ДО ЗАКОНУ ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ У БАНАХОВИХ ҐРАТКАХ

©*2009 р. Іван МАЦАК*[1], *Анатолій ПЛІЧКО*[2]

[1]Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
пр. Глушкова 2, корп. 6, Київ 03127
$e-mail$: *mik@unicyb.kiev.ua*
[2]Краківська політехніка ім. Тадеуша Косцюшка
вул. Варшавська 24, Краків 31-155, Польща
$e-mail$: *aplichko@usk.pk.edu.pl*

Редакція отримала статтю 8 грудня 2009 р.

Для банахових граток дається підсилення класичних результатів про закон великих чисел. Наводяться приклади застосувань до емпіричних розподілів.

1 Вступ. Основні результати

Нехай $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ – послідовність незалежних копій випадкового елемента (в.е.) X зі значеннями в сепарабельному банаховому просторі B і $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Як відомо, в.е. X задовольняє закон великих чисел (ЗВЧ)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\|S_n\| = 0 \quad \text{м.н.} \tag{1}$$

тоді й тільки тоді, коли

$$\mathbf{E}\|X\| < \infty \tag{2}$$

і $\mathbf{E}X = 0$ (ЗВЧ Колмогорова; див., наприклад, [9, с. 276], [11, с. 189], [13]; м.н. – майже напевне).

[0]УДК 519.21; MSC 2000: 60B12, 60G50

Далі через B позначатимемо сепарабельну банахову ґратку з модулем $|\cdot|$. Для банахових ґраток поряд зі збіжністю за нормою можна розглядати порядкову збіжність (o-збіжність). Нагадаємо відповідне означення (див. [3, с. 365]).

Послідовність (x_n) елементів банахової ґратки B називається *o-збіжною* (o від order) до елемента x, позначаємо $x = o - \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, якщо існує така послідовність $v_n \in B$, що $|x - x_n| \le v_n$ для кожного n і $v_n \downarrow 0$, тобто $v_1 \ge v_2 \ge \dots$ та $\inf_{n\ge1} v_n = 0$.

У праці [5] перший зі співавторів вивчав порядковий ЗВЧ для послідовності незалежних в.е. зі значеннями в банахових ґратках.

Казатимемо, що в.е. X з $\mathbf{E}X = 0$ задовольняє *порядковий ЗВЧ*, якщо

$$o - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n = 0 \quad \text{м.н.} \tag{3}$$

Як виявилось, у загальних банахових ґратках порядкова збіжність у ЗВЧ істотно відрізняється від збіжності за нормою. Так, у праці [5] побудовано приклад в.е. X зі значеннями в просторі ℓ_1, який задовольняє ЗВЧ (1) та нерівність (2), і для якого

$$\left\| \sup_{n\ge1} \frac{1}{n} |S_n| \right\|_{\ell_1} = \infty \quad \text{м.н.}, \tag{4}$$

а отже, X не задовольняє порядковий ЗВЧ [5]. Більше того, для цього в.е. X виконується умова: $\mathbf{E}\|X\|^p < \infty$ для всіх $p > 1$.

Позначимо

$$S_n^* = \sup_{k\le n} |S_k|\,, \quad n = 1, 2, \dots;$$

тут і далі $k \le n$ означає $1 \le k \le n$.

Природно постає питання: коли ЗВЧ (1) можна підсилити до рівності

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \|S_n^*\| = 0 \quad \text{м.н.}, \tag{5}$$

і які умови для цього потрібно накласти на в.е. X ?

Як виявилося, контрприкладів до ЗВЧ (5), подібних до рівності (4), не існує.

Основні результати цієї замітки містять наступні теореми.

Теорема 1.1. *Нехай X – випадковий елемент зі значеннями в банаховій ґратці B. Тоді:*

(i) *якщо виконується умова* (2) *і* $\mathbf{E}X = 0$, *то* X *задовольняє ЗВЧ* (5);

(ii) *якщо умова* (2) *не виконується, то*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\|S_n^*\| = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\|S_n\| = \infty \quad \textit{м.н.} \tag{6}$$

Нехай $1 \le p, q < \infty$. Банахова ґратка B називається p-*опуклою* [12, с. 46], якщо існує така стала $D^{(p)} = D^{(p)}(B)$, що для кожного n і будь-яких елементів $x_1, x_2, \ldots, x_n \in B$ виконується нерівність

$$\left\| \left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \right\| \le D^{(p)} \left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} \|x_i\|^p \right)^{1/p}$$

і, аналогічно, q-*вгнутою*, якщо для деякої сталої $D_{(q)} = D_{(q)}(B)$ виконується обернена нерівність

$$\left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} \|x_i\|^q \right)^{1/q} \le D_{(q)} \left\| \left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} |x_i|^q \right)^{1/q} \right\|.$$

Далі розглядаємо випадок коли (X_n) – послідовність незалежних в.е., не обов'язково однаково розподілених. Так само, як і вище вводяться в.е. S_n та S_n^*.

Теорема 1.2. *Нехай* B – p-*опукла* $(1 \le p \le 2)$ *і* q-*вгнута* $(q < \infty)$ *банахова ґратка,* (X_n) – *послідовність незалежних випадкових елементів зі значеннями в* B *і* $\mathbf{E}X_n = 0$ *для кожного* n. *Тоді умова*

$$\sum\nolimits_{n\ge1} \frac{1}{n^p} \mathbf{E}\|X_n\|^p < \infty \tag{7}$$

достатня для справедливості порядкового закону великих чисел (3) *і ЗВЧ* (5).

Наслідок 1.1. *Нехай* (X_n) – *послідовність незалежних випадкових елементів зі значеннями у просторі* L_q *або* ℓ_q, $1 \le p \le 2$, *де* $p \le q$ *і* $\mathbf{E}X_n = 0$ *для кожного* n. *Тоді умова* (7) *достатня для справедливості порядкового закону великих чисел* (3) *і ЗВЧ* (5).

Нагадаємо, що банахів простір B називається B-*опуклим*, якщо він не містить рівномірно ℓ_1^n. Наступний наслідок теореми 1.2 є варіацією відомої для банахових ґраток теореми Бека (див. напр. [10, теорема 5.3]).

Наслідок 1.2. *Нехай* (X_n) *– послідовність незалежних випадкових елементів зі значеннями в сепарабельній* B*-опуклій банаховій ґратці* B *і* $\mathbf{E}X_n = 0$ *для кожного* n*. Тоді умова*

$$\sup_{n\geq 1}\mathbf{E}\|X_n\|^2 < \infty$$

достатня для справедливості порядкового закону великих чисел (3) *та ЗВЧ* (5).

2 Доведення теореми 1.1

Спочатку наведемо деякі допоміжні результати для скінченновимірних в.е.

Зауваження 2.1. Нехай $c_n \downarrow 0$ і (b_n) – числова послідовність, для якої $c_n b_n \to 0$ при $n\to\infty$. Тоді $c_n \max_{k\leq n}|b_k| \to 0$ при $n\to\infty$.

Справді, якщо це не так, то для деяких нескінченно великої послідовності (n_s) і послідовності (k_s), $k_s \leq n_s$, маємо $c_{n_s}b_{k_s} \not\to 0$. А це неможливо як для обмеженої послідовності (k_s), адже $c_n \downarrow 0$, так і для необмеженої, бо тоді $c_{n_s}|b_{k_s}| \leq c_{k_s}|b_{k_s}| \to 0$ при $n\to\infty$.

Подібна імплікація справедлива для скінченновимірного підпростору.

Твердження 2.1. *Нехай* E *– скінченновимірний підпростір банахової ґратки і* $c_n \downarrow 0$*. Нехай* (x_n) *– послідовність елементів* $x_n \in E$*, для якої* $c_n x_n \to 0$ *при* $n\to\infty$*. Тоді* $c_n \sup_{k\leq n}|x_k| \to 0$ *при* $n\to\infty$*.*

Доведення. Візьмемо нормований базис $(e_i)_1^m$ підпростору E. Розкладемо кожен вектор x_n за його елеметами: $x_n = \sum_{i=1}^m a_i^n e_i$. Зрозуміло, що $c_n|a_i^n| = c_n\|a_i^n e_i\| \to 0$ при $n\to\infty$ для кожного i. Тому, на підставі зауваження 2.1, маємо

$$c_n\left\|\sup_{k\leq n}|x_k|\right\| = c_n\left\|\sup_{k\leq n}\left|\sum_{i=1}^m a_i^k e_i\right|\right\| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^m c_n\left\|\sup_{k\leq n}\left|a_i^k e_i\right|\right\| = \sum_{i=1}^m \sup_{k\leq n} c_n|a_i^k| \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty. \ \square$$

Наголосимо, що у твердженні не вимагається, щоб E був підґраткою; лише лінійним підпростором. Твердження 2.1 дозволяє переносити теореми, відомі для сум S_n в $\mathbb{R}$, на максимуми S_n^* для в.е. зі значеннями в скінченновимірному підпросторі банахової ґратки. Наведемо два (допоміжних) результати такого сорту. У наступних двох наслідках X – в.е. зі значеннями у скінченновимірному підпросторі E банахової ґратки, а (X_n) – послідовність його незалежних копій.

Наслідок 2.1. *Якщо* $\mathbf{E}\|X\| < \infty$ *і* $\mathbf{E}X = 0$, *то має місце рівність* (5).

Доведення. Оскільки для X виконується ЗВЧ Колмогорова, то взявши у твердженні 2.1 $c_n = \frac{1}{n}$, одержимо наслідок 2.1. $\square$

Наслідок 2.2. *Нехай* $1 < p \le 2$. *Якщо* $\mathbf{E}\|X\|^p < \infty$ *і* $\mathbf{E}X = 0$, *то при* $n \to \infty$ *м.н.*

$$\frac{1}{n^{1/p}}\|S_n^*\| \to 0\,.$$

Доведення. Оскільки для X виконується ЗВЧ Марцінкевича-Зиґмунда [11, с. 186–187], то взявши у твердженні 2.1 $c_n = n^{-1/p}$, дістанемо наслідок 2.2. $\square$

Наступний простий приклад показує, що в (нескінченновимірних) банахових ґратках імплікація, подібна до твердження 2.1, виконується далеко не завжди, отже, ЗВЧ (5) не випливає із ЗВЧ (1).

Приклад. Нехай (e_n) – стандартний базис простору ℓ_2. Покладемо

$$y_1 = e_1,\; y_2 = \sqrt{2}e_2 - e_1, \ldots,\; y_n = \sqrt{n}e_n - \sqrt{n-1}e_{n-1}, \ldots,$$
$$x_n = \sum\nolimits_{k=1}^{n} y_k\,,\;\; n = 1, 2, \ldots$$

Тоді $x_n = \sqrt{n}e_n$ для кожного n, отже, $\frac{1}{n}\|x_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. З іншого боку, $x_n^* = \sup_{1\le k\le n}|x_k| = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}e_k$. Тому

$$\frac{1}{n}\|x_n^*\| = \frac{1}{n}\left(\sum\nolimits_{k=1}^{n} k\right)^{1/2} = \frac{1}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^{1/2} \to \frac{1}{\sqrt{2}}\,. \quad \square$$

Перейдемо безпосередньо до доведення теореми 1.1.

(i) Наступні міркування близькі до відомого доведення ЗВЧ у банаховому просторі [10, теорема 5.1]. Нехай $\epsilon > 0$. Існує скінченнозначний в.е. Y, для якого $\mathbf{E}\|X - Y\| < \epsilon$ [10, с. 207]. Оскільки $\|\mathbf{E}Y\| \le \|\mathbf{E}(Y - X)\| + \|\mathbf{E}X\| < \epsilon$, то взявши $Y - \mathbf{E}Y$ замість Y, можемо вважати, що $\mathbf{E}Y = 0$. Нехай $Z = X - Y$, (Y_i) – послідовність незалежних копій в.е. Y, (Z_i) – послідовність незалежних копій в.е. Z, $S_n^{'} = \sup_{k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k} Y_i\right|$, а $S_n^{''} = \sup_{k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k} Z_i\right|$. Зрозуміло, що $\|S_n^*\| \le \|S_n^{'}\| + \|S_n^{''}\|$. Далі, $|S_n^{''}| \le \sum_{i=1}^{n}|Z_i|$, звідки $\|S_n^{''}\| \le \sum_{i=1}^{n}\|Z_i\|$. Тому, враховуючи ЗВЧ для скалярів, маємо м.н.

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\|S_n^{''}\| \le \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\nolimits_{i=1}^{n}\|Z_i\| = \mathbf{E}\|Z\| < \epsilon\,. \tag{8}$$

Тепер з наслідку 2.1 та оцінки (8) випливає, що

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \|S_n^*\| \le \epsilon\,.$$

Оскільки число ϵ довільне, то (5) встановлено.

(ii). Доведення рівності (6) в $\mathbb{R}$ наведено в книжці [9, с. 279]. У випадку банахового простору воно потребує лише очевидних змін (див. також [11, с. 186–187]). $\square$

3 Доведення теореми 1.2

Доведемо спочатку ЗВЧ (3). Нагадаємо, що банахова ґратка B називається σ-*повною*, якщо для довільної обмеженої послідовності (x_n) елементів $x_n \in B$ існують точна верхня $\sup_n x_n$ та точна нижня $\inf_n x_n$ межі. Як добре відомо, сепарабельна σ-повна банахова ґратка порядково ізометрична до деякого банахового ідеального простору (БІП) [12, с. 25] (у книзі [12] вживається близький термін "функційний простір Кете"). Оскільки q-вгнута банахова ґратка, звичайно, буде σ-повною [12, теорема 1.a.5], то без обмеження загальності B можна вважати p-опуклим і q-вгнутим БІП, заданим на деякому вимірному просторі (T, Λ, μ) з нормованою мірою μ. Для такого простору умови

$$\mu\{t \in T : \lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)\} = 1, \tag{9}$$

та: існує $y = (y(t),\, t \in T) \in B$ такий, що для кожного n

$$\mu\{t \in T : |x_n(t)| \le y(t)\} = 1, \tag{10}$$

достатні для o-збіжності послідовності (x_n) до x [3, с. 368].

Розглянемо спочатку симетричні в.е. X_n. Тоді можна вважати, що для кожного n $X_n = \varepsilon_n \hat{X}_n$, де $\hat{X}_n$ і ε_n – незалежні, $\hat{X}_n$ – копія X_n , а ε_n – симетрична в.в. Бернуллі, $\mathbf{P}(\varepsilon_n = 1) = \mathbf{P}(\varepsilon_n = -1) = \frac{1}{2}$ [4, с. 20].

Припустимо, що для $x_n = \frac{1}{n} S_n$ і $x = 0$ рівність (9) виконується (ми доведемо її далі). Тоді, щоб довести теорему, достатньо для послідовності (x_n) перевірити умову (10), а саме, що

$$\left\| \sup_{n\ge1} \frac{1}{n} \left| S_n \right| \right\| < \infty \quad \text{м.н.}$$

Для цього достатньо показати, що

$$\hat{\mathbf{E}} \left\| \sup_{n\geq 1} \frac{1}{n} |S_n| \right\|^q < \infty \quad \text{м.н.}, \tag{11}$$

де через $\hat{\mathbf{E}}\varphi(\varepsilon_n \hat{X}_n)$ позначаємо математичне сподівання в.в. $\varphi(\varepsilon_n \hat{X}_n)$ при фіксованих значеннях в.е. $(\hat{X}_n)$.

Далі нам будуть потрібні такі леми.

Лема 3.1. [7]. *Нехай B – q-вгнутий, $q < \infty$, банахів ідеальний простір, $Y = (Y(t), t \in T)$ – випадковий елемент зі значеннями в B. Тоді*

$$(\mathbf{E}\|Y\|^q)^{1/q} \leq D_{(q)} \|(\mathbf{E}|Y(t)|^q)^{1/q}\| .$$

Лема 3.2. *Нехай $1 \leq p, q < \infty$. Тоді існує така стала $C_K = C_K(p,q)$, що для довільної послідовності дійсних чисел (a_i) виконується нерівність*

$$\left(\mathbf{E} \sup_{n\geq 1} \left| \frac{1}{n} \sum\nolimits_{i=1}^n a_i \varepsilon_i \right|^q \right)^{1/q} \leq C_K \left(\sum\nolimits_{n=1}^\infty \left| \frac{a_n}{n} \right|^p \right)^{1/p} .$$

Доведення. Скориставшись частковим випадком однієї нерівності з [14]: $\forall\, N$

$$\max_{n\leq N} \frac{1}{n} \left| \sum\nolimits_1^n a_i \right| \leq 2 \max_{n\leq N} \left| \sum\nolimits_1^n \frac{a_i}{i} \right| ;$$

нерівностями Леві [11, с. 48] та Кахана [12, теорема 1.e.13], одержимо

$$\left(\mathbf{E} \sup_{n\geq 1} \left| \frac{1}{n} \sum\nolimits_1^n a_i \varepsilon_i \right|^q \right)^{1/q} \leq 2 \left(\mathbf{E} \sup_{n\geq 1} \left| \sum\nolimits_1^n \frac{a_i \varepsilon_i}{i} \right|^q \right)^{1/q} \leq 4 \left(\mathbf{E} \left| \sum\nolimits_1^\infty \frac{a_n \varepsilon_n}{n} \right|^q \right)^{1/q} \leq$$

$$\leq C_K \left(\mathbf{E} \left| \sum\nolimits_1^\infty \frac{a_n \varepsilon_n}{n} \right|^p \right)^{1/p} \leq C_K \left(\sum\nolimits_1^\infty \left| \frac{a_n}{n} \right|^p \right)^{1/p} ,$$

де стала C_K пов'язана зі сталою в нерівності Кахана. □

Продовжимо доведення теореми. Згідно з лемою 3.1, маємо

$$\left(\hat{\mathbf{E}} \left\| \sup_{n\geq 1} \frac{1}{n} |S_n| \right\|^q \right)^{1/q} \leq D_{(q)} \left\| \left(\hat{\mathbf{E}} \sup_{n\geq 1} \left| \frac{1}{n} \sum\nolimits_{i=1}^n \varepsilon_i \hat{X}_i(t) \right|^q \right)^{1/q} \right\| . \tag{12}$$

Далі, враховуючи (12) і взявши в лемі 3.2 замість a_n фіксовані значення $\hat{X}_n(t)$, з означення p-опуклості одержимо, що для деякої сталої $C = C(B)$ виконується нерівність

$$\left(\hat{\mathbf{E}} \left\| \sup_{n\geq 1} \frac{1}{n} |S_n| \right\|^q \right)^{1/q} \leq C \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} \|X_n\|^p \right)^{1/p} . \tag{13}$$

Зрозуміло, що в умовах теореми 1.2 останній ряд збігається м.н., а отже, виконується нерівність (11).

Загальний випадок зведемо до симетричного, скориставшись стандартною процедурою симетризації.

Так, згідно з нерівністю (13) для симетричних в.е. маємо

$$\mathbf{E}\left\|\sup_{n\geq 1}\frac{1}{n}|S_n|\right\| \;\leq\; \mathbf{E}\left(\hat{\mathbf{E}}\left\|\sup_{n\geq 1}\frac{1}{n}|S_n|\right\|^q\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq \;\; C\mathbf{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|X_n\|^p}{n^p}\right)^{1/p} \;\leq\; C\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{E}\|X_n\|^p}{n^p}\right)^{1/p}. \tag{14}$$

Позначимо

$$X_n^{(s)} = X_n - X_n', \quad S_n^{(s)} = \sum\nolimits_{i=1}^{n} X_i^{(s)},$$

де (X_n') – незалежна копія послідовності (X_n).

Так само як і в симетричному випадку, досить перевірити, що виконується співвідношення (10). Для цього достатньою є така умова

$$\mathbf{E}\left\|\sup_{n\geq 1}\frac{1}{n}|S_n|\right\| < \infty.$$

Але вона випливає з оцінки (14) та відомих моментних оцінок для банахових просторів [1, с. 222]

$$\mathbf{E}\left\|\sup_{n\geq 1}\frac{|S_n|}{n}\right\| \;\;\leq\;\; \mathbf{E}\left\|\sup_{n\geq 1}\frac{|S_n^{(s)}|}{n}\right\| \leq C\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{E}\|X_n^{(s)}\|^p}{n^p}\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \;\; C\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{E}\|X_n\|^p}{n^p}\right)^{1/p}. \tag{15}$$

Залишається довести рівність (9), точніше встановити, що

$$\mu\left\{t\in T : \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|S_n(t)| = 0\right\} = 1 \quad \text{м.н.} \tag{16}$$

Для порядково обмеженої послідовності (x_n) елементів σ-повної банахової ґратки *верхня границя* визначається такою рівністю (див. [2], с. 504)

$$\lim_{n\to\infty}\sup x_n = \inf_m(\sup_{n\geq m} x_n).$$

Покладемо

$$Q_\infty = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}|S_n| \,.$$

В умовах теореми 1.2 простір B буде σ-повною банаховою ґраткою. Тому згідно з оцінкою (15) в B існує випадковий елемент Q_∞. Його вимірність випливає з [7, Наслідок 3].

Зрозуміло, що умова (16) випливатиме з рівності

$$\|Q_\infty\| = 0 \quad \text{м.н.} \tag{17}$$

Покажемо, що виконується умова (17). При умові (7) для кожного $\epsilon > 0$ існує n_0 таке, що

$$\sum\nolimits_{n\ge n_0} \frac{\mathbf{E}\|X_n\|^p}{n^p} < \epsilon^p. \tag{18}$$

Покладемо

$$S_n^{'} = \sum\nolimits_{i=1}^{n} X_i^{'} \quad \text{та} \quad S_n^{''} = \sum\nolimits_{i=1}^{n} X_i^{''},$$

де

$$X_n^{'} = \begin{cases} X_n & \text{при} \quad n \le n_0, \\ 0 & \text{при} \quad n > n_0, \end{cases} \quad \text{і} \quad X_n^{''} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n \le n_0, \\ X_n & \text{при} \quad n > n_0. \end{cases}$$

Зрозуміло, що $S_n = S_n^{'} + S_n^{''}$ і

$$Q_\infty \le \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}|S_n^{'}| + \sup_{n\ge 1} \frac{1}{n}|S_n^{''}| \quad \text{м.н.} \tag{19}$$

Оскільки послідовність $(X_n^{'})$ містить лише n_0 ненульових членів, то

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}|S_n^{'}| = 0 \quad \text{м.н.} \tag{20}$$

Застосуємо оцінку (15) до послідовності $(X_n^{''})$. Тоді

$$\mathbf{E}\left\|\sup_{n\ge 1} \frac{|S_n^{''}|}{n}\right\| \le C\left(\sum\nolimits_{n\ge 1} \frac{\mathbf{E}\|X_n^{''}\|^p}{n^p}\right)^{1/p} \le C\left(\sum\nolimits_{n\ge n_0} \frac{\mathbf{E}\|X_n\|^p}{n^p}\right)^{1/p} < C\epsilon \,. \tag{21}$$

Згідно з законом 0 та 1, величина $\|Q_\infty\|$ буде невипадковою м.н. Тому, врахувавши оцінки (18)–(21), одержимо

$$\|Q_\infty\| < C\epsilon \,,$$

де C – абсолютна константа, яка залежить лише від B. Внаслідок довільності ϵ звідси випливає (17).

Таким чином, порядковий ЗВЧ (3) доведений.

ЗВЧ (5) буде наслідком порядкового ЗВЧ та наступної ґраткової версії зауваження 2.1.

Лема 3.3. *Нехай B – порядково неперервна банахова ґратка, $c_n \downarrow 0$ і (x_n) – послідовність в B, для якої $c_n x_n$ о-збігається до 0. Тоді*

$$\lim_{n\to\infty} c_n \left\|\sup_{k\le n} |x_k|\right\| = 0.$$

Доведення. Згідно з означенням порядкової збіжності, існує така послідовність $v_n \downarrow 0$, що $c_n|x_n| \le v_n$. Далі, з порядкової неперервності банахової ґратки B маємо: для кожного $\epsilon > 0$ існує таке n_0, що $\|v_{n_0}\| \le \epsilon$. Тоді

$$\limsup_{n\to\infty} c_n \left\|\sup_{k\le n} |x_k|\right\| \le \limsup_{n\to\infty} \left(c_n \left\|\sup_{k\le n_0} |x_k|\right\| + c_n \left\|\sup_{n_0<k\le n} |x_k|\right\|\right)$$

$$\le 0 + \limsup_{n\to\infty} c_n \left\|\sup_{n_0<k\le n} v_{n_0}\right\| \le \epsilon\,.$$

Залишилось спрямувати ϵ до нуля. $\square$

Згідно з відомим результатом Піз'є [11, розд. 9] B-опукла банахова ґратка має тип r для деякого $r > 1$ і, таким чином, буде p-опуклою та q-вгнутою для деяких $p > 1$ та $q < \infty$ [12, с. 88, наслідок 1.f.9; с. 92, наслідок 1.f.13]. Тому наслідок 1.2 безпосередньо випливає з теореми 1.2.

4 Приклади застосування до емпіричних розподілів

1. Вибірка в $\mathbb{R}$. Для незалежних однаково розподілених випадкових величин (н.о.р.в.в.) $\xi, \xi_1, \xi_2 \ldots$ в $\mathbb{R}$ з функцією розподілу $F(t)$, введемо емпіричну функцію розподілу

$$F_n^*(t) = \frac{1}{n}\sum\nolimits_{i=1}^{n} I_{(-\infty,t)}(\xi_i), \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

де $I_{(-\infty,t)}(\xi) = 1$, якщо $\xi < t$ і $= 0$, якщо $\xi \ge t$.

Відома теорема Глівенка-Кантеллі стверджує, що при $n \to \infty$ виконується умова

$$\sup\nolimits_{t\in\mathbb{R}} |F_n^*(t) - F(t)| \to 0 \quad \text{м.н.}$$

Розглянемо випадкові процеси

$$X_n(t) = I_{(-\infty,t)}(\xi_n) - F(t), \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{22}$$

як в.е. зі значеннями у просторі $L_p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$ (звичайно це буде так лише за певних обмежень на в.в. ξ, наприклад, за умови (18)). Для в.е. X_n, визначеного рівністю (22) , ЗВЧ (5) у просторі $L_p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$, при умові

$$\mathbf{E}\|X_n\|_{L_p(\mathbb{R})} < \infty \tag{23}$$

можна записати у такому вигляді: при $n \to \infty$ м.н.

$$\frac{1}{n^p}\int_{-\infty}^{\infty} \max_{k\le n} k^p |F_k^*(t) - F(t)|^p dt \to 0\,. \tag{24}$$

Зауважимо, що рівність (24) є деяким варіантом теореми Глівенка-Кантеллі у просторі $L_p(\mathbb{R})$.

Наслідок 4.1. *При* $1 \le p < \infty$ *емпірична функція розподілу* $F_n^*(t)$ *задовольняє закон великих чисел* (24) *тоді й тільки тоді, коли*

$$\mathbf{E}|\xi|^{1/p} < \infty\,. \tag{25}$$

Зауваження 4.1. Якщо $|\xi| < C < \infty$ м.н., то виконується співвідношення (25).

Наслідок 4.1 безпосередньо випливає з теореми 1.1, якщо встановити еквівалентність умов (23) і (25). Така еквівалентність доведена в праці [6].

2. Вибірка в $\mathbb{R}^m$. Позначимо через $\langle \bar b, \bar c\rangle = \sum_{i=1}^m b_i c_i$ скалярний добуток елементів $\bar b = (b_1, \dots, b_m)$ та $\bar c = (c_1, \dots, c_m)$ з $\mathbb{R}^m$, $\|\bar c\| = \langle \bar c, \bar c\rangle^{1/2}$, $\bar\xi, \bar\xi_1, \bar\xi_2 \dots$ н.о.р.в.в. в $\mathbb{R}^m$. З кількох можливих способів визначення емпіричної функції розподілу в $\mathbb{R}^m$ виберемо такий

$$F_n^*(\bar c, t) = \frac{1}{n}\sum\nolimits_{i=1}^n I_{(-\infty,t)}(\langle \bar\xi_i, \bar c\rangle), \quad (\bar c, t) \in D,$$

де $D = \mathbb{S}^m \times \mathbb{R}$, $\mathbb{S}^m$ – одинична сфера m-вимірного евклідового простору. Природним способом введемо на D міру, як добуток (нормованої) сферичної міри Лебега на $\mathbb{S}^m$ та звичайної міри Лебега в $\mathbb{R}$.

Покладемо $F(\bar c, t) = \mathbf{P}\{\langle \bar\xi, \bar c\rangle < t\}$ і розглянемо випадкові функції

$$X_n(\bar c, t) = I_{(-\infty,t)}(\langle \bar\xi_n, \bar c\rangle) - F(\bar c, t), \quad (\bar c, t) \in D\,,$$

як в.е. зі значеннями у просторі $L_p(D)$ інтегровних з p-м степенем функцій, $1 \le p < \infty$. (Нижче ми наведемо умову, коли це буде так.)

Застосовуючи теорему 1.1 до в.е. X_n, одержимо наступний результат.

Наслідок 4.2. *Якщо* $1 \le p < \infty$ *і*

$$\mathbf{E}\|\bar{\xi}\|^{1/p} < \infty\,, \tag{26}$$

то X_n *набуває значень у просторі* $L_p(D)$ *і при* $n \to \infty$ *м.н.*

$$\frac{1}{n^p}\int_{\mathbb{S}^m} d\bar{c}\int_{-\infty}^{\infty}\sup_{k\le n} k^p |F_k^*(\bar{c},t) - F(\bar{c},t)|^p dt \to 0\,. \tag{27}$$

Для доведення наслідку 4.2 досить перевірити виконання умови

$$\mathbf{E}\|X_n\|_{L_p(D)} < \infty\,, \tag{28}$$

Позначимо через $\mathbb{I}(A)$ індикатор випадкової події A, який означається наступним чином: $\mathbb{I}(A) = 1$, якщо подія A виконується, та $\mathbb{I}(A) = 0$ в іншому випадку. Маємо

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\|X_n\|_{L_p(D)} &= \mathbf{E}\left(\int_{\mathbb{S}^m} d\bar{c}\int_{-\infty}^{\infty}\big(|1-F(\bar{c},t)|^p\mathbb{I}(\langle\bar{\xi},\bar{c}\rangle < t) + F(\bar{c},t)^p\mathbb{I}(\langle\bar{\xi},\bar{c}\rangle \ge t)\big)\,dt\right)^{1/p}\\
&= \mathbf{E}\left(\int_{\mathbb{S}^m} d\bar{c}\left(\int_{\langle\bar{\xi},\bar{c}\rangle}^{\infty}|1-F(\bar{c},t)|^p dt + \int_{-\infty}^{\langle\bar{\xi},\bar{c}\rangle}F(\bar{c},t)^p dt\right)\right)^{1/p}\\
&\le \mathbf{E}\left(\int_{\mathbb{S}^m} d\bar{c}\left(2|\langle\bar{\xi},\bar{c}\rangle| + \int_0^{\infty}|1-F(\bar{c},t)|^p dt + \int_{-\infty}^{0}F(\bar{c},t)^p dt\right)\right)^{1/p}\\
&\le 2^{1/p}\mathbf{E}\|\bar{\xi}\|^{1/p} + \sup_{\mathbb{S}^m}\left(\int_0^{\infty}|1-F(\bar{c},t)|^p dt + \int_{-\infty}^{0}F(\bar{c},t)^p dt\right)^{1/p}
\end{aligned} \tag{29}$$

Оцінюючи зверху інтеграли в останньому виразі, одержимо

$$\int_0^{\infty}|1-F(\bar{c},t)|^p dt \le \int_0^{\infty}\mathbf{P}\{|\langle\bar{\xi},\bar{c}\rangle| \ge t\}^p dt \le \int_0^{\infty}\mathbf{P}\{\|\bar{\xi}\| \ge t\}^p dt\,. \tag{30}$$

І аналогічно

$$\int_{-\infty}^{0}F(\bar{c},t)^p dt = \int_{-\infty}^{0}\mathbf{P}\{\langle\bar{\xi},-\bar{c}\rangle \ge -t\}^p dt = \int_0^{\infty}\mathbf{P}\{\langle\bar{\xi},-\bar{c}\rangle \ge t\}^p dt \le$$

$$\le \int_0^{\infty}\mathbf{P}\{\|\bar{\xi}\| \ge t\}^p dt\,.$$

Для одержання умови (28) з останніх оцінок та умови (26) залишається скористатися такою лемою.

Лема 4.1. *Нехай* $\eta \ge 0$ *– випадкова величина в* $\mathbb{R}$ *і* $\mathbf{E}\eta^{1/p} < \infty$, $p > 0$. *Тоді*

$$\int_0^{\infty}\mathbf{P}\{\eta \ge t\}^p dt < \infty\,.$$

Доведення. Нехай $F(t)$ – функція розподілу в.в. η. Відомо [9, с. 178], що з умов леми випливає наступне співвідношення

$$\mathbf{E}\eta^{1/p} = \int_0^\infty t^{1/p} dF(t) = \frac{1}{p}\int_0^\infty t^{1/p-1}(1-F(t))dt < \infty\,.$$

Звідси просто випливає така умова: при $t \to \infty$

$$t^{1/p}(1-F(t)) \to 0,$$

а отже, $1 - F(t) \le Kt^{-1/p}$ при $t > 1$ і деякому K. Тоді

$$\int_1^\infty (1-F(t))^p dt \le K^{p-1}\int_1^\infty t^{1/p-1}(1-F(t))dt \le K^{p-1} p\mathbf{E}\eta^{1/p} < \infty\,,$$

що еквівалентно твердженню леми. □

Далі замість $L_p(D)$ візьмемо простір $\mathcal{B}$, що складається з функцій $x(\bar{c}, t)$, $\bar{c} \in \mathbb{S}^m$, $t \in \mathbb{R}$, інтегровних з p-тим степенем відносно другого аргументу (при фіксованому першому), для яких норма

$$\|x\|_{\mathcal{B}} = \max_{\bar{c}\in\mathbb{S}^m}\left(\int_{-\infty}^\infty |x(\bar{c}, t)|^p dt\right)^{1/p}$$

скінченна, а функція $\varphi(\bar{c}) = \int_{-\infty}^\infty |x(\bar{c}, t)|^p dt$ неперервна на $\mathbb{S}^m$. Цей простір природним чином ототожнюється з відомим простором $C^{L_p(\mathbb{R})}(\mathbb{S}^m)$ функцій, неперервних на компакті $\mathbb{S}^m$ зі значеннями в $L_p(\mathbb{R})$. Оскільки простір $L_p(\mathbb{R})$ сепарабельний, то $\mathcal{B}$ також буде сепарабельним. Цей простір буде банаховою ґраткою з природним порядком: $x \le y$, якщо $x(\bar{c}, t) \le y(\bar{c}, t)$ для кожного $\bar{c}$ і майже кожного t.

Лема 4.2. *За виконання умови* (26)*, значення в.е.* $X_n(\bar{c}, t)$ *лежать у просторі* $\mathcal{B}$ *і*

$$\mathbf{E}\|X_n\|_{\mathcal{B}} < \infty. \tag{31}$$

Доведення. Повторення, з очевидними змінами, доведення наслідку 4.2, дає скінченність норми (31) за умови (26). Залишається перевірити неперервність функції $\varphi(\bar{c})$, де

$$\varphi(\bar{c}) = \int_{-\infty}^\infty g(\bar{c}, t)dt\,,$$

$$g(\bar{c}, t) = |1 - F(\bar{c}, t)|^p \mathbb{I}(\langle\bar{\xi}, \bar{c}\rangle < t) + F(\bar{c}, t)^p \mathbb{I}(\langle\bar{\xi}, \bar{c}\rangle \ge t)$$

(див. оцінки (29)).

Нехай $\bar{c}_n \to \bar{c}_0$. Ясно, що $\langle \bar{\xi}, \bar{c}_n \rangle \to \langle \bar{\xi}, \bar{c}_0 \rangle$ м.н. Тоді $F(\bar{c}_n, t) \to F(\bar{c}_0, t)$ у всіх точках неперервності $F(\bar{c}_0, t)$, а отже, майже скрізь на $\mathbb{R}$. Очевидно, що $\mathbb{I}(\langle \bar{\xi}, \bar{c}_n \rangle < t) \to \mathbb{I}(\langle \bar{\xi}, \bar{c}_0 \rangle < t)$ також майже скрізь на $\mathbb{R}$. Це означає, що $g(\bar{c}_n, t) \to g(\bar{c}_0, t)$ майже скрізь на $\mathbb{R}$. Оскільки $g(\bar{c}, t) < 2$, то згідно з теоремою Лебеґа

$$\int_{-\|\xi\|}^{\|\xi\|} g(\bar{c}_n, t)dt \to \int_{-\|\xi\|}^{\|\xi\|} g(\bar{c}_0, t)dt.$$

У відповідності з (30), на інтервалі $(\|\xi\|, \infty)$ маємо оцінку

$$g(\bar{c}, t) \leq |1 - F(\bar{c}, t)|^p \leq \mathbf{P}\{\|\bar{\xi}\| \geq t\}^p.$$

Згідно з лемою 4.1 функція $\mathbf{P}\{\|\bar{\xi}\| \geq t\}^p$ інтегровна на $(0, \infty)$, тому знову застосувавши теорему Лебеґа, одержимо

$$\int_{\|\xi\|}^{\infty} g(\bar{c}_n, t)dt \to \int_{\|\xi\|}^{\infty} g(\bar{c}_0, t)dt.$$

Так само одержуємо

$$\int_{-\infty}^{-\|\xi\|} g(\bar{c}_n, t)dt \to \int_{-\infty}^{-\|\xi\|} g(\bar{c}_0, t)dt.$$

Отже, $\varphi(\bar{c}_n) \to \varphi(\bar{c}_0)$. $\square$

Наслідок 4.3. *Якщо* $1 \leq p < \infty$ *і виконується умова* (26), *то при* $n \to \infty$ *м.н.*

$$\frac{1}{n^p} \max_{\mathbb{S}^m} \int_{-\infty}^{\infty} \max_{k \leq n} k^p |F_k^*(\bar{c}, t) - F(\bar{c}, t)|^p dt \to 0\,.$$

Доведення є простою комбінацією леми 4.2, та теореми 1.1 для в.е. $X_n(\bar{c}, t)$ у просторі $\mathcal{B}$. $\square$

[1] *Вахания Н.Н., Тариеладзе В.И., Чобанян С.А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. – М.: Наука. – 1985. – 368 с.

[2] *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.

[3] *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.

[4] *Кахан Ж.П.* Случайные функциональные ряды. – М.: Мир, 1973. – 304 с.

[5] *Мацак І.К.* Зауваження до порядкового закону великих чисел// Теорія ймовірност. та мат. статист. – 2005. – Вип. 72. – С. 84–92.

[6] *Мацак І.К.* Порядкова збіжність і теореми типу Глівенка-Кантеллі в $L_p(-\infty, \infty)$// Теорія ймовірност. та мат. статист. – 2006. – Вип. 75. – С. 76–84.

[7] *Мацак І.К., Плічко А.М.* Про максимуми незалежних випадкових елементів у функційній банаховій гратці// Теорія ймовірност. та мат. статист. – 1999. – Вип. 61. – С. 105–116.

[8] *Петров В.В.* Суммы независимых случайных величин. – М.: Наука, 1972. – 416 с.

[9] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. – М.: Мир, 1984. – 752 с.

[10] *Hoffman-Jørgensen J.* Probability and geometry of Banach spaces// Lect. Notes Math. – 1982. – **948**. – P. 164–229.

[11] *Ledoux M., Talagrand M.* Probability in Banach spaces. – Berlin: Springer, 1991. – 480 p.

[12] *Lindenstraus J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces, v. 2. – Berlin: Springer, 1979. – 243 p.

[13] *Mourier E.* Eléments aléatoires dans un espace de Banach// Ann. Inst. H. Poincaré. – 1953. – **13**. – P. 161–244.

[14] *Wellner J.A.* A martingale inequality for the empirical process// Annals of Probab. – 1977. – **5**, №2. – P. 303–308.

ON THE LAW OF LARGE NUMBERS IN BANACH LATTICES

Ivan MATSAK[1], *Anatolij PLICHKO*[2]

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv
2/6, Academician Glushkov Avenue, Kyiv 03127, Ukraine
[2] Cracow University of Technology
ul. Warszawska 24, Cracow 31-155, Poland

We intensify classical results on Banach space law of large numbers for case of Banach lattices. In particular, we prove that if (X_n) is a sequence of independent identically distributed random elements in a separable Banach lattice B , $\mathbf{E}\|X_1\| < \infty$ and $\mathbf{E}X_1 = 0$ then $n^{-1}\| \max_{k\le n} \sum_1^k X_i\| \to 0$ as $n \to \infty$ a.s. If B is p-convex $(1 \le p < 2)$ and q-concave $(q < \infty)$ separable Banach lattice, (X_n) is a sequence of independent random elements in B, $\mathbf{E}X_1 = 0$ for every n, and $\sum_{n\ge 1} n^{-p}\mathbf{E}\|X_m\|^p < \infty$ then $n^{-1}\| \max_{k\le n} \sum_1^k X_i\| \to 0$ as $n \to \infty$ a.s. Examples of applications to empirical distributions are presented.