ПОБУДОВА ω-ПЕРВІСНИХ: СИЛЬНО ДОСЯЖНІ ПРОСТОРИ

©*2009 р. Олександр МАСЛЮЧЕНКО*

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
вул. Коцюбинського, 2, Чернівці, 58012

Редакція отримала статтю 1 жовтня 2009 р.

В даній роботі розвивається техніка побудови α-неперервних ω-первісних на сильно досяжних просторах, з допомогою якої охарактеризовано коливання нарізно неперервних функцій на добутку довільних метризовних просторів, а також коливання функцій першого та другого класів Бера на досконало нормальних сильно досяжних просторах.

1 Вступ

Починаючи з роботи Р. Кешнера [1], багато праць було присвячено вивченню задачі про побудову нарізно неперервних чи подібних до них функцій з даною множиною точок розриву. Зокрема, в [2] отримано повний опис множини точок розриву нарізно неперервних функцій на добутках довільних метризовних просторів. Крім того, в [3] було охарактеризовано множини точок розриву квазінеперервних функцій на довільних спадково нормальних просторах. Дещо в іншому руслі йде стаття [4], в якій описано множини точок розриву функцій, які неперервні відносно першої змінної і диференційовні відносно другої.

Як відомо, числовим мірилом розривів функції $f : X \to Y$ зі значеннями в метричному просторі Y є її *коливання*, тобто функція $\omega_f : X \to [0, +\infty]$, яка для кожного $x \in X$ задається формулою

$$\omega_f(x) = \inf_{x \in \mathrm{int} U} \sup_{x', x'' \in U} |f(x') - f(x'')|_Y .$$

УДК 517.51, MSC 2000: 54C30, 26A99, 26B99

Множина точок розриву $D(f)$ функції f зі значеннями в метричному просторі рівна носію її коливання, тобто $D(f) = \mathrm{supp}\omega_f$ (для функції $g : X \to [0, +\infty]$ і числа $\varepsilon > 0$ множину $\mathrm{supp} g = \{x \in X : g(x) > 0\}$ ми називаємо *носієм функції* g, а множину $\mathrm{supp}_\varepsilon g = \{x \in X : f(x) \geq \varepsilon\}$ – її *ε-носієм*). До речі, у випадку дійснозначної функції f її коливання можна подати, як різницю $\omega_f = f^* - f_*$ *верхньої та нижньої функцій Бера*, які для кожного $x \in X$ визначаються формулами

$$f^*(x) = \inf_{x \in \mathrm{int} U} \sup f(U), \qquad \text{та} \qquad f_*(x) = \sup_{x \in \mathrm{int} U} \inf f(U).$$

Функцію f називатимемо *ω-первісною* функції g, якщо $\omega_f = g$.

Таким чином, точнішою є задача про побудову функції з того чи іншого функціонального класу, яка є *ω-первісною* до даної функції g. Найпростіша версія цієї задачі, а саме задача про побудову довільної ω-первісної до даної функції, була розв'язана у роботах [5, 6, 7, 8, 9, 10] для випадку функцій, що визначені на метризовних, чи "майже" метризовних просторах. Крім того, в цих роботах вивчається і задача про побудову ω-первісних з другого класу Бера.

В [11] (див. також [12]) було розроблено техніку побудови ω-первісних від таких напівнеперервних зверху функцій g, у яких $g_* = 0$ (тобто, у яких усі ε-носії $\mathrm{supp}_\varepsilon g$ є ніде не щільними при $\varepsilon > 0$). Це дало змогу охарактеризувати коливання функцій, які є одночасно нарізно неперервними і квазінеперервними. У випадку, коли квазінеперервність нарізно неперервної функції отримується автоматично (наприклад, коли f визначена на добутку метризовних просторів, і добуток всіх співмножників крім останнього є берівським), одержано повний опис коливань нарізно неперервних функцій.

В даній роботі ми, розвиваючи методи [11], розробимо техніку побудови ω-первісних до функцій g, у яких, взагалі кажучи, $g_* \neq 0$. В статті [13] було доведено що кожна напівнеперервна зверху функція $g \geq 0$ подається у вигляді суми квазінеперервної функції $g_0 = (g^*)_*$ і функції h, з ніде не щільними ε-носіями. Крім того, там досліджено як треба узгоджено будувати ω-первісні до функцій g_0 і h^*, так, щоб сумарна функція була би ω-первісною до $g = g_0 + h$. Виявляється, що цю узгоджену побудову можна провести в широкому класі, так званих, сильно досяжних просторів, який, зокрема, містить усі метризовні простори. Таким чином, в даній роботі ми, зокрема, охарактеризуємо коливання нарізно неперервних функцій на добутку довільних метризовних просторів.

Перш ніж переходити до викладу результатів даної роботи зауважимо, що стаття [13] є першою частиною данаї роботи і тому протягом всієї статті ми будемо активно користуватися поняттями і результатами з [13].

2 Функції, які неперервні відносно деякої структури

Структурою на множині X ми називатимемо сім'ю $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x : x \in X)$ непорожніх систем $\mathcal{A}_x$ підмножин простору X. Нехай $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x : x \in X)$ – деяка структура на множині X, Y – топологічний простір, $f : X \to Y$ і $x_0 \in X$. Функцію f називатимемо *$\mathcal{A}$-неперервною в точці* x_0, якщо для довільного околу V точки $f(x_0)$ існує $A \in \mathcal{A}_{x_0}$, таке, що $f(A) \subseteq V$. Казатимемо, що f є *$\mathcal{A}$-неперервною*, якщо f є $\mathcal{A}$-неперервною в кожній точці $x \in X$. Множину M називатимемо *$\mathcal{A}$-околом точки* $x \in X$, якщо $\{x\} \cup A \subseteq M$ для деякого $A \in \mathcal{A}_x$. Казатимемо, що M є *$\mathcal{A}$-околом* множини E, якщо M є $\mathcal{A}$-околом кожної точки $x \in E$. Множину E називатимемо *$\mathcal{A}$-мізерною*, якщо вона має мізерний (тобто ніде не щільний) $\mathcal{A}$-окіл. Казатимемо, що E є *σ-$\mathcal{A}$-мізерною*, якщо E можна подати у вигляді об'єднання послідовності $\mathcal{A}$-мізерних множин E_n.

Структуру $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x : x \in X)$ називатимемо *напрямленою*, якщо для кожного $x \in X$ система $\mathcal{A}_x$ напрямлена включенням $\supseteq$. Для напрямлених структур справедлива теорема додавання.

Твердження 2.1. *Нехай X – топологічний простір, $\mathcal{A}$ – напрямлена структура на X і $x \in X$. Тоді*

(i) для довільних $\mathcal{A}$-неперервних в точці x функцій $f, g : X \to \mathbb{R}$ їхня сума $f + g$ також буде $\mathcal{A}$-неперервною в точці x;

(ii) для довільних $\mathcal{A}$-неперервних в точці x функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$, таких, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ рівномірно збіжний, їхня сума $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ також буде $\mathcal{A}$-неперервною в точці x.

Насправді, поняття $\mathcal{A}$-неперервності включає в себе цілий ряд відомих ослаблень неперервності. Нехай X та Y – деякі топологічні простори. Нагадаємо, що відображення $f : X \to Y$ називається *квазінеперервним в точці* $x \in X$, якщо для довільних околів V точки $f(x)$ і U точки x існує відкрита непорожня множина $U_1 \subseteq U$, така, що $f(U_1) \subseteq V$. Структуру $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x : x \in X)$, де $\mathcal{A}_x = \{A \subseteq X : x \in \overline{\mathrm{int} A}\}$, називатимемо *структурою квазінеперервності*. Ця термінологія інспірована наступним очевидним фактом.

Твердження 2.2. *Нехай X – топологічний простір і $\mathcal{A}$ – структура квазінеперервності на X. Тоді для довільного топологічного простору Y і точки $x \in X$ квазінеперервність відображення $f : X \to Y$ в точці x рівносильна його $\mathcal{A}$-неперервності в цій точці.*

Перейдемо тепер до розгляду нарізно неперервних функцій та їх аналогів. Нехай $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$ – добуток скінченної сім'ї топологічних просторів і $\alpha \subseteq 2^I$. Якщо $\alpha = \big\{\{i\} : i \in I\big\}$, то у всіх подальших термінах і позначеннях ми пропускатимемо символ α. Для довільної множини $J \subseteq I$ покладемо $X_J = \prod\limits_{j \in J} X_j$, а через $\mathrm{pr}_J : X \to X_J$ позначатимемо відповідну *проекцію*, тобто $\mathrm{pr}_J\big((x_i)_{i \in I}\big) = (x_j)_{j \in J}$. Розглянемо функцію $f : X \to Y$. Для довільної множини $J \subseteq I$ і точки $x' = (x_j)_{j \in J} \in X_J$ визначимо $f_{x'} : X_{I \setminus J} \to Y$, покладаючи $f_{x'}(x'') = f(x)$ де $x'' = (x_j)_{j \in I \setminus J} \in X_{I \setminus J}$ і $x = (x_i)_{i \in I} \in X$. Казатимемо, що функція $f : X \to Y$ *α-нарізно неперервною в точці $x \in X$*, якщо для кожного $A \in \alpha$ функція $f_{x'}$ неперервна в точці x'', де $x' = \mathrm{pr}_A(x)$ і $x'' = \mathrm{pr}_{I \setminus A}(x)$. Як звичайно, казатимемо, що f *α-нарізно неперервна*, якщо вона є такою в кожній точці $x \in X$.

Множину $\mathrm{cr}_\alpha E = \bigcup\limits_{A \in \alpha} \mathrm{pr}_{I \setminus A}^{-1}(\mathrm{pr}_{I \setminus A}(E))$ будемо називати *α-хрестом множини E*. Нескладно перевірити, що f буде α-нарізно неперервною в точці $x \in X$ тоді і тільки тоді, коли звуження $f|_{\mathrm{cr}_\alpha \{x\}}$ неперервне в x.

Структурою α-нарізної неперервності називатимемо структуру $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x : x \in X)$, де $\mathcal{A}_x = \big\{U \cap \mathrm{cr}_\alpha\{x\}\colon U$ окіл точки $x\big\}$, при $x \in X$. Ця назва обумовлюється наступним твердженням, яке виводиться безпосередньо з означень.

Твердження 2.3. *Нехай $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$ – добуток скінченної сім'ї топологічних просторів, $\alpha \subseteq 2^I$ і $\mathcal{A}$ – структура α-нарізної неперервності. Тоді для довільного топологічного простору Y точки $x \in X$ функція $f : X \to Y$ буде α-нарізно неперервною в точці x тоді і тільки тоді, коли f є $\mathcal{A}$-неперервною в цій точці.*

Зауважимо, що якщо $\mathcal{A}$ – це структура нарізної α-неперервності, то поняття σ-$\mathcal{A}$-мізерної множини збігається із поняттям σ-α-навхрест ніде не щільної множини з [11]. Тому з [11, твердження 6.2 і теорема 6.4] випливає, наступний результат, який фактично є нескладним наслідком основного результату з [2].

Теорема 2.4. *Нехай $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$ – добуток скінченної сім'ї метризовних просторів, $\alpha \subseteq 2^I$, така, що $\bigcup \alpha = I$, і $\mathcal{A}$ – структура α-нарізної непе-*

рервності. Тоді для довільної α-нарізно неперервної функції $f : X \to \mathbb{R}$ множина $D(f)$ її точок розриву є σ-$\mathcal{A}$-мізерною.

Нехай тепер $X = \mathbb{R}^n$ і Y – топологічний простір. Функція $f : X \to Y$ називається *лінійно неперервною в точці* $x \in X$, якщо для довільного $e \in X$ функція $f_e(t) = f(x + te)$ неперервна в точці 0, тобто, якщо звуження f на довільну пряму, що проходить через x неперервне в точці x. *Структурою лінійної неперервності* називатимемо структуру $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x : x \in X)$, де $\mathcal{A}_x = \big\{A \subseteq X : \forall e \in X \exists \varepsilon > 0 | [x - \varepsilon e, x + \varepsilon e] \subseteq A\big\}$. І знову має місце наступний факт.

Твердження 2.5. *Нехай $X = \mathbb{R}^n$ і $\mathcal{A}$ – структура лінійної неперервності на X. Тоді для довільного топологічного простору Y і точки $x \in X$ лінійна неперервність відображення $f : X \to Y$ в точці x рівносильна його $\mathcal{A}$-неперервності в цій точці.*

Звичайно, що квазінеперервність, нарізна неперервність і лінійна неперервність – це далеко не повний перелік випадків $\mathcal{A}$-неперервності. Підбираючи відповідним чином структуру $\mathcal{A}$ можна одержати наступні ослаблення неперервності: майже неперервні функції, майже квазінеперервні функції, нарізно квазінеперервні функції, KC-функції, K_hC-функції, K_hK-функції, функції, які нарізно неперервні відносно змінного репера та ін.

Структуру $\mathcal{A}$ на топологічному просторі X називатимемо *узгодженою*, якщо для довільної точки $x \in X$, околу U точки x і $\mathcal{A}$-околу M точки x множина $M \cap U$ також є $\mathcal{A}$-околом точки x. Для узгодженої структури $\mathcal{A}$ на X кожний окіл точки є її $\mathcal{A}$-околом. Тому для таких структур з неперервності випливає $\mathcal{A}$-неперервність. Більше того, має місце наступний факт.

Твердження 2.6. *Нехай X та Y – топологічні простори, $\mathcal{A}$ – узгоджена структура на X, $x \in X$ і $f : X \to Y$ функція, для якої існує такий $\mathcal{A}$-окіл M точки x, що звуження $f|_M$ неперервне в точці x. Тоді f є $\mathcal{A}$-неперервною в точці x.*

3 Оточення і $\mathcal{F}$-дотичність у сильно досяжних просторах

Нехай X – топологічний простір. Для множин $A, B \subseteq X$ запис $A \mathrel{\overline{\subset}} B$ (або, точніше, $A \mathrel{\overline{\subset}}_X B$) означає, що $\overline{A} \subseteq B$. Якщо (E_n) – послідовність підмножин X, то позначатимемо $\operatorname{Lim} E_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup\limits_{k\geq n} E_k}$. Замкнена ніде не щільна підмножина E простору X називається *сильно досяжною в* X, якщо для довільної спадної послідовності відкритих множин G_n з $E \subseteq \mathrm{fr}G_n$ існують замкнені дискретні множини $S_n \subseteq G_n$, такі, що $\operatorname{Lim} S_n = E$. Простір X називається *сильно досяжним*, якщо кожна замкнена ніде не щільна підмножина $E \subseteq X$ є сильно досяжною в X.

В [3] (див. також [12]) було доведено, що кожний метризовний простір є сильно досяжним. Більше того, там показано, що кожна ніде не щільна підмножина досконало нормального простору з першою аксіомою зліченності, яка містить щільну сильно σ-дискретну підмножину, є сильно досяжною.

Нехай X – топологічний простір. Нагадаємо, що множина F називається канонічно замкненою в X, якщо $F = \overline{\mathrm{int}F}$. Систему $\mathcal{F}$ називатимемо ланцюжком, якщо $\mathcal{F}$ лінійно впорядкована включенням $\subseteq$, тобто, якщо для довільних множин $E, F \in \mathcal{F}$ виконується, що $E \subseteq F$ або $F \subseteq E$. Відкриту множину U називатимемо *оточенням* множини E, якщо $\overline{U}$ є околом множини E. Нехай $\mathcal{F}$ – ланцюжок канонічно замкнених підмножин X. Будемо казати, що відкрита множина G є *$\mathcal{F}$-дотичною* до множини E, якщо $E\cap G = \varnothing$ $\overline{G \cap F} \supseteq E\cap F$ для довільного $F \in \mathcal{F}\cup\{X\}$.

Наведемо декілька очевидних властивостей оточень і $\mathcal{F}$-дотичних множин.

Твердження 3.1. *Нехай X – топологічний простір, E – ніде не щільна підмножина X і $\mathcal{F}$ – ланцюжок канонічно замкнених підмножин X. Тоді:*

(i) якщо U – оточення множини E в X і Y – канонічно замкнений підпростір X, то $U \cap Y$ – оточення $E \cap Y$ в Y;

(ii) якщо U і V – оточення множини E, то $W = U \cap V$ також оточення множини E;

(iii) якщо U – оточення E, а G є $\mathcal{F}$-дотичною до E, то $G\cap U$ також $\mathcal{F}$-дотична до E.

Доведення. (i) Нехай $U_1 = \mathrm{int}\overline{U}$ і $G = \mathrm{int}Y$. Доведемо, що $U_1 \cap Y \subseteq \overline{U \cap G}$. Візьмемо $x \in U_1 \cap Y$ і розглянемо довільний окіл V точки x. Тоді $U_1 \cap V$ також є околом точки x. Але Y – канонічно замкнена, тому $Y = \overline{G} \ni x$. Таким чином, $U_1 \cap V \cap G \neq \varnothing$. Візьмемо $y \in U_1 \cap V \cap G$. Але $y \in U_1 \subseteq \overline{U}$ і $V \cap G$ є околом точки y. Тому $V \cap G \cap U \neq \varnothing$. Отже, $x \in \overline{G \cap U}$. А значить, $U_1\cap Y \subseteq \overline{U \cap G}$. Далі, враховуючи, що U_1 є околом E, одержуємо, що $U_1\cap Y$ є околом $E\cap Y$ в Y. Але $\overline{U \cap Y} \supseteq \overline{U \cap G} \supseteq U_1\cap Y$. Тому $\overline{U \cap Y}$ є околом $E \cap Y$ в Y.

(ii) Нехай $U_1 = \mathrm{int}\overline{U}$ і $V_1 = \mathrm{int}\overline{V}$. Тоді $W_1 = U-1 \cap V_1$ є околом E. Далі, оскільки $\overline{U} \supseteq W_1$ і $\overline{V} \supseteq W_1$, то відкриті множини $U \cap W_1$ і $V \cap W_1$ щільні в W_1. Тому їх перетин $U \cap V \cap W_1 = W \cap W_1$ також щільний в W_1. Отже, $\overline{W} \supseteq \overline{W \cap W_1} \supseteq W_1$. Тому $\overline{W}$ є околом E.

(iii) По-перше, $H \cap E \subseteq G \cap E = \varnothing$.Розглянемо деяке $F \in \mathcal{A} \cup \{X\}$ і покажемо, що $E \subseteq \overline{H \cap F}$. Оскільки G є $\mathcal{F}$-дотичною, то $\overline{G \cap F} \supseteq E \cap F$. Оскільки U є оточенням E, то з (i) маємо, що $U \cap F$ є оточенням $E \cap F$ в F. А тому нескладно перевірити, що $\overline{H \cap F} = \overline{(U \cap F) \cap (G \cap F)} \supseteq E \cap F$. □

Для з'ясування подальших властивостей сильно досяжних просторів нам буде потрібне одне допоміжне твердження.

Лема 3.2. *Нехай X – досконало нормальний простір, E – ніде не щільна в X множина і $\mathcal{F}$ – зліченний ланцюжок канонічно замкнених підмножин X. Тоді існує спадна послідовність оточень U_n множини E, така, що $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{U_n \cap F} = \overline{E \cap F}$ для довільного $F \in \mathcal{F}_+ = \mathcal{F} \cup \{X\}$.*

Доведення. Нехай $\mathcal{F}_+ = \{F_1, F_2, \dots\}$ і $E_k = \overline{E \cap F_k}$. Оскільки X – досконало нормальний, то для кожного k існує спадна послідовність відкритих множин $V_{kn} \supseteq E_k$, така, що $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{V}_{kn} = E_k$. Покладемо $W_{kn} = (\mathrm{int}F_k \cap V_{kn}) \cup (X \setminus F_k)$. Зрозуміло, що $(W_{kn})_{n=1}^{\infty}$ – спадна послідовність оточень множини E. Нехай $U_n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} W_{kn}$. Згідно з твердженням 3.1(ii) (U_n) – спадна послідовність оточень E. Крім того, за твердженням 3.1(i), $U_n \cap F_k$ є оточенням $E \cap F_k$ в F_k. Значить, зокрема, $E_k = \overline{E \cap F_k} \subseteq \overline{U_n \cap F_k}$. Тому,

$$E_k \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n \cap F_k} = \bigcap_{n=k}^{\infty} \overline{U_n \cap F_k} \subseteq \bigcap_{n=k}^{\infty} \overline{W_{kn} \cap F_k} \subseteq \bigcap_{n=k}^{\infty} \overline{V}_{kn} = E_k.$$

Таким чином, $\overline{E \cap F_k} = E_k = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{U_n \cap F_k}$ для кожного k. □

Теорема 3.3. *Нехай X – досконало нормальний сильно досяжний простір, $\mathcal{F}$ – зліченний ланцюжок канонічно замкнених підмножин X, E – ніде не щільна в X множина, G – $\mathcal{F}$-дотична до E, (G_n) – спадна послідовність $\mathcal{F}$-дотичних до E множин і $\mathcal{F}_+ = \mathcal{F} \cup \{X\}$. Тоді:*

(i) *існують замкнені дискретні множини $S_n \subseteq G_n$, такі, що $\mathrm{Lim}(S_n \cap F) = \overline{E \cap F}$ для $F \in \mathcal{F}_+$;*

(*ii*) *існують відкриті множини* $V_n \overline{\subset} G_n$, *такі, що* $\mathrm{Lim}(V_n \cap F) = \overline{E \cap F}$ *для* $F \in \mathcal{F}_+$;

(*iii*) *існує відкрита множина* $V \subseteq G$, *така, що* $\overline{V \cap F} \setminus G = \overline{E \cap F}$ *для* $F \in \mathcal{F}_+$.

Доведення. Нехай $\mathcal{F}_+ = \{F_1, F_2, \dots\}$, $E_k = \overline{E \cap F_k}$ для $k \in \mathbb{N}$. Виберемо $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ згідно з лемою 3.2. Тоді за твердженням 3.1(iii), $H_n = G_n \cap U_n$ – $\mathcal{F}$-дотичні до E. Покладемо $G_{kn} = H_n \cap \mathrm{int} F_k$. Тоді $\overline{G}_{kn} = \overline{H_n \cap F_k}$, адже F_k – канонічно замкнена. Отже, $E_k \subseteq \mathrm{fr} G_{kn}$. Тепер, користуючись сильною досяжністю X, виберемо для кожного $k \in \mathbb{N}$ послідовність замкнених дискретних множин $S_{kn} \subseteq G_{kn}$, таку, що $\mathrm{Lim}_n S_{kn} = E_k$. Покладемо тепер $S_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} S_{kn}$. Тоді $S_n \subseteq H_{kn}$. Виберемо відкриту множину $V_n \supseteq S_n$, таку, що $V_n \overline{\subset} H_n$. Оскільки $S_{kn} \subseteq S_n \cap F_k$ для $n \geq k$, то

$$\mathrm{Lim}_n (S_n \cap F_k) \supseteq \mathrm{Lim}_n S_{kn} = E_k.$$

З іншого боку,

$$\mathrm{Lim}_n (S_n \cap F_k) \subseteq \mathrm{Lim}_n (V_n \cap F_k) \subseteq \mathrm{Lim}_n (H_n \cap F_k) =$$

$$= \bigcap_n \overline{H_n \cap F_k} \subseteq \bigcap_n \overline{U_n \cap F_k} = E_k.$$

Таким чином, $\mathrm{Lim}_n (S_n \cap F_k) = \mathrm{Lim}_n (V_n \cap F_k) = E_k$ для кожного $k \in \mathbb{N}$. Отже (i) та (ii) з'ясовані. Для доведення (iii) досить покласти $G_n = G$ і скориставшись (ii) побудувати відповідні множини V_n. Тоді за V можна взяти $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V_n$. □

4 Розкладність сильно досяжних просторів

Топологічний простір X називається *розкладним*, якщо в ньому існують дві неперетинні всюди щільні множини A_1 і A_2. Якщо в просторі X існує послідовність $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ попарно неперетинних всюди щільних множин, то X називається *зліченно розкладним.*

Теорема 4.1. *Кожний сильно досяжний простір X без ізольованих точок є зліченно розкладним. Якщо, більше того, X має всюди щільну підмножину першої категорії, то існує послідовність $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ попарно неперетинних всюди щільних σ-дискретних підмножин X.*

Доведення. Нехай $\mathcal{S}$ – це система всіх множин $S \subseteq X$, які подаються у вигляді об'єднаннь диз'юнктних послідовностей σ-дискретних множин S_n, таких, що $S_n \subseteq \overline{S}_{n+1}$ для довільного n. Доведемо, що для довільної відкритої множини U і множини першої категорії $E \subseteq U$ існує множина $S = S(E,U) \in \mathcal{S}$, така, що $S \subseteq U$ і $\overline{S} \supseteq E$. Нехай $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, де множини E_n ніде не щільні. Зараз ми індуктивно визначимо послідовність попарно неперетинних ніде не щільних σ-дискретних множин $S_n \subseteq U$, таких, що $S_n \subseteq \overline{S}_{n+1}$ і $E_n \subseteq \overline{S}_n$ для $n \in \mathbb{N}$. Користуючись сильною досяжністю $F_1 = \overline{E}_1$, побудуємо послідовність замкнених дискретних множин $S_{1n} \subseteq U \setminus F_1$, таку, що $\operatorname{Lim} S_{1n} = F_1$. Покладемо $S_1 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_{1n}$. Зрозуміло, що S_1 – ніде не щільна σ-дискретна множина і $\overline{S}_1 \supseteq F_1 \supseteq E_1$. Покладаємо $F_2 = \overline{E_2 \cup S_1}$. Проробивши з F_2 те ж саме, що і з F_1 одержимо ніде не щільну σ-дискретну множину $S_2 \subseteq U \setminus F_2$, таку, що $\overline{S_2} \supseteq F_1 \supseteq E_2 \cup S_1$. Продовжуючи далі цей процес, отримаємо шукану послідовність (S_n). Тоді $S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n \in \mathcal{S}$, $S \subseteq U$, і $\overline{S} \supseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{S}_n \supseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = E$.

Припустимо спочатку, що X має всюди щільну множину E першої категорії. Нехай $S = S(E,X)$. Оскільки $S \in \mathcal{S}$, то виберемо таку диз'юнктну послідовність σ-дискретних множин S_n, що $S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$ і $S_n \subseteq \overline{S}_{n+1}$. Розіб'ємо $\mathbb{N}$ на послідовність нескінченних множин N_k і покладемо $A_k = \bigcup\limits_{n \in N_k} S_n$. Тоді, оскільки $S_n \subseteq \overline{S}_{n+1}$, то $\overline{A}_k \supseteq S$. А тому $E \subseteq \overline{S} \subseteq \overline{A}_k$ для кожного $k \in \mathbb{N}$. Отже, (A_k) – диз'юнктна послідовність всюди щільних σ-дискретних множин.

Доведемо тепер, що кожний сильно досяжний простір X без ізольованих точок є зліченно розкладним. За лемою Цорна в системі $\mathcal{S}$ існує максимальна диз'юнктна підсистема $\mathcal{S}_0$. Доведемо, що $\overline{\bigcup \mathcal{S}_0} = X$. Нехай це не так і $U = X \setminus \overline{\bigcup \mathcal{S}_0} \neq \varnothing$. Візьмемо $x \in U$ і покладемо $S = S(\{x\},U) \in \mathcal{S}$. Тоді $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_0 \cup \{S\}$ – диз'юнктна підсистема $\mathcal{S}$, причому $\mathcal{S}_1 \supset \mathcal{S}_0$. Це суперечить максимальності системи $\mathcal{S}_0$. Нехай, для зручності, $\mathcal{S}_0 = \{S_t : t \in T\}$, причому $S_{t'} \neq S_{t''}$ при $t' \neq t''$. Оскільки $S_t \in \mathcal{S}$, то існує диз'юнктна послідовність σ-дискретних множин $S_{t,n}$, така, що $S_t = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_{t,n}$ і $S_{t,n} \subseteq \overline{S}_{t,n+1}$. Знову розіб'ємо $\mathbb{N}$ на послідовність нескінченних множин N_k і покладемо $A_k = \bigcup\limits_{t \in T} \bigcup\limits_{n \in N_k} S_{t,n}$. Тоді $\overline{A}_k \supseteq \bigcup\limits_{t \in T} \bigcup\limits_{n \in N_k} \overline{S}_{t,n} \supseteq \bigcup \mathcal{S}_0$ і (A_k) – диз'юнктна. Отже, (A_k) – шукана послідовність. $\square$

Наступне твердження уточнює попередню теорему у випадку просторів першої категорії.

Твердження 4.2. *Нехай X – сильно досяжний, Ω – відкрита в X і $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ – зростаюча послідовність замкнених ніде не щільних множин, така, що $\Omega \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Тоді існують неперетинні σ-дискретні щільні в Ω множини S' і $S'' \subseteq \Omega$, такі, що для кожного n множини $S' \cap F_n$ і $S'' \cap F_n$ замкнені і дискретні.*

Доведення. Будемо вважати, що $F_n \subseteq \overline{\Omega}$. Розглянемо спадну послідовність відкритих множин $G_{1n} = \Omega \setminus F_{1+n}$. Користуючись сильною досяжністю множини F_1, виберемо замкнені дискретні множини $S_{1n} \subseteq G_{1n}$, такі, щоб $\operatorname{Lim} S_{1n} = F_1$. Покладемо $G_{2n} = \Omega \setminus (F_{2+n} \cup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_{1n})$. За сильною досяжністю F_2 виберемо замкнені дискретні множини $S_{2n} \subseteq G_{2n}$ так, щоб $\operatorname{Lim} S_{2n} = F_2$. Продовжуючи далі аналогічним чином, одержимо для кожного k послідовність відкритих множин $G_{kn} = \Omega \setminus (F_{k+n} \cup \bigcup\limits_{i=1}^{k-1} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_{in})$ і замкнених дискретних множин $S_{kn} \subseteq G_{kn}$, таку, що $\operatorname{Lim}\limits_{n} S_{kn} = F_k$. Тоді $S_{kn} \cap S_{im} = \varnothing$, для $k \neq i$ та довільних n і m. Крім того, $S_{kn} \cap F_{k+n} = \varnothing$ для $k, n \in \mathbb{N}$, а значить, $S_{kn} \cap F_m = \varnothing$ якщо $k + n \geq m$. Покладемо $S = \bigcup\limits_{k,n=1}^{\infty} S_{kn}$. Тоді $S \cap F_m \subseteq \bigcup\limits_{k+n \leq m} S_{kn}$. Отже, $S \cap F_m$ – замкнена і дискретна. Визначимо нарешті $S' = \bigcup\limits_{k,n=1}^{\infty} S_{2k,n}$ і $S'' = \bigcup\limits_{k,n=1}^{\infty} S_{2k-1,n}$. Покажемо, що S' і S'' – шукані. По-перше, оскільки множини $S' \cap F_m$ і $S'' \cap F_m$ містяться в $S \cap F_m$, то вони замкнені і дискретні для кожного m. Крім того, $\overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_{k,n}} \supseteq F_k$, адже $\operatorname{Lim}\limits_{n} S_{k,n} = F_k$. Тому $\overline{S'} \supseteq \overline{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_{2k,n}} \supseteq \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_{2k} \supseteq \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k \supseteq \Omega$. Аналогічно, $\overline{S''} \supseteq \Omega$. $\square$

5 Квазінеперервність суми ряду

Почнемо з одного допоміжного твердження.

Лема 5.1. *Нехай X – досконало нормальний сильно досяжний простір, Ω – відкрита множина без ізольованих точок, $\mathcal{F}$ – зліченний ланцюжок* *канонічно замкнених в X множин, E – ніде не щільна в X, $E' = E \cap \Omega$ і G – $\mathcal{F}$-дотична до E. Тоді існують неперетинні відкриті множини $U', U \subseteq G$, такі, що U – $\mathcal{F}$-дотична до E і $\overline{U'} \supseteq E'$.*

Доведення. Оскільки $E' \subseteq \mathrm{fr}(\Omega \cap G)$, то, користуючись сильною досяжність $\overline{E'}$, побудуємо такі замкнені дискретні множини $S'_n \subseteq \Omega \cap G$, що $\mathrm{Lim}\, S'_n = \overline{E'}$. Тоді $S' = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S'_n$ – дискретна відносно замкнена в G і $\overline{S'} \supseteq E'$. Крім того, оскільки Ω не містить ізольованих точок, то S' – ніде не щільна. Отже, множина $G' = G \setminus S'$ $\mathcal{F}$-дотична до E. Значить, згідно з теоремою 3.3(iii) існує відкрита множина $U \subseteq G'$, така, що $\overline{U} \setminus G' = \overline{E}$ і $\overline{U \cap F} \setminus G' = \overline{E \cap F}$ для $F \in \mathcal{F}$. Тоді U – $\mathcal{F}$-дотична до E і $\overline{U} \cap S' = \varnothing$. Залишилося покласти $U' = G \setminus \overline{U}$. □

При побудові квазінеперервних функцій як правило виникають труднощі, які пов'язані з тим, що сума квазінеперервних функцій не зобов'язана бути квазінеперервною. Наступна теорема, дозволяє автоматично отримувати квазінеперервність функцій, які подаються у вигляді суми ряду функцій.

Теорема 5.2. *Нехай X – досконало нормальний сильно досяжний простір, Ω – відкрита в X множина без ізольованих точок, $\mathcal{F}$ – злічений ланцюжок канонічно замкнених підмножин X, $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність ніде не щільних множин в X, така, що $\overline{E}_n \cap E_m = \varnothing$ при $m > n$ і $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність відкритих множин, така, що G_n – $\mathcal{F}$-дотична до E_n для довільного $n \in \mathbb{N}$ і $\overline{G_n \cap G_m} \cap \overline{E}_n = \varnothing$ при $m > n$. Тоді існує послідовність відкритих множин $U_n \subseteq G_n$, така, що U_n – $\mathcal{F}$-дотична до E_n і для довільної послідовності функцій $f_n : X \to \mathbb{R}_+$ таких, що $\mathrm{supp} f_n \subseteq U_n$ і $D(f_n) \subseteq \overline{E}_n$ і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ рівномірно збіжний, функція $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ – квазінеперервна на Ω.*

Доведення. По-перше, без обмеження загальності можна вважати, що $G_m \cap \overline{E}_n = \varnothing$, $m \geq n$, бо якщо це не так, то замість множин G_m можна розглянути $G'_m = G_m \setminus \bigcup\limits_{n \leq m} \overline{E}_n$. Нехай $E'_n = E_n \cap \Omega$. Згідно з лемою 5.1, для кожного $n \in \mathbb{N}$ існують неперетинні відкриті множини $U_n, U'_n \subseteq G_n$, такі, що U_n – $\mathcal{F}$-дотична до E_n і $\overline{U'_n} \supseteq E'_n$. Покажемо, що (U_n) – шукана.

Розглянемо послідовність функцій $f_n : X \to \mathbb{R}_+$, таких, що $\mathrm{supp} f_n \subseteq U_n$ і $D(f_n) \subseteq \overline{E}_n$. досить перевірити, що для кожного $m \in \mathbb{N}$. функція $\sum\limits_{k=1}^{m} f_k$ квазінеперервна на Ω

Візьмемо $x_0 \in \Omega$. Оскільки $D(f_k) \subseteq \overline{E}_k$, то досить розглянути випадок $x_0 \in \bigcup\limits_{k=1}^{m} \overline{E}_k$. Нехай n – найменший номер, для якого $x_0 \in \overline{E}_n$. Тоді функції f_k неперервні в точці x_0 при $k < n$. Отже, досить перевірити квазінеперервність в точці x_0 функцій $f = \sum\limits_{k=n}^{m} f_k$. Оскільки $\mathrm{supp} f_k \subseteq U_k \subseteq G_k$ і $G_k \cap \overline{E}_n = \varnothing$ для $k \geq n$, то $f(x_0) = 0$. Покладемо $H = U'_n \setminus \bigcup\limits_{k=n+1}^{m} \overline{G}_k$. По-перше, оскільки $x_0 \in \Omega \cap \overline{E}_n \subseteq \overline{E'_n}$, то $x_0 \in \overline{U'_n}$. По-друге, оскільки $U'_n \subseteq G_n$ і $\overline{G_n \cap G_k} \cap \overline{E}_n = \varnothing$, для $k > n$, то $x_0 \notin \overline{U'_n \cap \overline{G}_k}$, для $k > n$. Таким чином, $x_0 \in \overline{U'_n \setminus \overline{G}_k}$, для $k > n$. Отже, $x_0 \in \overline{H}$. Далі, оскільки $f_n(x) = 0$ на U'_n і $f_k(x) = 0$ поза G_k, $k > n$, то $f(x) = 0$ на H. Це і доводить квазінеперервність функції f в точці x_0. □

6 Побудова ω-первісних квазінеперервних функцій

Лема 6.1. *Нехай X – досконало нормальний простір і $f : X \to \mathbb{R}$. Тоді*

(i) якщо $\mathrm{supp} f$ *замкнений і дискретний, то f є функцією першого класу Бера;*

(ii) якщо $\mathrm{supp} f$ *σ-дискретний, то f є функцією другого класу Бера.*

Доведення. (i) Нехай $S = \mathrm{supp} f$. Розглянемо спадну послідовність відкритих множин U_n, для якої $S = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n$. Оскільки S дискретна, то $f|_S$ – неперервна. Нехай $F_n = S \cup (X \setminus U_n)$. Покладемо $g_n(x) = f(x)$ при $x \in S$ і $g_n(x) = 0$ при $x \in X \setminus U_n$. За теоремою Тітце-Урисона [15], існує неперервне продовження $f_n : X \to \mathbb{R}$ неперервної функції $g_n : F_n \to \mathbb{R}$. Ясно, що тоді $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ при $x \in X$. Отже, f є функцією першого класу Бера

(ii). Оскільки $S = \mathrm{supp} f$ – σ-дискретний і кожна дискретна підмножина досконало нормального простору подається у вигляді зліченного об'єднання замкнених дискретних множин, то існує зростаюча послідовність замкнених дискретних множин S_n, така, що $S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$. Покладемо $f_n(x) = f(x)$ при $x \in S_n$ і $f_n(x) = 0$ при $x \in X \setminus S_n$. Оскільки $\mathrm{supp} f_n = S_n$, то з (i) випливає, що f_n належать до першого класу Бера. Але $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ при $x \in X$. Тому f – функція другого класу Бера. □

Теорема 6.2. *Нехай X – сильно досяжний простір і $g : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ – квазінеперервна напівнеперервна зверху функція, така, що* $\mathrm{supp} g$ *не містить ізольованих точок простору X. Тоді існує функція $f : X \to \mathbb{R}_+$, така, що $f \le g_*$, $f_* = 0$ і $f^* = g$. Якщо, крім того, простір X досконало нормальний і носій* $\mathrm{supp} g$ *містить щільну в ньому множину першої категорії в X, то f буде функцією другого класу Бера.*

Доведення. Нехай $\Omega = \mathrm{supp} g_*$. Оскільки сильна досяжність успадковується відкритими підпросторами, то, використавши для простору Ω теорему 4.1, побудуємо диз'юнктну послідовність $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ щільних в Ω множин $A_n \subseteq \Omega$, причому, якщо $\mathrm{supp} g$ (а значить, і Ω) містить щільну множину першої категорії, то множини A_n можна вибрати σ-дискретними. Покладемо $f(x) = \min\{n, g_*(x)\}$ на A_n і $f(x) = 0$ на $X \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Тоді $f \le g_*$ (якщо крім того A_n – σ-дискретні і X – досконало нормальний, то за лемою 6.1 f буде функцією другого класу Бера). Розглянемо множини $X_n = A_n \cup (X \setminus \Omega)$. Зрозуміло, що $\overline{X}_n = X$ і $f(x) = \min\{n, g_*(x)\}$ на X_n. Зокрема, $f(x) = 0$ на X_0. Тому $f_* = 0$. Крім того, оскільки $f \le g_* \le g$, то $f^* \le g$. Таким чином, залишилось довести, що $f^* \ge g$. З [13, твердження 4.3] випливає, що g_* – квазінеперервна а з [13, твердження 3.3, 4.2] маємо, що $g = (g_*)^*$. Отже, досить показати, що $f^* \ge g_*$. Візьмемо $x_0 \in X$, $\alpha < g_*(x)$ і U – окіл x_0. Оскільки g_* – квазінеперервна, то існує відкрита непорожня множина $V \subseteq U$, така, що $g_*(x) > \alpha$ на V. Візьмемо $n > \alpha$ і $x \in X_n \cap V$. Тоді $f(x) = \min\{n, g_*(x)\} > \alpha$. Отже, $\sup f(U) \ge f(x) > \alpha$. Тому $f^*(x_0) \ge \alpha$. Спрямувавши тепер $\alpha \to g_*(x_0)$, одержимо, що $f^*(x_0) \ge g_*(x_0)$. □

Приступимо до побудови $\mathcal{A}$-неперервних ω-первісних. Почнемо з одного простого наслідку теореми Гана-Дьєдонне-Тонга-Катетова [15, с.105].

Лема 6.3. *Нехай X – нормальний топологічний простір, F – його замкнений підпростір, $h : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ – напівнеперервна знизу функція, $\tilde{f} : F \to \mathbb{R}_+$ – неперервна функція, причому $\tilde{f}(x) \le h(x)$ на F. Тоді існує неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}_+$, така, що $f|_F = \tilde{f}$ і $f \le h$.*

Доведення. Покладемо $g(x) = \tilde{f}(x)$ на F і $g(x) = 0$ на $X \setminus F$. Оскільки F – замкнена, а $\tilde{f}$ – неперервна, то g – напівнеперервна зверху, причому $g \le h$. Тоді, за теоремою Гана-Дьєдонне-Тонга-Катетова [15, с.105], існує неперервна функція $f_1 : X \to \overline{\mathbb{R}}$, така, що $g \le f_1 \le h$. Далі, згідно з теоремою Тітце-Урисона [15, с.116], існує неперервна функція $f_2 : X \to$

$\mathbb{R}_+$ така, що $f_2|_F = \tilde{f}$. Покладемо $f(x) = \min\{f_1(x), f_2(x)\}$. Тоді $f \le f_1 \le h$. Крім того, оскільки $g \le f_1$ і $f_2(x) = \tilde{f}(x) = g(x)$ на F, то $f_2(x) \le f_1(x)$ на F. Тому $f(x) = f_2(x) = \tilde{f}(x)$ на F. □

Теорема 6.4. *Нехай X – нормальний сильно досяжний простір, $\mathcal{A}$ – узгоджена структура на X, $g : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ – напівнеперервна зверху квазінеперервна функція, носій* supp$g$ *якої σ-$\mathcal{A}$-мізерний. Тоді існує $\mathcal{A}$-неперервна функція першого класу Бера $f : X \to \mathbb{R}_+$, така, що $f \le g_*$, $f_* = 0$ і $f^* = g$.*

Доведення. Нехай supp$g = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, де E_n – навхрест ніде не щільні. Розглянемо для кожного $n \in \mathbb{N}$ ніде не щільний $\mathcal{A}$-окіл M_n множини E_n. Покладемо $F_0 = \varnothing$ і $F_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{M}_k$, для $n > 0$. Застосувавши для множини $\Omega = \mathrm{supp} g_*$ і послідовності (F_n) теорему 4.2, одержимо неперетинні щільні в Ω множини S' і S'', такі, що $S' \cap F_n$ і $S'' \cap F_n$ – замкнені і дискретні. Покладемо $S'_0 = S''_0 = \varnothing$ і $S'_n = S' \cap (F_n \setminus F_{n-1})$ і $S''_n = S'' \cap (F_n \setminus F_{n-1})$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тоді S'_n і S''_n – замкнені і дискретні, причому $S' = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S'_n$ і $S'' = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S''_n$.

Зараз ми побудуємо послідовність неперервних функцій $f_n : X \to \mathbb{R}_+$, таких, що $f_{n+1}(x) = f_n(x)$ на F_n, $f_n(x) \le g_*(x)$ на F_n, $f_n(x) = 0$ на S'_n і $f_n(x) = \min\{n, g_*(x)\}$ на S''_n. Оскільки $F_0 = S'_0 = S''_0 = \varnothing$, то можна покласти, наприклад, $f_0 = 0$. Припустимо, що вже визначена функція f_n. Нехай $F = F_n \cup S'_{n+1} \cup S''_{n+1}$. Покладемо $\tilde{f}(x) = f_n(x)$ на F_n, $\tilde{f}(x) = 0$ на S'_{n+1} і $\tilde{f}(x) = \min\{n+1, g_*(x)\}$ на S''_{n+1}. Оскільки S'_n і S''_n – замкнені і дискретні, то $\tilde{f}$ неперервна на F. За індуктивним припущенням $\tilde{f}(x) \le g_*(x)$ на Y. Тому, згідно з лемою 6.3, існує неперервна функція $f_{n+1} : X \to \mathbb{R}_+$, така, що $f_{n+1}|_F = \tilde{f}$ і $f_{n+1} \le g_*$. Зрозуміло, що f_{n+1} – шукана.

Покладемо тепер $f(x) = f_n(x)$ на F_n і $f(x) = 0$ на $X \setminus \Omega$. Зрозуміло, що $f : X \to \mathbb{R}_+$ – коректно визначена і $f \le g_*$. Нехай $X_0 = (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S'_n) \cup (X \setminus \Omega)$ і $X_n = (\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} S''_k) \cup (X \setminus \Omega)$, для $n > 0$. Зрозуміло, що $\overline{X}_n = X$, $f(x) = 0$ на X_0 і $f(x) \ge \min\{n, g_*(x)\}$ на X_n при $n > 0$. Тоді $f_* = 0$. Крім того, оскільки $f \le g_* \le g$, то $f^* \le g$. Доведемо, що $f^* \ge g_*$. Візьмемо $x_0 \in X$, $\alpha < g_*(x_0)$ і U – окіл x_0. З [13, твердження 4.3] маємо, що g_* – квазінеперервна. Тому існує відкрита непорожня множина $V \subseteq U$, така, що $g_*(x) > \alpha$ на V. Візьмемо номер $n > \alpha$ і виберемо деяку точку $x \in X_n \cap V$. Тоді $f(x) \geq \min\{n, g_*(x)\} > \alpha$. Тому, $f^*(x_0) \geq g_*(x_0)$. Отже, $f^* \geq g_*$. Залишилось врахувати рівність $(g_*)^* = g$, яка випливає з [13, твердження 3.3 і 4.2]

Для доведення $\mathcal{A}$-неперервності скористаємось твердженням 2.6. Візьмемо $x_0 \in X$. Якщо $x_0 \notin \mathrm{supp} g = \mathrm{supp}\omega_f$, то f неперервна в точці x_0. Якщо ж $x_0 \in \mathrm{supp} g$, то $x_0 \in E_n$ для деякого n. Але $E_n \subseteq M_n \subseteq F_n$. Тому звуження $f|_{M_n} = f_n|_{M_n}$ – неперервне. Крім того, M_n є $\mathcal{A}$-околом точки x_0. Отже, за твердженням 2.6, функція f є $\mathcal{A}$-неперервною в точці x_0.

Доведемо, що f – першого класу Бера. Візьмемо $x \in X$. Якщо $x \in F_m$ для деякого $m \in \mathbb{N}$, то $f_n(x) = f(x)$ для $x \in F_n$ і $n \geq m$. Крім того, якщо $x \notin \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m \supseteq \mathrm{supp} g \supseteq \mathrm{supp} g_*$, то $f_n(x) = f(x) = 0$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для кожного $x \in X$. □

7 Побудова ω-первісних функцій з ніде не щільним носієм у сильно досяжних просторах

Основним технічним інструментом у нашому підході до побудови ω-первісних є поняття карти і породженого нею рельєфу, яке введене і вивчене в першій частині даної статті [13]. Почнемо з одного узагальнення леми 3.2

Лема 7.1. *Нехай X – досконало нормальний простір, T – зліченна підмножина $\mathbb{R}$, $(E(t) : t \in T)$ – спадна сім'я ніде не щільних підмножин X, $\mathcal{F}$ – зліченний ланцюжок канонічно замкнених підмножин X і $\mathcal{F}_+ = \mathcal{F} \cup \{X\}$. Тоді існує спадна відносно $t \in T$ і $n \in \mathbb{N}$ сім'я $(U_n(t) : n \in \mathbb{N}, t \in T)$ оточень $U_n(t)$ множин $E(t)$, така, що $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{U_n(t) \cap F} = \overline{E(t) \cap F}$, для $t \in T$ і $F \in \mathcal{F}_+$.*

Доведення. Згідно з лемою 3.2, для кожного $t \in T$ існує спадна послідовність оточень $V_n(t)$ множини $E(t)$, така, що $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{V_n(t) \cap F} = \overline{E(t) \cap F}$ для $F \in \mathcal{F}_+$. Нехай $T = \{t_1, t_2, \dots\}$, причому $t_i \neq t_j$, якщо $i \neq j$. Покладемо $U_n(t_1) = V_n(t_1)$, $n \in \mathbb{N}$. Припустимо, що для деякого $k > 1$ уже визначені множини $U_n(t)$, для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $t \in T_k = \{t_1, t_2, \dots, t_{k-1}\}$, причому так, що виконуються потрібні властивості. Визначимо $U_n(t_k)$. Покладемо $T^+ = \{t \in T_k : t > t_k\}$ і $T^- = \{t \in T_k : t < t_k\}$.

Нехай $t^+ = \min T^+$ якщо $T^+ \neq \varnothing$ і $t^- = \max T^-$ якщо $T^- \neq \varnothing$. Тоді $t^+, t^- \in T_k$, причому $t^- < t_k < t^+$. Тому $U_n(t^-) \supseteq U_n(t^+)$ і $E(t^-) \supseteq$

$E(t_k)\supseteq E(t^+)$. Покладемо $U_n^+=U_n(t^+)\cup V_n(t_k)$ і $U_n^-=U_n(t^-)\cap V_n(t_k)$. Тоді за твердженням 3.1(ii) маємо, що U_n^+ і U_n^- – оточення множини $E(t_k)$. Тому, врахувавши твердження 3.1(i), одержимо, що $\overline{U_n^+\cap F}\supseteq\overline{E(t_k)\cap F}$ і $\overline{U_n^-\cap F}\supseteq\overline{E(t_k)\cap F}$ для $F\in\mathcal{F}_+$. Крім того, для довільного $F\in\mathcal{F}_+$ маємо, що

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{U_n^-\cap F}\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\overline{U_n(t^-)\cap F}\cap\overline{V_n(t_k)\cap F}\right)=$$
$$=\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{U_n(t^-)\cap F}\right)\cap\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{V_n(t_k)\cap F}\right)=$$
$$=\overline{E(t^-)\cap F}\cap\overline{E(t_k)\cap F}=\overline{E(t_k)\cap F}.$$

А також, враховуючи, що послідовності $(U_n(t^+))$ і $(V_n(t_k))$ спадні, одержимо

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{U_n^+\cap F}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\overline{U_n(t^+)\cap F}\cup\overline{V_n(t_k)\cap F}\right)=$$
$$=\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{U_n(t^+)\cap F}\right)\cup\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{V_n(t_k)\cap F}\right)=$$
$$=\overline{E(t^+)\cap F}\cup\overline{E(t_k)\cap F}=\overline{E(t_k)\cap F}.$$

Отже, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\overline{U_n^-\cap F}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\overline{U_n^+\cap F}=\overline{E(t_k)\cap F}$ для $F\in\mathcal{F}_+$. Тепер, якщо $T^+=\varnothing$, то покладемо $U_n(t_k)=U_n^-$, а якщо $T^-=\varnothing$, то $U_n(t_k)=U_n^+$. Якщо ж $T^+\neq\varnothing$ і $T^-\neq\varnothing$, то покладаємо $U_n(t_k)=U_n(t^+)\cup U_n^-$. В цьому випадку знову матимемо, що $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\overline{U_n(t_k)\cap F}=\overline{E(t_k)\cap F}$, для $F\in\mathcal{F}_+$, адже послідовності множин $U_n(t^+)$ і U_n^- спадають. Далі, оскільки $U_n(t^+)\subseteq U_n(t^-)$ і $U_n^-\subseteq U_n(t^-)$, то $U_n(t_k)\subseteq U_n(t^-)$, якщо $T^-\neq\varnothing$. Крім того, $U_n(t^+)\subseteq U_n(t_k)$, якщо $T^+\neq\varnothing$. Таким чином, $U_n(t_k)$ – шукане оточення $E(t_k)$. □

Лема 7.2. *Нехай X – досконало нормальний сильно досяжний простір, T – зліченна підмножина $\mathbb{R}$, $(E(t):t\in T)$ – спадна сім'я підмножин X, така, що $E=\bigcup\limits_{t\in T}E(t)$ – ніде не щільна, $\mathcal{F}$ – зліченний ланцюжок канонічно замкнених підмножин X, $\mathcal{F}_+=\mathcal{F}\cup\{X\}$ і G – $\mathcal{F}$-дотична до E. Тоді існує спадна відносно $\overline{\subset}_G$ сім'я $(G(t):t\in T)$ відкритих множин $G(t)\subseteq G$, така, що $\overline{G(t)\cap F}\setminus G=\overline{E(t)\cap F}$ для $F\in\mathcal{F}_+$.*

Доведення. Вибиремо сім'ю $(U_n(t) : t \in T, n \in \mathbb{N})$ згідно з лемою 7.1. Тоді за твердженням 3.1(iii), $U_n(t) \cap G$ $\mathcal{F}$-дотична до $E(t)$ для $t \in T$ і $n \in \mathbb{N}$. Множини $G(t)$ будуватимемо у вигляді $G(t) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n(t)$, де $G_n(t)$ – відкриті, $G_n(t) \mathrel{\overline{\subset}} U_n(t) \cap G$ і $\operatorname{Lim}(G_n(t) \cap F) \supseteq E(t) \cap F$ для $F \in \mathcal{F}_+$. Зауважимо, що тоді $\operatorname{Lim}(G_n(t) \cap F) \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{U_n(t) \cap F} = \overline{E(t) \cap F}$, а значить, $\operatorname{Lim}(G_n(t) \cap F) = \overline{E(t) \cap F}$ для $F \in \mathcal{F}_+$. Тому $\overline{G(t) \cap F} \setminus G = \overline{E(t) \cap F}$, для $F \in \mathcal{F}_+$. Таким чином, залишилось підібрати $G_n(t)$ так, щоб сім'я $(G(t) : t \in T)$ спадала відносно $\mathrel{\overline{\subset}}_G$. Нехай $T = \{t_1, t_2, \dots\}$, причому $t_i \neq t_j$ при $i \neq j$.

На першому кроці, користуючись теоремою 3.3(ii), вибиремо відкриті множини $G_n(t_1) \mathrel{\overline{\subset}} U_n(t) \cap G$ так, що $\operatorname{Lim} G_n(t_1) \cap F = \overline{E(t_1) \cap F}$ для $F \in \mathcal{F}_+$. Припустимо, що для деякого $k > 1$ уже визначені $G_n(t)$ для $t \in T_k = \{t_1, t_2, \dots, t_{k-1}\}$, причому так, що виконуються відповідні властивості і крім того $G_n(t') \mathrel{\overline{\subset}} G(t'')$, якщо $t' > t''$.

Визначимо $G_n(t_k)$. Нехай $T^+ = \{t \in T_k : t > t_k\}$ і $T^- = \{t \in T_k : t < t_k\}$. Покладемо $G_n^+ = G_n(t^+)$, де $t^+ = \min T^+$, якщо $T^+ \neq \varnothing$ і $G_n^+ = \varnothing$ інакше. Крім того, покладемо $G^- = G(t^-)$, де $t^- = \max T^-$, якщо $T^- \neq \varnothing$ і $G^- = G$ інакше. Тоді, оскільки $G_n(t^+) \mathrel{\overline{\subset}} U_n(t^+) \subseteq U_n(t_k)$ і $G_n(t^+) \mathrel{\overline{\subset}} G(t^-)$, то $G_n^+ \mathrel{\overline{\subset}} U_n(t_k) \cap G^-$. Вибиремо, згідно з теоремою 3.3(ii), відкриті множини $V_n \mathrel{\overline{\subset}} U_n(t_k) \cap G^-$ так, щоб $\operatorname{Lim}(V_n \cap F) = \overline{E(t_k) \cap F}$ для $F \in \mathcal{F}_+$. Нехай $W_n = G_n^+ \cup V_n$. Тоді $W_n \mathrel{\overline{\subset}} U_n(t_k) \cap G^-$. Візьмемо тепер таку відкриту множину $G_n(t_k)$, що $W_n \mathrel{\overline{\subset}} G_n(t_k) \mathrel{\overline{\subset}} U_n(t_k) \cap G^-$. Зрозуміло, що $G_n(t_k)$ – шукана. □

Теорема 7.3. *Нехай X – досконало нормальний сильно досяжний простір. $\mathcal{F}$ – зліченний ланцюжок канонічно замкнених підмножин, $g : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $M = \sup g$, G – $\mathcal{F}$-дотична до $\operatorname{supp} g$. Тоді існує функція $f : X \to [0, M)$, така, що $\operatorname{supp} f \subseteq G \subseteq C(f)$, $\omega_f = g^*$ і $(f|_F)^*(x) = (g|_F)^*(x)$ для $F \in \mathcal{F}$ і $x \in D(f) \cap F$.*

Доведення. Покажемо спочатку, що досить побудувати $f : X \to [0, M]$ з відповідними властивостями. Справді, нехай така функція f уже побудована. Розглянемо таку неперервну функцію $h : X \to [0, M]$, що $h^{-1(M)} = \overline{\operatorname{supp} g}$. Тоді функція $f' = \inf\{f, h\}$ – шукана.

Нехай $E_t = g^{-1}([t, +\infty])$ для $t \in \mathbb{Q}$ і $T = \mathbb{Q} \cap (0, M)$. Ясно, що функція

g є рельєфом карти $\varepsilon = (E_t)_{t\in\mathbb{Q}}$ (див. [13]). За лемою 7.2, існує спадна відносно $\overline{\subset}_G$ сім'я $(G_t : t \in T)$ така, що $G_t \subseteq G$ і $\overline{G_t \cap F} \setminus G = \overline{E_t \cap F}$ для $F \in \mathcal{F}_+ = \mathcal{F} \cup \{X\}$ і $t \in T$. Покладаючи $G_t = \varnothing$ при $t \geq M$ $G_0 = G$ і $G_t = X$ при $t < 0$ ми визначимо деяку карту $\gamma = (G_t)_{t\in\mathbb{Q}}$. Нехай $f = r_\gamma$ (тобто функція f є рельєфом карти γ).

Покажемо, що f – шукана. Оскільки $0 \lesssim \gamma \lesssim M$, то $0 \leq f \leq M$. Зафіксуємо деяке $F \in \mathcal{F}^+ = \mathcal{F} \cup \{X\}$. Карти $\varphi_F = \left(\overline{E_t \cap F}\right)_{t\in\mathbb{Q}}$ і $\gamma_F = \left(G_t \cap F\right)_{t\in\mathbb{Q}}$ задовольняють умови [13, теорема 3.5] на просторі F. Тому r_{γ_F} є ω-первісною функції r_{φ_F}. Але з [13, твердження 3.3] маємо, що $r_{\varphi_F} = (g|_F)^*$. Крім того, очевидно, що $r_{\gamma_F} = g|_F$. Отже, $\omega_{f|_F} = (g|_F)^*$ для кожного $F \in \mathcal{F}^+$. Зокрема, взявши $F = X$, матимемо, що $\omega_f = g^*$. Але $\mathrm{supp} g^* \subseteq \overline{\mathrm{supp} g} \subseteq X \setminus G$. Отже, $\omega_f(x) = 0$ на G. Значить, $G \subseteq C(f)$. Далі, оскільки $G_0 = G$, то $\mathrm{supp} f \subseteq G$. І нарешті, якщо $x \in D(f) \cap F$ для деякого $F \in \mathcal{F}$, то $x \notin G$, а значить, $(f|_F)_*(x) = f(x) = 0$ і $(g|_F)_*(x) = g(x) = 0$. Тому $(f|_F)^*(x) = \omega_{f|_F}(x) = \omega_{g|_F}(x) = (g|_F)_*(x)$. □

8 Завершальна побудова ω-первісних у сильно досяжних просторах

Лема 8.1. *Нехай X – досконало нормальний сильно досяжний простір, $\mathcal{F}$ – зліченний ланцюжок канонічно замкнених підмножин X, $(E_n)_{n=0}^\infty$ – послідовність ніде не щільних підмножин X, таких, що $\overline{E}_n \cap E_m = \varnothing$, для $n < m$. Тоді існує послідовність $(G_n)_{n=0}^\infty$ таких відкритих множин, що G_n – $\mathcal{F}$-дотична до E_n і $\overline{G_n \cap G_m} \cap \overline{E}_n = \varnothing$ для $n < m$.*

Доведення. Нехай $F_n = \bigcup\limits_{k=0}^{n} \overline{E}_k$ і $G_{0m} = X \setminus F_m$. Тоді G_{0m} – $\mathcal{F}$-дотичні до $\overline{E}_0$, бо $\overline{G}_{0m} = X$. Згідно з теоремою 3.3(ii), існують відкриті множини $V_{0m} \overline{\subset} G_{0m}$, такі, що $\mathrm{Lim}(V_{0m} \cap F) = \overline{E_0 \cap F}$ для $F \in \mathcal{F}_+ = \mathcal{F} \cup \{X\}$. Припустимо, що для деякого $k > 0$ уже побудовані відкриті множини V_{nm} при $n < k$, $m \in \mathbb{N}$, причому

$$\overline{V}_{nm} \cap F_{n+m} = \varnothing; \tag{1}$$

$$\mathop{\mathrm{Lim}}_{m}(V_{nm} \cap F) = \overline{E_n \cap F} \qquad F \in \mathcal{F}_+; \tag{2}$$

$$U_{nm} \cap U_{ij} = \varnothing \qquad i < n \leq i + j. \tag{3}$$

Визначимо V_{km}. Нехай $\mathcal{V}_k = \{V_{ij} : i < k \leq i + j\}$ і $V_k = \bigcup \mathcal{V}_k$. Використавши (2) з $F = X$ та $i < k$ одержимо, що $\mathop{\mathrm{Lim}}_{j} V_{ij} = \overline{E}_i \subseteq F_{k-1}$. А тому $\mathcal{V}_k$ – локально скінченна поза F_{k-1}. Крім того, з (1) отримуємо, що $\overline{V} \cap F_k = \varnothing$ для $V \in \mathcal{V}_k$. Тому $U_k = X \setminus \overline{V}_k$ – відкритий окіл множини $F_k \setminus F_{k-1} \supseteq E_k$. Нехай $G_{km} = U_k \setminus F_{k+m}$. Тоді G_{km} – $\mathcal{F}$-дотичні до E_k, адже $\overline{G}_{km} = \overline{U}_k$. Далі, за теоремою 3.3($ii$), існує послідовність відкритих множин $V_{km} \mathrel{\overline{\subset}} G_{km}$, така, що $\operatorname*{Lim}_m (V_{km} \cap F) = \overline{E_k \cap F}$ для $F \in \mathcal{F}_+$. Але $G_{km} \cap F_{k+m} = \varnothing$ і $G_{km} \cap V_{ij} = \varnothing$ для $i < k \leq i + j$. Тому виконуються властивості (1)-(3) з $n = k$.

Нехай $G_n = \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} V_{nm}$. Зрозуміло, що G_n – $\mathcal{F}$-дотична до E_n. Крім того, з (3) випливає, що $G_n \cap V_{ij} = \varnothing$ для $i < n \leq i + j$. Тоді для $i < n$ $G_n \cap G_i = \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} G_n \cap V_{ij} = \bigcup\limits_{j=0}^{n-i} G_n \cap V_{ij} \subseteq \bigcup\limits_{j=0}^{n-i} V_{ij} \mathrel{\overline{\subset}} X \setminus F_n$. Таким чином, послідовність (G_n) має потрібні властивості. $\square$

Основний результат ми сформулюємо в досить загальній формі, щоб потім з нього можна було б отримати відповідні наслідки.

Теорема 8.2. *Нехай X – досконало нормальний сильно досяжний простір; $g : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ – напівнеперервна зверху функція, носій $\mathrm{supp} g$ якої не містить ізольованих точок простору X; $g_0 = (g_*)^*$; $h : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ – така, що $g = g_0 + h$; $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ – спадна послідовність додатних чисел, причому $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$; $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ – така послідовність ніде не щільних множин, що $M_n \supseteq \mathrm{supp}_{\varepsilon_n} h$. Тоді існує послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ напівнеперервних знизу функцій $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$, така, що $f_n|_{M_n} = 0$, $D(f_n) \subseteq \overline{\mathrm{supp}_{\varepsilon_n} h}$, $f_{n+1} \leq \varepsilon_n$ для довільного $n \in \mathbb{N}$, і, крім того, для довільної функції $f_0 : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$, такої, що $(f_0)_* = 0$, $f_0 \leq g_*$ і $f_0^* = g_0$, коливання функції $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ рівне g.*

Доведення. Нехай $E_1 = \overline{\mathrm{supp}_{\varepsilon_1} h}$ і $E_n = \overline{\mathrm{supp}_{\varepsilon_n} h} \setminus \overline{\mathrm{supp}_{\varepsilon_{n-1}} h}$ для $n > 1$. За [13, твердження 4.3] функція g_0 – квазінеперервна. Крім того з [13, твердження 3.3 і 4.2] випливає, що $(g_0)_* = g_*$. Тому згідно з [13, твердження 4.2], існує карта $\varphi = (F_t)_{t \in \mathbb{Q}}$ функції f_0, для якої всі множини F_t канонічно замкнені в X. Нехай $\mathcal{F} = \mathcal{E}_\varphi = \{F_t : t \in \mathbb{Q}\} \cup \{\varnothing, X\}$. Ясно, що $\mathcal{F}$ – зліченний ланцюжок канонічно замкнених множин Побудуємо тепер $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ згідно з лемою 8.1. Покладемо $G'_n = G_n \setminus \overline{M}_n$. Оскільки $\overline{G'}_n \supseteq G_n$, то G'_n – $\mathcal{F}$-дотична до E_n і $\overline{G'_n \cap G'_m} \cap \overline{E}_n = \varnothing$ при $n < m$. Нехай $\Omega = \mathrm{supp} g_0$. Згідно з теоремою 5.2, існує послідовність відкритих множин $U_n \subseteq G'_n$, така, що U_n – $\mathcal{F}$-дотична до E_n, причому для довільної послідовності функцій $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$, таких, що $\mathrm{supp} f_n \subseteq U_n$ і $D(f_n) \subseteq \overline{E}_n$

і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ рівномірно збіжний, функція $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ – квазінеперервна на Ω.

Покладемо $g_n = h\chi_{E_n}$. Оскільки U_n – $\mathcal{F}$-дотична до $E_n \supseteq \mathrm{supp} g_n$, то, згідно з теоремою 7.3, існує функція $f_n : X \to [0, \sup g_n)$, така, що $\mathrm{supp} f_n \subseteq U_n \subseteq C(f_n)$, $\omega_{f_n} = g_n^*$ і $(f_n|_F)^*(x) = (g_n|_F)^*(x)$ для $x \in D(f_n) \cap F$ і $F \in \mathcal{F}$. Покажемо, що $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ – шукана. По-перше, зрозуміло, що $f_n|_{M_n} = 0$, $D(f_n) = \mathrm{supp} g_n^* \subseteq \overline{\mathrm{supp}_{\varepsilon_n} h}$ і $f_{n+1} \le \sup g_{n+1} \le \varepsilon_n$. Розглянемо довільну функцію $f_0 : X \to \mathbb{R}_+$, таку, що $(f_0)_* = 0$, $f_0 \le g_* = (g_0)_*$ і $f_0^* = g_0$. Перш за все, зауважимо, що за вибором U_n, оскільки $D(f_n) = \mathrm{supp} g_n^* \subseteq \overline{E}_n$, то функції f_n і $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k$ – квазінеперервні на $\Omega \supseteq \mathrm{supp} f_0$. Далі, використавши [13, теорема 5.7] для функції $f = f_n$ і $g = f_0$ і карти φ функції $g^* = f_0^* = g_0$, одержимо, що $\omega_{f_0 + f_n} = (g_0 + g_n)^*$.

Нарешті зауважимо, що $\overline{\mathrm{supp} f_m \cap \mathrm{supp} f_n} \subseteq \overline{G_m \cap G_n} \subseteq X \setminus \overline{E}_n \subseteq C(f_n)$ для $m > n$, і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ рівномірно збіжний. Отже, використовуючи [13, теорема 6.1] для функції $g = f_0$, одержимо, що, коливання функції $f_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ рівне $\sup\limits_n \omega_{f_0 + f_n} = \sup\limits_n (g_0 + g_n)^*$. Залишилось показати, що $\sup\limits_n (g_0 + g_n)^* = g$. По-перше, $g_0 + g_n \le g_0 + h = g$. Тому $(g_0 + g_n)^* \le g$, а значить, $\sup\limits_n (g_0 + g_n)^* \le g$. По-друге, $\sup\limits_n (g_0 + g_n)^* \ge \sup\limits_n (g_0 + g_n) = \sup\limits_n (g_0 + h\chi_{E_n}) = g_0 + h = g$, адже $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{\mathrm{supp}_{\varepsilon_n} h} \supseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{supp}_{\varepsilon_n} h = \mathrm{supp} h$). Таким чином, коливання функції $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ рівне g. □

9 Характеризація коливань нарізно неперервних функцій і функцій з першого та другого класу Бера

У цьому підрозділі ми повністю опишемо коливання довільних функцій і функцій з першого та другого класу Бера у досконало нормальних сильно досяжних просторах, в також коливання нарізно неперервних функцій на добутках метризовних просторів.

Твердження 9.1. *Нехай X – топологічний простір і $f : X \to \mathbb{R}$ деяка функція (функція з другого класу Бера, функція з першого класу Бера). Тоді множина $D(f)$ її точок розриву не містить ізольованих* *точок простору X (містить щільну підмножину першої категорії в X, є множиною першої категорії в X).*

Доведення. Відсутність ізольованих точок в множині $D(f)$ точок розриву довільної функції f очевидна. Крім того, в [16, с.403] доведено, що множина точок розриву довільної функції f з першого класу Бера є множиною першої категорії в X. Нехай тепер f належить до другого класу Бера, тобто $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, де $f_n : X \to \mathbb{R}$ – функції першого класу Бера при $n \in \mathbb{N}$. Тоді $E_n = \overline{D(f_n)}$ – множини першої категорії. Нехай $G = X \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Оскільки $C(f_n) \supseteq G$ для $n \in \mathbb{N}$, то $f|_G$ належить до першого класу Бера. А тому $E_0 = D(f) \cap G = D(f|_G)$ – множина першої категорії в G, а значить, і в X. Таким чином, $E = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} E_n$ – щільна в $D(f)$ множина першої категорії. $\square$

Теорема 9.2. *Нехай X – досконало нормальний сильно досяжний простір і $g : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$. Тоді для того, щоб функція g мала деяку ω-первісну /ω-первісну з другого класу Бера, ω-первісну з першого класу Бера/ $f : X \to \mathbb{R}$ необхідно і досить, щоб g була напівнеперервною зверху і носій* supp$g$ *не містив ізольованих точок простору X /містив щільну підмножину першої категорії в X, був множиною першої категорії в X/.*

Доведення. Необхідність випливає з попереднього твердження. Доведемо достатність. Так само, як і раніше функція $g_0 = (g_*)^*$ – квазінеперервна і $(g_0)_* = g_*$. Зауважимо, що $\mathrm{supp} g_0 \subseteq \overline{\mathrm{supp} g_*}$. Згідно з теоремами 6.2 і 6.4, існує функція $f_0 : X \to \mathbb{R}_+$ /з другого класу Бера, чи відповідно з першого класу Бера/, така, що $f_0 \le (g_0)_* = g_*$, $(f_0)_* = 0$ і $f_0^* = g_0$. Далі, з [13, твердження 4.6] випливає, що, існує функція $h : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ така, що $g = g_0 + h$ і $\mathrm{supp}_\varepsilon h$ – ніде не щільні і $\overline{\mathrm{supp}_\varepsilon h} \subseteq \mathrm{supp} g$ при $\varepsilon > 0$. Покладемо $\varepsilon_n = 2^{-n}$ і $M_n = \mathrm{supp}_{\varepsilon_n} h$. Застосуємо тепер теорему 8.2 і одержимо послідовність напівнеперервних знизу функцій $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$, таку, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ збігається рівномірно на X і коливання функції $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ рівне g. Оскільки функції f_n напівнеперервні знизу при $n > 0$, то [15, с.106] вони належать до першого класу Бера. Отже, f належить до першого /другого/ класу Бера, якщо тільки f_0 є такою ж. $\square$

Враховуючи, що метризовні простори є сильно досяжними [11, наслідок 2.4], з попередньої теореми легко отримати наступний результат.

Наслідок 9.3. *Нехай X – метризовний простір. Тоді для того, щоб функція $g : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ мала ω-первісну $f : X \to \mathbb{R}$, з другого /першого/ класу Бера необхідно і досить, щоб g була напівнеперервною зверху і її носій $\mathrm{supp} g$ не містив ізольованих точок простору X /був множиною першої категорії в X/.*

Приступимо тепер до характеризації коливань нарізно неперервних функцій. Перш за все доведемо ще один наслідок до теореми 8.2, який дає достатні умови для існування $\mathcal{A}$-неперервних ω-первісних.

Теорема 9.4. *Нехай X – досконало нормальний сильно досяжний простір, $\mathcal{A}$ – деяка напрямлена узгоджена структура на X і $g : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ – напівнеперервна зверху функція, носій $\mathrm{supp} g$ якої є σ-α-мізерним. Тоді існує $\mathcal{A}$-неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}_+$ з першого класу Бера, така, що $\omega_f = g$.*

Доведення. Так само, як і раніше функція $g_0 = (g_*)^*$ квазінеперервна і $(g_0)_* = g_*$. Тоді $\mathrm{supp} g_0$ є σ-$\mathcal{A}$-мізерним, адже $\mathrm{supp} g_0 \subseteq \mathrm{supp} g$. Отже, за твердженням 6.4, існує α-неперервна функція $f_0 : X \to \mathbb{R}_+$ з першого класу Бера, для якої $f_0 \leq (g_0)_* = g_*$, $(f_0)_* = 0$ і $f_0^* = g_0$. Далі, з [13, твердження 4.6] випливає, що, існує функція $h : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ така, що $g = g_0 + h$ і $\mathrm{supp}_\varepsilon h$ – ніде не щільні і $\overline{\mathrm{supp}_\varepsilon h} \subseteq \mathrm{supp} g$ при $\varepsilon > 0$. Тоді $F_\varepsilon = \overline{\mathrm{supp}_\varepsilon h}$ є ніде не щільною σ-$\mathcal{A}$-мізерною замкненою множиною. А тому, міркуючи як в [11, твердження 6.3], нескладно показати, що F_ε є $\mathcal{A}$-мізерною для кожного $\varepsilon > 0$. Нехай M_ε – ніде не щільний α-окіл множини F_ε. Візьмемо $\varepsilon_n = 2^{-n}$ і використаємо для $M_n = M_{\varepsilon_n}$ теорему 8.2. Тоді отримаємо послідовність функцій $f_n : X \to \mathbb{R}_+$ таку, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ збігається рівномірно на X, $f_n|_{M_{\varepsilon_n}} = 0$, $D(f_n) \subseteq F_{\varepsilon_n}$ і коливання функції $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ рівне g. Оскільки функції f_n напівнеперервні знизу при $n > 0$, то [15, с.106] вони належать до першого класу Бера. Залишилось перевірити, що f α-неперервна. Оскільки α – напрямлена структура, то згідно з твердженням 2.1, для цього досить показати, що такими є функції f_n при $n > 0$. Візьмемо $x_0 \in X$ і $n \in \mathbb{N}$. Якщо $x_0 \notin F_{\varepsilon_n}$, то f_n неперервна в точці x_0. Нехай $x_0 \in F_{\varepsilon_n}$. Тоді M_{ε_n} – $\mathcal{A}$-окіл точки x_0. Отже, оскільки $f_n|_{M_{\varepsilon_n}} = 0$, то за твердженням 2.6 функція f_n є $\mathcal{A}$-неперервною в точці x_0. □

Нарешті, використавши теорему 2.4, одержимо наступну характеризацію коливань α-нарізно неперервних функцій, визначених на добутку метризовних просторів.

Теорема 9.5. *Нехай $X = \prod_{i\in I} X_i$ – добуток скінченної сім'ї метризовних просторів, $\alpha \subseteq 2^I$, така, що $\bigcup \alpha = I$, і $\mathcal{A}$ – структура α-нарізної неперервності. Тоді для того, щоб функція $g : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ мала α-нарізно неперервну ω-первісну /з першого класу Бера/, необхідно і досить, щоб g була напівнеперервною зверху і її носій $\operatorname{supp} g$ був σ-$\mathcal{A}$-мізерним.*

[1] Kershner R. The continuity of functions of many vatiables// Trans. Amer. Math. Soc. - 1943. - **53**, N1. - P.83-100.

[2] Маслюченко В. К. Михайлюк В. В. Характеризація множин точок розриву нарізно неперервних функцій багатьох змінних на добутках метризовних просторів // Укр. мат. журн. - 2000. - **52**, N6. - C.740-747.

[3] Maslyuchenko O. V. Discontinuity point set of quasi-continuous function. // Bull. Austral. Math. Soc. - 2007. - **75**. - P. 373-379.

[4] Герасимчук В. Г., Маслюченко В. К., Маслюченко О. В. Характеризація множин точок розриву CD-функцій / // Математичний вісник НТШ. - 2005. - **2**. - C. 57-71.

[5] Kostyrko P. Some properties of oscilation. // Math. Slovaca. - 1980. - **30.** - P.157-162.

[6] Duszynski Z., Grande Z. Ponomarev S. P. On the ω-primitives. // Math. Slovaca. - 2001. - **51**. - P. 469-476.

[7] Ewert J., Ponomarev S.P. ω-primitives on σ-discrete metric space. // Tatra Mt. Math. Publ. - 2002. - **24**. - P.13-27.

[8] Ewert J., Ponomarev S.P. On the existance of ω-primitives on arbitrary metric spaces. // Math. Slovaca. - 2003. - **53**. - P.51-57.

[9] Ewert J., Ponomarev S.P. Oscillation and ω-primitives. // Real Anal. Exchange . - 2002. - **26**. - P. 687-702.

[10] Ponomarev S. P. A note on σ-disctete and massive space. // Tatra Mt. Math. Publ. - 2004. - **28**. - P.43-56.

[11] Malyuchenko O.V. The oscillation of quasi-continuous functions on pairwise attainable spaces // Houston Journal of Mathematics - 2009. - **35**, N1. - P. 113-130.

[12] Маслюченко О. В. Коливання нарізно неперервних функцій і топологічні ігри: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.01. - Чернівці, 2002. - 149с.

[13] Маслюченко О. В. Побудова ω-первісних: коливання суми функцій // Математичний вісник НТШ. - 2008. - **5**. - C. 151-163.

[14] Маслюченко В. К. Нарізно неперервні функції і простори Кете: Дис. ... доктора фіз.-мат. наук: 01.01.01. - Чернівці, 1999. - 445с.

[15] Энгелькинг Р. Общая топология. - Москва: Мир, 1986. - 752с.

[16] Куратовский К. Топология. - Т.1. - Москва: Мир, 1966. - 596с.

THE CONSTRUCTION OF ω-PRIMITIVES: STRONGLY ATTAINABLE SPACES

Oleksandr MASLYUCHENKO

Yuriy Fed'kovych Chernivtsi National University,
2 Kotsjubynskyi Str., Chernivtsi 58012, Ukraine

In this paper we develop a technique of construction of α-continuous ω-primitives on strongly attainable spaces and characterize the oscillation of separately continuous functions defined on the product of arbitrary metrizable spaces and the oscillation of first and second Baire functions defined on perfectly normal strongly attainable spaces.