, а згідно з умовою обмеження (34) позаінтегральний член в точці $r=\infty$ перетворюється в нуль.

Згідно з базовою тотожністю

$$[g_k'(r)V_{\nu,(\alpha);k}(r,\beta) - g_k(r)V'_{\nu,(\alpha);k}(r,\beta)]|_{r=R_k} = \frac{c_{21}}{c_{1k}}[g'_{k+1}(r)V_{\nu,(\alpha);k+1}(r,\beta)-$$

$$-g_{k+1}(r)V'_{\nu,(\alpha);k+1}(r,\beta)]|_{r=R_k} + \frac{1}{c_{1k}}[Z^k_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega_{2k} - Z^k_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\omega_{1k}] \quad (38)$$

послідовно одержуємо, що:

$$1)\ a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}(g_1'(R_1)V_{\nu,(\alpha);1}(R_1,\beta) - g_1(R_1)V'_{\nu,(\alpha);1}(R_1,\beta))-$$

$$-a_2^2\sigma_2 R_1^{2\alpha_2+1}(g_2'(R_1)V_{\nu,(\alpha);2}(R_1,\beta) - g_2(R_1)V'_{\nu,(\alpha);2}(R_1,\beta)) =$$

$$= \left(a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21}}{c_{11}} - -a_2^2\sigma_2 R_1^{2\alpha_2+1}\right)(g_2'(R_1)V_{\nu,(\alpha);2}(R_1,\beta)-$$

$$-g_2(R_1)V'_{\nu,(\alpha);2}(R_1,\beta)) + a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1} c_{11}^{-1}(Z^1_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega_{21} - Z^1_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\omega_{11}) =$$

$$= h_1(Z^1_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega_{21} - Z^1_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\omega_{11}); \quad (39)$$

2) $a_2^2\sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1}(g_2'(R_2)V_{\nu,(\alpha);2}(R_2,\beta) - g_2(R_2)V'_{\nu,(\alpha);2}(R_2,\beta)) - a_3^2\sigma_3(g_3'(R_2)\times$

$$\times V_{\nu,(\alpha);3}(R_2,\beta) - g_3(R_2)V'_{\nu,(\alpha);3}(R_2,\beta)) = \left(a_2^2\sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1}\frac{c_{22}}{c_{12}} - a_3^2\sigma_3\right)(g_3'(R_2)\times$$

$$\times V_{\nu,(\alpha);3}(R_2,\beta) - g_3(R_2)V'_{\nu,(\alpha);3}(R_2,\beta)) + a_2^2\sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1}c_{12}^{-1}(Z^2_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega_{22} -$$

$$-Z^2_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\omega_{12}) = h_2(Z^2_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega_{22} - Z^2_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\omega_{12}). \quad (40)$$

На основі диференціальних тотожностей

$$[a_1^2 B_{\nu,\alpha_1} + (\beta^2 + k_1^2)]V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta) \equiv 0, [a_2^2 B^*_{\alpha_2} + (\beta^2 + k_2^2)]V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta) \equiv 0,$$

$$[a_3^2 d^2/dr^2 + (\beta^2 + k_3^2)]V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta) \equiv 0$$

маємо рівності:

$$a_1^2 B_{\nu,\alpha_1}[V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)] = -(\beta^2 + k_1^2)V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta), a_2^2 B^*_{\alpha_2}[V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)] =$$

$$= -(\beta^2 + k_2^2)V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta), a_3^2\sigma_3[V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)] = -(\beta^2 + k_3^2)V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta). \quad (41)$$

Підставимо тепер співвідношення (39) – (41) у рівність (37). Після розділення інтегралів $[-(k_j^2 + \beta^2)\tilde{g}_j(\beta)]$ на суму $(-k_j^2\tilde{g}_j)$ та $(-\beta^2\tilde{g}_j(\beta))$ приходимо до тотожності (35).

Логічну схему застосування запровадженого формулами (16), (17) ГІП покажемо на одній із типових задач математичної фізики неоднорідних середовищ.

Задача квазістатики Побудувати обмежений в області

$$D = \{(t,r) : t \in (0,\infty), r \in I_2^+\}$$

розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь параболічного типу [10]

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \chi_1^2 u_1 - a_1^2 B_{\nu,\alpha_1}[u_1] = f_1(t,r), \quad r \in (0, R_1),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \chi_2^2 u_2 - a_2^2 B^*_{\alpha_2}[u_2] = f_2(t,r), \quad r \in (R_1, R_2),$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + \chi_3^2 u_3 - a_3^2\frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} = f_3(t,r), \quad r \in (R_2, \infty) \quad (42)$$

за початковими умовами

$$u_j(t,r)\Big|_{t=0} = g_j(r), r \in (R_{j-1}; R_j), j = \overline{1,3}; R_0 = 0, R_3 = \infty, \tag{43}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k\right) u_k(t,r) - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k\right) u_{k+1}(t,r)\right]\Bigg|_{r=R_k} = \omega_{jk}(t), j,k = 1,2. \tag{44}$$

Розв'язання. Запишемо систему (42) й початкові умови (43) в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \chi_1^2 - a_1^2 B_{\nu,\alpha_1}\right) u_1(t,r) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \chi_2^2 - a_2^2 B_{\nu,\alpha_2}\right) u_2(t,r) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \chi_3^2 - a_3^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) u_3(t,r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t,r) \\ f_2(t,r) \\ f_3(t,r) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t,r) \\ u_2(t,r) \\ u_3(t,r) \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix} g_1(r) \\ g_2(r) \\ g_3(r) \end{bmatrix}. \tag{45}$$

Інтегральний оператор $H_{\nu,(\alpha)}$ згідно з правилом (16) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$H_{\nu,(\alpha)}[\dots] = \left[\int_0^{R_1} \dots V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1 - 1} dr \int_{R_1}^{R_2} \dots V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta) \times \right.$$

$$\left. \times \sigma_2 r^{2\alpha_2 - 1} dr \int_{R_2}^{\infty} \dots V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3 dr \right]. \tag{46}$$

Припустимо, що $\max\{\chi_1^2; \chi_2^2; \chi_3^2\} = \chi_1^2$. Покладемо всюди $k_1^2 = 0$, $k_2^2 = \chi_1^2 - \chi_2^2 \geq 0$, $k_3^2 = \chi_1^2 - \chi_3^2 \geq 0$ ($b_1 = a_1^{-1}\beta$, $b_2(\beta) = a_2^{-1}(\beta^2 + \chi_1^2 - \chi_2^2)^{1/2}$, $b_3(\beta) = a_3^{-1}(\beta^2 + \chi_1^2 - \chi_3^2)^{1/2}$).

Застосуємо операторну матрицю-рядок (46) до задачі (45) за правилом множення матриць. На основі основної тотожності (35) маємо задачу Коші:

$$\left(\frac{d}{dt} + \beta^2 + \chi_1^2\right) \widetilde{u}(t,\beta) = \tilde{F}(t,\beta), \widetilde{u}(t,\beta)|_{t=0} = \widetilde{g}(\beta). \tag{47}$$

У рівностях (47) прийняті позначення:

$$\tilde{u}(t,\beta) = \sum_{j=1}^{3} \tilde{u}_j(t,\beta), \tilde{g}(\beta) = \sum_{j=1}^{3} \tilde{g}_j(\beta), \tilde{F}(t,\beta) = \sum_{j=1}^{3} \tilde{f}_j(t,\beta) +$$

$$+\sum_{k=1}^{2} h_k[Z^k_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega_{2k}(t) - Z^k_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\omega_{1k}(t)].$$

Безпосередньо перевіряється, що розв'язком задачі Коші (47) є функція

$$\tilde{u}(t,\beta) = e^{-(\beta^2+\chi_1^2)t}\tilde{g}(\beta) + \int_0^t e^{-(\beta^2+\chi_1^2)(t-\tau)}\tilde{F}(\tau,\beta)d\tau =$$

$$= \int_0^t e^{-(\beta^2+\chi_1^2)(t-\tau)}[\tilde{f}(\tau,\beta) + \delta_+(\tau)\tilde{g}(\beta)]d\tau +$$

$$+\sum_{k=1}^{2} h_k\Big[\int_0^t e^{-(\beta^2+\chi_1^2)(t-\tau)}Z^k_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega_{2k}(\tau)d\tau -$$

$$-\int_0^t e^{-(\beta^2+\chi_1^2)(t-\tau)}\omega_{1k}(\tau)d\tau Z^k_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\Big]. \tag{48}$$

Інтегральний оператор $H^{-1}_{\nu,(\alpha)}$ згідно з правилом (17), як обернений до (46), зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$H^{-1}_{\nu,(\alpha)}[\dots] = \begin{bmatrix} 2/\pi \int_0^\infty \dots V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta \\ 2/\pi \int_0^\infty \dots V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta \\ 2/\pi \int_0^\infty \dots V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta \end{bmatrix} \tag{49}$$

Застосувавши за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець (49) до матриці-елемента $[\widetilde{u}(t,\beta]$, де функція $\widetilde{u}(t,\beta)$ визначена формулою (48), одержуємо інтегральне зображення єдиного аналітичного розв'язку параболічної задачі (42) – (43):

$$u_j(t,r) = \int_0^t \int_0^{R_1} \mathcal{H}_{\nu,(\alpha);j1}(t-\tau,r,\rho)[f_1(\tau,\rho) + \delta_+(\tau)g_1(\rho)]\sigma_1\rho^{2\alpha_1+1}d\rho d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{R_1}^{R_2}\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);j2}(t-\tau,r,\rho)[f_2(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_2(\rho)]\sigma_2\rho^{2\alpha_2-1}d\rho d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{R_2}^{\infty}\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);j3}(t-\tau,r,\rho)[f_3(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_3(\rho)]\sigma_3 d\rho d\tau+\sum_{k=1}^{2}h_k\times$$

$$\times\left[\int\limits_0^t[\mathcal{R}^{k,j}_{\nu,(\alpha);12}(t-\tau,r)\omega_{2k}(\tau)-\mathcal{R}^{k,j}_{\nu,(\alpha);22}(t-\tau,r)\omega_{1k}(\tau)]d\tau\right],\ j=\overline{1,3}, \qquad (50)$$

$\delta_+(t)$ – дельта-функція, зосереджена в точці $\tau=0+$ [3].

У рівності (50) беруть участь головні розв'язки даної параболічної задачі: 1) функції впливу

$$\mathcal{H}_{\nu,(\alpha);jk}(t,r,\rho)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}e^{-(\beta^2+\chi_1^2)t}V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)V_{\nu,(\alpha);k}(\rho,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta,\ j,k=\overline{1,3}, \quad (51)$$

породжені неоднорідністю системи; 2) функції Гріна

$$\mathcal{R}^{k,j}_{\nu,(\alpha);i2}(t,r)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}e^{-(\beta^2+\chi_1^2)t}V_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)Z^k_{\nu,(\alpha);i2}(\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta,$$

$$i,k=1,2,\ j=\overline{1,3}, \qquad (52)$$

породжені неоднорідністю умов спряження.

Зауваження 1. Якщо $\max\{\chi_1^2;\chi_2^2;\chi_3^2\}=\chi_2^2$, то $k_1^2=\chi_2^2-\chi_1^2\geq 0$, $k_2^2=0$, $k_3^2=\chi_2^2-\chi_3^2\geq 0$. У цьому випадку $b_1=a_1^{-1}(\beta^2+\chi_2^2-\chi_1^2)^{1/2}$, $b_2=a_2^{-1}\beta$, $b_3=a_3^{-1}(\beta^2+\chi_2^2-\chi_3^2)^{1/2}$ і вираз $(\chi_1^2+\beta^2)$ заміниться на $(\chi_2^2+\beta^2)$.

Зауваження 2. Якщо $\max\{\chi_1^2;\chi_2^2;\chi_3^2\}=\chi_3^2$, то $k_1^2=\chi_3^2-\chi_1^2\geq 0$, $k_2^2=\chi_3^2-\chi_2^2\geq 0$, $k_3^2=0$. У цьому випадку $b_1=a_1^{-1}(\beta^2+\chi_3^2-\chi_1^2)^{1/2}$, $b_2=a_2^{-1}(\beta^2+\chi_3^2-\chi_2^2)^{1/2}$, $b_3=a_3^{-1}\beta$ і вираз $(\beta^2+\chi_1^2)$ заміниться на вираз $(\beta^2+\chi_3^2)$.

Зауваження 3. За наведеною логічною схемою розв'язання задачі квазістатики одержуються інтегральні зображення розв'язків відповідних задач статики й динаміки.

[1] *Уфлянд Я.С.* О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики // Вопросы математической физики. – Л., 1976. – С. 93 - 106.

[2] *Ленюк М.П., Шинкарик М.І.* Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. – Тернопіль: Економ. думка, 2004. – 368 с.

[3] *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. - М.: Наука, 1965. – 328 с.

[4] *Ленюк М.П.* Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя. – Киев, 1983. – 62 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.3).

[5] *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.

[6] *Березанський Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных оператором. – К.: Наук. думка, 1965. – 798 с.

[7] *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Физматгиз, 1963. – 431 с.

[8] *Ленюк М.П., Янчишин М.Л.* Гібридні інтегральні перетворення типу (Фур'є, Конторовича-Лєбєдєва)-Лежандра. – Чернівці: Прут, 2002. – 76 с.

[9] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. – М.: Наука, 1969. – Т. 3. – 656 с.

[10] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.

THE INTRODUCTION OF THE HYBRID INTEGRAL BESSEL-EULER-FOURIER TRANSMUTATION ON THE POLAR AXIS

Olga NIKITINA

National Technic University KhPI ,
203a Holovna Str., Chernivtsi 58018, Ukraine

We introduce the integral hybrid transmutation, generated by the hybrid differential Bessel-Euler-Fourier operator, on the polar axis with two conjugation points, using the method of delta-type sequence (Dirichlet kernel).