СУКУПНІ ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ, ЯКІ МОНОТОННІ ВІДНОСНО ПЕРШОЇ ЗМІННОЇ

©2009 р. Василь НЕСТЕРЕНКО

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
вул. Коцюбинського, 2, Чернівці, 58012

Редакція отримала статтю 12 жовтня 2009 р.

Встановлено ряд результатів про сукупні властивості функцій $f : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$, які монотонні відносно першої змінної і мають певні типи ослабленої неперервності відносно другої змінної.

1. Для функцій двох змінних монотонність відносно однієї змінної забезпечує певні сукупні властивості. Наприклад, добре відомий результат Юнґа про те, що нарізно неперервна функція, яка монотонна відносно однієї змінної, є сукупно неперервною. В. Михайлюк в [1] встановив, що монотонна відносно першої змінної і неперервна відносно другої змінної функція $f : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$ є функцією першого класу Бера. У [2] показано, що для функцій $f : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$, які монотонні відносно першої змінної і неперервні відносно другої змінної, існує залишкова в $\mathbb{R}$ множина A, така, що функція f неперервна за сукупністю змінних в кожній точці множини $A \times Y$.

В даній роботі встановлено ряд результатів про сукупні властивості функцій $f : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$, які монотонні відносно першої змінної і мають певні типи ослабленої неперервності відносно другої змінної.

2. Нагадаємо деякі поняття, які будуть тут вживатися. Нехай X, Y і Z – топологічні простори. Відображення $f : X \to Y$ називається *точково розривним*, якщо множина $C(f)$ точок неперервності f є всюди щільною в X. Відображення f називається *квазінеперервним в точці* $x \in X$, якщо для кожного околу U точки x і для кожного околу V точки $y = f(x)$ в Y існує відкрита непорожня множина U_1 в X, така, що $U_1 \subseteq U$ і $f(U_1) \subseteq V$. Відображення f називається *ледь неперервним в точці* $x \in X$, якщо для

УДК 517.51, MSC 2000: 54C30, 54E35

кожного околу V точки $y = f(x)$ в Y існує відкрита непорожня множина U_1 в X, така, що $f(U_1) \subseteq V$. Позначимо через $\omega_f(A)$ коливання функції f на множині A. Функція $f : X \to Y$, де Y – метричний простір, називається *кліковою в точці* x, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ і довільного околу U точки x в X існує відкрита непорожня множина U_1 в X, така, що $U_1 \subseteq U$ і $\omega_f(U_1) < \varepsilon$. Відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *горизонтально /вертикально/ квазінеперервним у точці* $p = (x, y) \in X \times Y$, якщо для довільного околу W точки $z = f(x, y)$ у просторі Z і довільних околів U і V точок x і y у просторах X і Y відповідно існують точка $b \in V$ $/a \in U/$ і відкрита непорожня множина U_1 в X $/V_1$ в $Y/$, такі, що $U_1 \subseteq U$ $/V_1 \subseteq V/$ і $f(U_1 \times \{b\}) \subseteq W$ $/f(\{a\} \times V_1) \subseteq W/$. Відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *симетрично квазінеперервним відносно* x *в точці* $p = (x, y) \in X \times Y$, якщо для довільного околу W точки $z = f(x, y)$ у просторі Z і довільних околів U і V точок x і y у просторах X і Y відповідно існують окіл U_1 точки x і відкрита непорожня множина V_1 в Y, такі, що $U_1 \times V_1 \subseteq U \times V$ і $f(U_1 \times V_1) \subseteq W$. Відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *симетрично ледь неперервним відносно* x *в точці* $p = (x, y) \in X \times Y$, якщо для довільного околу W точки $z = f(x, y)$ у просторі Z існують окіл U_1 точки x і відкрита непорожня множина V_1 в Y, такі, $f(U_1 \times V_1) \subseteq W$. Функція $f : X \times Y \to Z$, де Z – метричний простір, називається *симетрично кліковою відносно* x *в точці* $p = (x, y) \in X \times Y$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ і довільних околів U і V точок x і y у просторах X і Y відповідно існують окіл U_1 точки x і відкрита непорожня множина V_1 в Y, такі, що $U_1 \times V_1 \subseteq U \times V$ і $\omega_f(U_1 \times V_1) < \varepsilon$. Відображення називається *квазінеперервним, ледь неперервним, кліковим, симетрично квазінеперервним, симетрично ледь неперервним, симетрично кліковим, горизонтально квазінеперервним чи вертикально квазінеперервним*, якщо воно є таким у кожній точці.

3. Нам буде потрібна наступне твердження.

Лема. *Нехай Y – топологічний простір, функція $f : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$ монотонна відносно першої змінної, V – відкрита непорожня множина в Y, $\varepsilon > 0$ і $A = \{x \in \mathbb{R} : \omega_{f^x}(V) < \frac{\varepsilon}{8}\}$ – множина другої категорії в $\mathbb{R}$. Тоді існує відкрита непорожня множина G в $\mathbb{R}$, така, що $G \subseteq \overline{A}$ і $\omega_f(G \times V) < \varepsilon$.*

Доведення. Розглянемо довільну точку $y_0 \in V$. Оскільки множина A другої категорії, то вона десь щільна. Нехай $\overline{A} \supseteq G_0$, де G_0 – деяка відкрита непорожня множина в $\mathbb{R}$. З монотонності функції f_{y_0} випливає, що вона точково розривна. Тому існує відкрита непорожня множина $G \subseteq G_0$, така, що $\omega_{f_{y_0}}(G) < \frac{\varepsilon}{8}$. Покладемо $A_0 = G \cap A$. Зрозуміло, що $A_0 \neq \emptyset$ і $\omega_{f_{y_0}}(A_0) < \frac{\varepsilon}{8}$.

Розглянемо довільні точки $x_1, x_2 \in A_0$ і $y \in V$. Тоді

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \leq |f(x_1, y) - f(x_1, y_0)| +$$
$$+|f(x_1, y_0) - f(x_2, y_0)| + |f(x_2, y_0) - f(x_2, y)| < \tfrac{\varepsilon}{8} + \tfrac{\varepsilon}{8} + \tfrac{\varepsilon}{8} = \tfrac{3\varepsilon}{8}.$$

Нехай x' і x'' довільні точки з G, $x' < x''$ і $y \in V$. Оскільки множина A_0 щільна в G, то існують точки x_1 і x_2 в A_0, такі, що $x_1 < x'$ і $x_2 > x''$. Тоді користуючись монотонністю функції f_y, маємо, що

$$|f(x', y) - f(x'', y)| \leq |f(x_1, y) - f(x_2, y)| < \frac{3\varepsilon}{8}.$$

Розглянемо нарешті довільні точки $p_1 = (x_1, y_1), p_1 = (x_2, y_2) \in G \times V$ і візьмемо точку $x_0 \in A_0$. Тоді

$$|f(p_1) - f(p_2)| \leq |f(p_1) - f(x_0, y_1)| +$$
$$+|f(x_0, y_1) - f(x_0, y_2)| + |f(x_0, y_2) - f(p_2)| < \tfrac{3\varepsilon}{8} + \tfrac{\varepsilon}{8} + \tfrac{3\varepsilon}{8} = \tfrac{7\varepsilon}{8}.$$

Отже, $\omega_f(G \times V) < \varepsilon$.

Теорема 1. *Нехай простір Y має зліченну псевдобазу і функція $f : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$ монотонна відносно першої змінної і квазінеперервна відносно другої змінної при значеннях першої, що пробігають деяку залишкову множину в $\mathbb{R}$. Тоді існує залишкова в $\mathbb{R}$ множина A, така, що функція f симетрично квазінеперервна відносно x у кожній точці множини $A \times Y$.*

Доведення. Будемо міркувати від супротивного. Нехай не існує залишкової в $\mathbb{R}$ множини A, такої, що відображення f симетрично квазінеперервне відносно x в кожній точці добутку $A \times Y$. Тоді існує множина E_1 другої категорії в $\mathbb{R}$, така, що для кожного $x \in E_1$ відображення f не є симетрично квазінеперервним відносно першої змінної в деякій точці $p_x = (x, y_x)$. Для кожної точки $x \in E_1$ існують околи $U(x)$, $V(x)$ відповідно точок x в $\mathbb{R}$, y_x в Y і число $\varepsilon > 0$, такі, що для кожного околу U точки x в $\mathbb{R}$ і для кожної відкритої множини V в Y, для яких $U \times V \subseteq U(x) \times V(x)$, маємо, що $|f(p) - f(p_x)| \geq \varepsilon$ для деякого $p \in U \times V$. Оскільки множина E_1 другої категорії, то існує $\varepsilon > 0$, таке, що множина E_2, яка складається з точок $x \in E_1$, що обслуговуються одним ε, є множиною другої категорії.

Нехай $\{V_n : n \in \mathbf{N}\}$ – псевдобаза простору Y і M – залишкова множина в $\mathbb{R}$, для точок якої функція f^x квазінеперервна. Перетин $E = E_2 \cap M$ – це множина другої категорії в X. Для номера n розглянемо множини

$$A_n = \{x \in E : V_n \subseteq V(x),\ \omega_{f^x}(\{y_x\} \cup V_n) < \tfrac{\varepsilon}{16}\}.$$

Легко бачити, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = E$, бо відображення f^x квазінеперервне для кожного $x \in M$. Оскільки множина E другої категорії в $\mathbb{R}$, то існує номер n_0, такий, що множина A_{n_0} другої категорії $\mathbb{R}$. Скориставшись лемою, одержимо відкриту непорожню множину G в $\mathbb{R}$, таку, що $G \subseteq \overline{A_{n_0}}$ і $\omega_f(G \times V_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Розглянемо довільну точку $x_0 \in G \cap A_{n_0}$. Тоді для кожної точки $p \in G \cap V_{n_0}$ маємо, що

$$|f(p) - f(p_{x_0})| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{16} < \varepsilon.$$

А це суперечить тому, що $x_0 \in A_{n_0} \subseteq E_2$. Отже, наше припущення хибне.

Аналогічні результати одержуються для симетричної ледь неперервності та симетричної кліковості.

Теорема 2. *Нехай простір Y має зліченну псевдобазу і функція $f : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$ монотонна відносно першої змінної і ледь неперервна відносно другої змінної при значеннях першої, що пробігають деяку залишкову множину в $\mathbb{R}$. Тоді існує залишкова в $\mathbb{R}$ множина A, така, що функція f симетрично ледь неперервна відносно x в кожній точці множини $A \times Y$.*

Доведення. Будемо міркувати так само, як і при доведенні попередньої теореми. Нехай не існує залишкової в $\mathbb{R}$ множини A, такої, що відображення f симетрично ледь неперервне відносно x в кожній точці добутку $A \times Y$. Тоді існує множина E_1 другої категорії в $\mathbb{R}$, така, що для кожного $x \in E$ відображення f не є симетрично ледь неперервне відносно першої змінної в деякій точці $p_x = (x, y_x)$. Це означає, що для кожної точки $x \in E_1$ існує число $\varepsilon > 0$, таке, що для кожного відкритого околу U точки x в $\mathbb{R}$ і для кожної відкритої множини V в Y маємо, що $|f(p) - f(p_x)| \geq \varepsilon$ для деякого $p \in U \times V$. Оскільки множина E_1 другої категорії, то існує $\varepsilon > 0$, таке, що множина E_2, яка складається з точок $x \in E_1$, що обслуговуються одним ε, є множиною другої категорії.

Нехай $\{V_n : n \in \mathbf{N}\}$ – псевдо база простору Y і M – залишкова множина в $\mathbb{R}$, для точок якої функція f^x ледь неперервна. Позначимо через $E = E_2 \cap M$ множину другої категорії в X. Для номера n розглянемо множини

$$A_n = \{x \in E : \omega_{f^x}(\{y_x\} \cup V_n) < \frac{\varepsilon}{16}\}.$$

Легко бачити, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = E$, бо відображення f^x ледь неперервне для кожного $x \in M$. Оскільки множина E другої категорії в $\mathbb{R}$, то існує номер n_0, такий, що множина A_{n_0} другої категорії $\mathbb{R}$. Згідно з лемою існує відкрита непорожня множина G в $\mathbb{R}$, така, що $G \subseteq \overline{A_{n_0}}$ і $\omega_f(G \times V_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Тоді, як легко бачити, для довільної точки $x_0 \in A_{n_0} \cap G$ маємо, що $|f(p) - f(p_{x_0})| < \varepsilon$ для кожного $p \in G \times V_{n_0}$. А це суперечить тому, що $x_0 \in A_{n_0} \subseteq E_2$. Отже, наше припущення хибне.

Теорема 3. *Нехай простір Y має зліченну псевдобазу і функція $f : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$ монотонна відносно першої змінної і клікова відносно другої змінної при значеннях першої, що пробігають деяку залишкову множину в $\mathbb{R}$. Тоді існує залишкова в $\mathbb{R}$ множина A, така, що функція f симетрично клікова відносно x в кожній точці множини $A \times Y$.*

Доведення. Нехай не існує залишкової в $\mathbb{R}$ множини A, такої, що відображення f симетрично клікове відносно x в кожній точці добутку $A \times Y$. Тоді існує множина E_1 другої категорії в $\mathbb{R}$, така, що для кожного $x \in E_1$ відображення f не є симетрично кліковим відносно першої змінної в деякій точці $p_x = (x, y_x)$. Це означає, що для кожної точки $x \in E_1$ існують околи $U(x)$,$V(x)$ відповідно точок x в $\mathbb{R}$, y_x в Y і число $\varepsilon > 0$, такі, що для кожного околу U точки x в $\mathbb{R}$ і для кожної відкритої множини V в Y, для яких $U \times V \subseteq U(x) \times V(x)$, маємо, що $\omega_f(U \times V) \geq \varepsilon$. Оскільки множина E_1 другої категорії, то існує $\varepsilon > 0$, таке, що множина E_2, яка складається з точок $x \in E_1$, що обслуговуються одним ε, є множиною другої категорії.

Нехай $\{V_n : n \in \mathbf{N}\}$ – псевдо база простору Y і M – залишкова множина в $\mathbb{R}$, для точок якої функція f^x квазінеперервна. Позначимо через $E = E_2 \cap M$ множину другої категорії в X. Для номера n розглянемо множини
$$A_n = \{x \in E : V_n \subseteq V(x), \omega_{f^x}(V_m) < \frac{\varepsilon}{8}\}.$$
Легко бачити, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = E$, бо відображення f^x квазінеперервне для кожного $x \in M$. Оскільки множина E другої категорії в $\mathbb{R}$, то існує номер n_0, такий, що множина A_{n_0} другою категорії в $\mathbb{R}$. Тоді згідно з лемою існує відкрита непорожня множина G в $\mathbb{R}$, така, що $G \subseteq \overline{A_{n_0}}$ і $\omega_f(G \times V_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Оскільки $G \cap E_2 \neq \emptyset$, то одержуємо суперечність. Отже, наше припущення хибне.

Теорема 4. *Нехай простір Y має зліченну псевдобазу і функція $f : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$ монотонна відносно першої змінної і клікова відносно другої змінної при значеннях першої, що пробігають деяку залишкову множину в $\mathbb{R}$. Тоді існує залишкова в $\mathbb{R}$ множина A, така, що для кожної точки $x \in A$ існує всюди щільна в Y множина B_x, що $\bigcup\limits_{x \in A} (\{x\} \times B_x) \subseteq C(f)$.*

Доведення. Скористаємося результатом теореми 3. Тоді існує залишкова в $\mathbb{R}$ множина A, така, що функція f симетрично клікова відносно

x в кожній точці множини $A \times Y$. Покажемо, що для кожної точки $x \in A$ існує всюди щільна в Y множина B_x, що $\bigcup\limits_{x \in A} (\{x\} \times B_x) \subseteq C(f)$. Нехай це не так. Нехай існують точка $x_0 \in A$ і відкрита множина G в Y, такі, що функція f розривна в кожній точці множини $\{x_0\} \times G$. Тоді існують $\varepsilon > 0$ і множина G_1 в Y, яка щільна в деякій множині V, такі, що $\omega_f(x_0, y) \geq \varepsilon$ для кожної точки $y \in G_1$. Згідно з теоремою 3 існує точка $y_0 \in V$, така, що $\omega_f(x_0, y_0) < \varepsilon$. Тобто, існують відкриті непорожні множини U_1 в $\mathbb{R}$ і V_1 в Y, такі, що $V_1 \subseteq V$ і $\omega_f(U_1 \times V_1) < \varepsilon$. Оскільки множина $G_1 \cap V_1 \neq \emptyset$, то одержуємо суперечність.

Наслідок. *Нехай простір Y має зліченну псевдобазу і функція $f : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$ монотонна відносно першої змінної і клікова відносно другої змінної при значеннях першої, що пробігають деяку залишкову множину в $\mathbb{R}$. Тоді функція f точково розривна за сукупністю змінних.*

Доведення. Це випливає з попередньої теореми і того, що множина $\bigcup\limits_{x \in A} \{x\} \times B_x$ всюди щільна в $\mathbb{R} \times Y$.

Теорема 5. *Нехай Y – довільний топологічний простір, функція $f : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$ горизонтально та вертикально квазінеперервна і монотонна відносно першої змінної. Тоді функція f квазінеперервна за сукупністю змінних.*

Доведення. Нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times Y$ і $\varepsilon > 0$. Розглянемо довільні околи U і V точок x_0 та y_0. Візьмемо такий інтервал U_0, що $x_0 \in U_0 \subseteq U$. Оскільки функція f вертикально квазінеперервна, то існує точка $x_1 \in U_0$ в X і відкрита непорожня множина V_1 в Y, такі, що $V_1 \subseteq V$ і $|f(p_0) - f(x_1, y)| < \frac{\varepsilon}{4}$ для довільного $y \in V_1$. Розглянемо довільну точку $y_1 \in V_1$. З горизонтальної квазінеперервності функції f випливає, що існують відкрита непорожня множина U_1 в $\mathbb{R}$ і точка $y_2 \in V_1$ в Y, такі, що $x_1 \notin U_1 \subseteq U_0$ і $|f(x_1, y_1) - f(x, y_2)| < \frac{\varepsilon}{4}$ для довільного $x \in U_1$. Візьмемо довільну точку $x_2 \in U_1$. Оскільки функція f вертикально квазінеперервна, то існують точка $x_3 \in U_1$ в X і відкрита непорожня множина V_2 в Y, такі, що $V_2 \subseteq V_1$ і $|f(x_2, y_2) - f(x_3, y)| < \frac{\varepsilon}{4}$ для довільного $y \in V_2$. Тоді для довільної точки $y \in V_2$ маємо

$$|f(x_1, y) - f(x_3, y)| \leq |f(x_1, y) - f(x_1, y_1)| + |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| +$$
$$+ |f(x_2, y_2) - f(x_3, y)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4}.$$

Нехай U_2 – це відрізок з кінцями x_1 і x_3. Він невироджений, бо $x_1 \neq x_3$. Візьмемо довільну точку $p = (x, y) \in U_2 \times V_2$. Тоді з монотонності відносно першої змінної маємо

$$|f(p_0) - f(p)| \leq |f(p_0) - f(x_1, y)| + |f(x_1, y) - f(p)| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{3\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Оскільки x_1 і x_3 належать до U_0, то і $U_2 \subseteq U_0$, отже, $U_2 \times V_2 \subseteq U \times V$. Тому функція f квазінеперервна за сукупністю змінних у точці p_0.

[1] *Михайлюк В.В.* Берівська класифікація нарізно напівнеперервних і монотонних функцій// Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук. праць. Вип. 349. Математика. – Чернівці: Рута. – 2007. – С. 95 - 97.

[2] *Нестеренко В.В.* Про два класи функцій, які мають властивість Гана// Мат. Студії. – 2009. – **31**, № 2. – С. 183 - 188.

JOINT PROPERTIES OF FUNCTIONS WHICH MONOTONY WITH RESPECT TO THE FIRST VARIABLE

Vasyl' NESTERENKO

Yuriy Fed'kovych Chernivtsi National University,
2 Kotsjubynskyi Str., Chernivtsi 58012, Ukraine

We obtained some results conserning the joint properties of the functions $f : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$ which are monotone with respect to the first variable and posses some certain types of weak continuity with respect to the second variable