КЛАСИЧНА РОЗВ'ЯНІСТЬ ОДНІЄЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З РОЗРИВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

©2009 р. *Степан КІЧУРА, Жаннета ЦАПОВСЬКА*

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, Львів 79000

Редакція отримала статтю 26 червня 2009р.

Вивчається початково-крайова задача для лінійного параболічного рівняння другого порядку з розривними коефіцієнтами в припущенні, коли на зовнішній частині межі області задається умова другої крайової задачі, а на внутрішній частині межі – умова спряження типу Вентцеля. Методом граничних інтегральних рівнянь доведено теорему про однозначну розв'язність задачі в просторі Гельдера.

В роботі метод потенціалів застосовується до розв'язання початково-крайової задачі для загального лінійного параболічного рівняння другого порядку з умовою спряження типу Вентцеля, тобто умова спряження має вигляд параболічного оператора другого порядку відносно дотичних змінних. Припускається також, що на зовнішній частині межі області задається умова другої крайової задачі.

Зазначимо, що задача Вентцеля виникає, зокрема, в теорії випадкових марковських процесів при побудові дифузійного процесу в області скінченновимірного евклідового простору за наперед заданими матрицею дифузії і вектором переносу та крайовими умовами. Загальний вигляд крайових умов для багатовимірних дифузійних процесів був знайдений О.Д. Вентцелем [3].

Використання методу потенціалів при розв'язанні розглядуваної нами задачі дає можливість подати шуканий розв'язок в інтегральній формі і звести її до розв'язання системи інтегральних рівнянь Вольтерри

УДК 517.956.4; MSC 2000:60J60

другого роду з ядрами, що мають слабкі особливості, і для встановлення розв'язності якої можна застосувати метод послідовних наближень.

Зауважимо, що в [7] подібну задачу було досліджено за допомогою методу теорії потенціалу в припущенні, коли на зовнішній частині межі області задається умова першої крайової задачі. За допомогою інших методів початково-крайова задача Вентцеля вивчалася у роботах [1], [14]. Зазначимо також працю [11] та монографії [4], [5], [9], де для параболічних крайових задач розвинуто загальну теорію.

Введемо такі позначення: $\mathbb{R}^n$ – n-вимірний евклідів простір; $\mathbb{R}_T^{n+1} = \mathbb{R}^n \times (0,T)$, $T > 0$ – фіксоване; $\mathbb{R}_T^n = \mathbb{R}^{n-1} \times (0,T)$; $\mathbb{Z}_+$ – множина цілих невід'ємних чисел; $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = (x', x_n)$ – точка в $\mathbb{R}^n$; $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ – точка в $\mathbb{R}^{n-1}$; $(x,t) = (x', x_n, t)$ – точка в $\mathbb{R}_T^{n+1}$; (x',t) – точка в $\mathbb{R}_T^n$; $(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$; $|x|^2 = (x,x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$; $|x'|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i^2$.

Нехай $\mathcal{D}$ – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з гладкою межею S. Припустимо, що поверхня S_1 ($S \cap S_1 = \emptyset$) розділяє область $\mathcal{D}$ на дві області $\mathcal{D}_1$ і $\mathcal{D}_2$, де $\mathcal{D}_1$ – підобласть з межею S_1, а $\mathcal{D}_2$ – підобласть з межею $S_2 = S_1 \cup S$. Через $\nu(x) = (\nu_1(x), \ldots, \nu_n(x))$ та $\nu^{(1)}(x) = (\nu_1^{(1)}(x), \ldots, \nu_n^{(1)}(x))$ позначатимемо одиничні вектори внутрішніх (щодо $\mathcal{D}_2$) нормалей в точках $x \in S$ та $x \in S_1$ відповідно. Покладемо $\overline{\mathcal{D}}_m = \mathcal{D}_m \cup S_m$, $\Omega_m = \mathcal{D}_m \times (0,T)$, $\Sigma_m = S_m \times [0,T]$, $m = 1,2$, $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup S$, $\Omega = \mathcal{D} \times (0,T)$, $\Sigma = S \times [0,T]$.

Частинну похідну відносно t з порядком r і будь-яку частинну похідну відносно x з порядком p, де $r, p \in \mathbb{Z}_+$, позначатимемо відповідно символами D_t^r і D_x^p. Будемо використовувати також такі позначення: $D_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}$; $D_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$; $D_{ij} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$, $i,j = 1, \ldots, n$; $\nabla = (D_1, \ldots, D_n)$, δ_i $(i = 1, \ldots, n)$ – тангенціальний диференціальний оператор на S_1, тобто $\delta_i = \sum\limits_{k=1}^{n} \tau_{ik} D_k$, де $\tau_{ik} = \delta_i^k - \nu_i^{(1)} \nu_k^{(1)}$, δ_i^k – символ Кронекера. В роботі використовуватимемо простори Гельдера $H^{l+\lambda,(l+\lambda)/2}(\overline{\mathbb{R}}_T^{n+1})$, $H^{l+\lambda,(l+\lambda)/2}(\Sigma_m)$, $H^{l+\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ($l = 0,1,2$; $m = 1,2$; $\lambda \in (0,1)$ – фіксоване) та клас поверхонь $H^{l+\lambda}$ ($l = 1,2$), які визначені в роботі [8]. Підмножину функцій з $H^{l+\lambda,(l+\lambda)/2}(\Sigma_m)$, які (у випадку $l = 2$ разом з похідною по t) перетворюються в нуль при $t = 0$ позначатимемо через $\overset{\circ}{H}{}^{l+\lambda,(l+\lambda)/2)}(\Sigma_m)$, а через $||w||_{H^{l+\lambda}(\overline{B})}$ та $||w||_{H^{l+\lambda,(l+\lambda)/2}(\overline{B})}$ – норму функції w в $H^{l+\lambda}(\overline{B})$ та $H^{l+\lambda,(l+\lambda)/2}(\overline{B})$, де $\overline{B}$ – одна з множин $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_T^{n+1}$, Σ, Σ_m, $m = 1,2$ відповідно. Всюди нижче C, c – додатні сталі, які не залежать від (x,t), конкретні величини яких нас цікавити не будуть.

Припустимо, що у шарі $\mathbb{R}_T^{n+1}$ задано два рівномірно параболічні оператори другого порядку

$$L_s u \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(s)}(x,t)D_{ij}u + \sum_{i=1}^{n} a_i^{(s)}(x,t)D_i u +$$

$$+a_0^{(s)}(x,t)u - D_t u, \qquad s=1,2, \tag{1}$$

з коефіцієнтами, що визначені в $\overline{\mathbb{R}}_T^{\,n+1}$, для яких виконані умови:

(A1) $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(s)}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \delta_{0s}|\xi|^2, \quad a_{ij}^{(s)} = a_{ji}^{(s)}, \quad \delta_{0s} > 0, \quad s=1,2,$ $\forall (x,t) \in \overline{\mathbb{R}}_T^{\,n+1}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$;

(A2) $a_{ij}^{(s)}$, $a_i^{(s)}$, $a_0^{(s)} \in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{\mathbb{R}}_T^{\,n+1})$, $\quad s=1,2, \quad i,j=1,\dots,n.$

Умови (A1), (A2) забезпечують існування для оператора L_s, $s=1,2$, звичайного фундаментального розв'язку (ф.р.) $G_s(x,t;\xi,\tau)$ $(0 \leq \tau < t \leq T,\ x,\xi \in \mathbb{R}^n)$ [див. 8, гл. IV, §11], для якого при $2r+p \leq 2$ виконані нерівності

$$|D_t^r D_x^p G_s(x,t;\xi,\tau)| \leq C(t-\tau)^{-(n+2r+p)/2} \exp\left\{-c\,\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right\}. \tag{2}$$

В точках поверхонь Σ_1 та Σ визначимо вектори конормалей: $N^{(s)}(x,t) = (N_1^{(s)}(x,t),\dots,N_n^{(s)}(x,t))$, $(x,t) \in \Sigma_1$, де $N_i^{(s)}(x,t) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^{(s)}(x,t)\nu_j^{(1)}(x)$, $i=1,\dots,n$, $s=1,2$; $N(x,t) = (N_1(x,t),\dots,N_n(x,t))$, $(x,t) \in \Sigma$, де $N_i(x,t) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^{(2)}(x,t)\nu_j(x)$, $i=1,\dots,n$.

Розглянемо параболічну задачу спряження:

$$L_s u_s(x,t) = -f_s(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_s, \qquad s=1,2, \tag{3}$$

$$u_s(x,0) = \varphi_s(x), \qquad x \in \mathcal{D}_s, \qquad s=1,2, \tag{4}$$

$$L_3 u(x,t) \equiv u_1(x,t) - u_2(x,t) = z(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma_1 \backslash S_1, \tag{5}$$

$$L_4 u(x,t) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}(x,t)\delta_i\delta_j u_1 - (\beta(x,t),\nabla u_1) + \beta_0(x,t)u_1 - D_t u_1 +$$

$$+(\alpha(x,t),\nabla u_2) + \alpha_0(x,t)u_2 = \theta(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma_1 \backslash S_1, \tag{6}$$

$$L_5 u_2(x,t) \equiv \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial N(x,t)} + \chi(x,t) u_2(x,t) = \psi(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma \backslash S, \quad (7)$$

де $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))$, $\alpha(x,t) = (\alpha_1(x,t), \ldots, \alpha_n(x,t))$, $\beta(x,t) = (\beta_1(x,t), \ldots, \beta_n(x,t))$.

Припускаємо, що коефіцієнти оператора спряження типу Вентцеля L_4 задовольняють умови:

(B1) $\sum\limits_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \mu_0|\xi|^2$, $\beta_{ij} = \beta_{ji}$, $\mu_0 > 0$, $\forall (x,t) \in \Sigma_1$, $\forall \xi \in R^n$, $\xi \perp \nu^{(1)}(x)$;

(B2) β_{ij}, β_i, α_i, β_0, $\alpha_0 \in H^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma_1)$, $i,j = 1,\ldots,n$, $(\beta, \nu^{(1)}) \geq 0$, $(\alpha, \nu^{(1)}) \geq 0$.

Будемо вважати також, що

$$S \in H^{1+\lambda}, \qquad S_1 \in H^{2+\lambda}, \qquad \rho(S, S_1) \geq d_0 > 0, \quad (8)$$

$$f_s \in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{\mathbb{R}}_T^{n+1}), \qquad \varphi_s \in H^{2+\lambda}(\mathbb{R}^n), \qquad s = 1,2,$$

$$z \in H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\Sigma_1), \qquad \theta \in H^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma_1), \qquad \psi \in H^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}(\Sigma), \quad (9)$$

де функції f_s, φ_s, $s = 1,2$, z, θ, ψ належать до правих частин рівностей (3)–(7), для яких, крім цього, виконані умови узгодження:

$$\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = z(x,0),\ x \in S_1, \quad \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial N(x,0)} + \chi(x,0)\varphi_2(x) = \psi(x,0),\ x \in S,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}(x,0)\delta_i\delta_j\varphi_1 - (\beta(x,0), \nabla\varphi_1) + (\alpha(x,0), \nabla\varphi_2) + \beta_0(x,0)\varphi_1 +$$

$$+\alpha_0(x,0)\varphi_2 - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(s)}(x,0) D_{ij}\varphi_s - \sum_{i=1}^{n} a_i^{(s)}(x,0) D_i\varphi_s - a_0^{(s)}(x,0)\varphi_s -$$

$$-f_s = \theta(x,0) + (s-1) D_t z(x,t)|_{t=0}, \qquad x \in S_1, \quad s = 1,2. \quad (10)$$

Перейдемо тепер до викладу основного результату роботи.

Теорема. *Нехай коефіцієнти операторів L_s, $s = 1,2$, і L_4 задовольняють відповідно умови (A1), (A2) і (B1), (B2), а для поверхонь S і S_1 та функцій f_s, φ_s, $s = 1,2$, z, θ, ψ з (3)–(7) виконані умови (8), (9). Тоді* *при виконанні умов узгодження (10) задача (3)–(7) має єдиний розв'язок*

$$u_1 \in H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{\Omega}_1),$$
$$u_2 \in H^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}(\overline{\Omega}_2), \tag{11}$$

для якого виконується оцінка

$$\|u_1\|_{H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{\Omega}_1)} + \|u_2\|_{H^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}(\overline{\Omega}_2)} \le C\left[\sum_{s=1}^{2}\|f_s\|_{H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{\mathbb{R}}_T^{n+1})}+\right.$$
$$+\sum_{s=1}^{2}\|\varphi_s\|_{H^{2+\lambda}(\mathbb{R}^n)} + \|z\|_{H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\Sigma_1)} + \|\theta\|_{H^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma)}+$$
$$\left.+\|\psi\|_{H^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}(\Sigma)}\right]. \tag{12}$$

Доведення. Будемо шукати розв'язок задачі (3)–(7) у вигляді

$$u_s(x,t) = \sum_{m=0}^{3} u_s^{(m)}(x,t), \qquad (x,t)\in\Omega_s, \qquad s=1,2, \tag{13}$$

де $u_1^{(0)}(x,t) \equiv 0$,

$$u_s^{(1)}(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{S_1} G_s(x,t;\xi,\tau)V_s(\xi,\tau)d\sigma_\xi, \qquad s=1,2, \tag{14}$$

$$u_2^{(0)}(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{S} G_2(x,t;\xi,\tau)V_0(\xi,\tau)d\sigma_\xi, \tag{15}$$

$$u_s^{(2)}(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} G_s(x,t;\xi,0)\varphi_s(\xi)d\xi, \qquad s=1,2, \tag{16}$$

$$u_s^{(3)}(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_s(x,t;\xi,\tau)f_s(\xi,\tau)d\xi, \qquad s=1,2. \tag{17}$$

Нагадаємо (див. [8]), що в теорії параболічних рівнянь функції $u_2^{(0)}$, $u_s^{(1)}$, $s=1,2$, звуться потенціалами простого шару, а функції $u_s^{(2)}$ та

$u_s^{(3)}$ – відповідно плоским та об'ємним потенціалами Пуассона. Відомо також, що функції $u_s^{(l)}$, $l = 1, 2, 3$, $s = 1, 2$, та $u_2^{(0)}$ – неперервні в $\overline{\mathbb{R}}_T^{n+1}$, задовольняють рівняння $L_s u_s^{(1)} = 0$, $s = 1, 2$, в $\mathbb{R}_T^{n+1} \backslash \Sigma_1$, $L_2 u_2^{(0)} = 0$ в $\mathbb{R}_T^{n+1} \backslash \Sigma$, $L_s u_s^{(2)} = 0$, $L_s u_s^{(3)} = -f_s$, $s = 1, 2$, в $\mathbb{R}_T^{n+1}$, і початкові умови $u_s^{(1)}(x, 0) = 0$, $s = 1, 2$, $u_2^{(0)}(x, 0) = 0$, $u_s^{(2)}(x, 0) = \varphi_s(x)$, $u_s^{(3)}(x, 0) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $s = 1, 2$. Тому для розв'язання задачі потрібно підібрати V_s, $s = 1, 2$, та V_0 у такий спосіб, щоб для u_s, $s = 1, 2$, виконувались умови спряження (5), (6), крайова умова (7), а при виконанні умов узгодження (10) справджувались умова (11) та оцінка (12).

Припустимо a priori, що V_m, $m = 0, 1, 2$, задовольняють умови

$$V_0 \in \underset{\circ}{H}^{\lambda, \lambda/2}(\Sigma), \quad V_s \in \underset{\circ}{H}^{\lambda, \lambda/2}(\Sigma_1), \quad s = 1, 2. \tag{18}$$

Перетворимо рівність (6), виділивши в ній у виразах, що містять похідні першого порядку відносно просторових змінних окремо тангенціальну і конормальну складові. Для цього використаємо формули

$$(\beta(x,t), \nabla u_1) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x,t) \tilde{\delta}_i^{(1)} u_1 + \gamma_1(x,t) \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial N^{(1)}(x,t)},$$

$$(\alpha(x,t), \nabla u_2) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x,t) \tilde{\delta}_i^{(2)} u_2 + \gamma_2(x,t) \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial N^{(2)}(x,t)}, \tag{19}$$

де $\tilde{\delta}_i^{(s)} = D_i - \frac{\nu_i^{(1)}}{(N^{(s)}, \nu^{(1)})} \sum\limits_{k=1}^{n} N_k^{(s)} D_k$, $i = 1, \ldots, n$, $s = 1, 2$, – дотичні диференціальні оператори на S_1, а

$$\gamma_1(x,t) = \frac{(\beta(x,t), \nu^{(1)}(x))}{(N^{(1)}(x,t), \nu^{(1)}(x))}, \qquad \gamma_2(x,t) = \frac{(\alpha(x,t), \nu^{(1)}(x))}{(N^{(2)}(x,t), \nu^{(1)}(x))}.$$

При цьому для функцій $\frac{\partial u_1}{\partial N^{(1)}}$ і $\frac{\partial u_2}{\partial N^{(2)}}$ після врахування формули стрибка для конормальних похідних від потенціалів простого шару $u_1^{(1)}$ і $u_2^{(1)}$ (див. [8, гл. IV, §11]) можна записати співвідношення

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial N^{(1)}(x,t)} = \frac{1}{2} V_1(x,t) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{S_1} \frac{\partial G_1(x,t;\xi,\tau)}{\partial N^{(1)}(x,t)} V_1(\xi,\tau) d\sigma_\xi +$$

$$+ \sum_{m=2}^{3} \frac{\partial u_1^{(m)}(x,t)}{\partial N^{(1)}(x,t)}, \quad (x,t) \in \Sigma_1 \backslash S_1, \tag{20}$$

$$\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial N^{(2)}(x,t)} = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S \frac{\partial G_2(x,t;\xi,\tau)}{\partial N^{(2)}(x,t)}\, V_0(\xi,\tau)d\sigma_\xi + \sum_{m=2}^{3} \frac{\partial u_2^{(m)}(x,t)}{\partial N^{(2)}(x,t)} +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{S_1} \frac{\partial G_2(x,t;\xi,\tau)}{\partial N^{(2)}(x,t)}\, V_2(\xi,\tau)d\sigma_\xi - \frac{1}{2}\, V_2(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma_1 \backslash S_1, \quad (21)$$

до того ж для ядер $\frac{\partial G_s}{\partial N^{(s)}}$, $s = 1, 2$, мають місце оцінки

$$\left| \frac{\partial G_s(x,t;\xi,\tau)}{\partial N^{(s)}(x,t)} \right| \le C\,(t-\tau)^{-\,(n+1-\lambda)/2} \exp\left\{ -c\, \frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} \right\},$$

$$s = 1, 2, \qquad 0 \le \tau < t \le T, \quad x \in S_1, \quad \xi \in S_1, \qquad (22)$$

$$\left| \frac{\partial G_2(x,t;\xi,\tau)}{\partial N^{(2)}(x,t)} \right| \le C\, \exp\left\{ -c\, \frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} \right\},$$

$$0 \le \tau < t \le T, \qquad x \in S_1, \quad \xi \in S. \qquad (23)$$

Зауважимо, що в нерівності (23) сталі C, c залежать також від сталої d_0 з умови (8). Тоді, враховуючи (19) і (5), умову спряження (6) можна записати у вигляді

$$\tilde{L}_4 u(x,t) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}(x,t)\delta_i\delta_j u_1 - \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x,t)\tilde{\delta}_i^{(1)} u_1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x,t)\tilde{\delta}_i^{(2)} u_1 +$$

$$+\tilde{\beta}_0(x,t)u_1 - D_t u_1 = \tilde{\theta}(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma_1 \backslash S_1, \qquad (24)$$

де

$$\tilde{\beta}_0(x,t) = \beta_0(x,t) + \alpha_0(x,t),$$

$$\tilde{\theta}(x,t) = \theta_0(x,t) + \sum_{s=1}^{2} (-1)^{s-1} \gamma_s(x,t) \frac{\partial u_s(x,t)}{\partial N^{(s)}(x,t)},$$

$$\theta_0(x,t) = \theta(x,t) + \alpha_0(x,t)z(x,t) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x,t)\tilde{\delta}_i^{(2)} z(x,t), \qquad (25)$$

або у вигляді

$$\tilde{L}_4 u(x,t) \equiv \sum_{k,l=1}^{n} \tilde{\beta}_{kl}(x,t) D_{kl} u_1 + \sum_{k=1}^{n} \tilde{\beta}_k(x,t) D_k u_1 + \tilde{\beta}_0(x,t)u_1 -$$

$$-D_t u_1 = \tilde{\theta}(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma_1 \backslash S_1, \qquad (26)$$

де

$$\tilde{\beta}_{kl}(x,t) = \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}(x,t)\tau_{ik}(x)\tau_{jl}(x), \qquad k,l = 1,\dots,n,$$

$$\tilde{\beta}_k(x,t) = \alpha_k(x,t) - \beta_k(x,t) + \sum_{s=1}^{2}(-1)^{s-1}\gamma_s(x,t)N_k^{(s)}(x,t) -$$

$$- \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}(x,t)\delta_i(\nu_j^{(1)}(x)\nu_k^{(1)}(x)). \tag{27}$$

Рівність (24) розглядатимемо далі як автономне параболічне рівняння відносно u_1 на $\Sigma_1 \backslash S_1$. Коефіцієнти та права частина цього рівняння, як випливає з умов теореми, умови (18), формул (25), (27) та властивостей потенціалів (див. [8]), належать до класу Гельдера $H^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma_1)$. Відомо також (див. [1], [8]), що для розв'язку u_1 цього рівняння, який задовольняє початкову умову

$$u_1(x,0) = \varphi_1(x), \qquad x \in S_1, \tag{28}$$

справджується нерівність

$$\|u_1\|_{H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\Sigma_1)} \le C\left[\|\tilde{\theta}\|_{H^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma_1)} + \|\varphi_2\|_{H^{2+\lambda}(S_1)}\right].$$

Крім цього, аналогічно як в [7], ми доводимо, що цей розв'язок можна виразити формулою

$$u_1(x,t) = \int\limits_{S_1} \Gamma(x,t;\xi,0)\varphi_1(\xi)d\sigma_\xi - \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{S_1} \Gamma(x,t;\xi,\tau)\tilde{\theta}(\xi,\tau)d\sigma_\xi, \tag{29}$$

де $(x,t) \in \Sigma_1$, $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ – ф.р. оператора $\tilde{L}_4$, існування якого забезпечують умови теореми.

Зауважимо, що в правій частині формули (29) перший та другий доданки відіграють таку ж роль, як відповідно плоский та об'ємний потенціали Пуассона, що входять до зображення (13). При цьому для функції $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ при $0 \le \tau < t \le T$, $x \in S_1$, $\xi \in S_1$, $2r + p \le 2$, правильні такі нерівності:

$$|D_t^r \delta_x^p \Gamma(x,t;\xi,\tau)| \le C\,(t-\tau)^{-(n-1+2r+p)/2} \exp\left\{-c\,\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right\}, \tag{30}$$

де δ_x^p – символ будь-якої тангенціальної частинної похідної відносно x з порядком p.

Отже, маємо два вирази для значень функції u_1 на Σ_1 : співвідношення (13), де треба покласти $s = 1$, $(x,t) \in \Sigma_1$ та співвідношення (29). Якщо прирівняти між собою їх праві частини, враховуючи при цьому (14), (15), (20), (21), то знайдемо перше рівняння, що зв'язує невідомі функції V_m, $m = 0, 1, 2$. Друге рівняння для V_m, $m = 0, 1, 2$, отримаємо, використовуючи (29) та умову спряження (5).

Введемо для зручності такі позначення: $S^{(0)} = S$, $S^{(1)} = S^{(2)} = S_1$, $\Sigma^{(l)} = S^{(l)} \times [0, T]$, $l = 0, 1, 2$. Тоді перші два рівняння відносно V_m, $m = 0, 1, 2$, можна подати у вигляді

$$\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{S_1} G_m(x,t;\xi,\tau) V_m(\xi,\tau) d\sigma_\xi + \sum_{l=0}^{2} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{S^{(l)}} K_{ml}(x,t;\xi,\tau) V_l(\xi,\tau) d\sigma_\xi =$$

$$= \Phi_m(x,t), \quad m = 1, 2, \qquad (x,t) \in \Sigma^{(l)}, \quad l = 0, 1, 2, \tag{31}$$

де

$$K_{10}(x,t;\xi,\tau) = -\int\limits_\tau^t ds \int\limits_{S_1} \Gamma(x,t;\eta,s) \gamma_2(\eta,s) \frac{\partial G_2(\eta,s;\xi,\tau)}{\partial N^{(2)}(\eta,s)}\, d\sigma_\eta,$$

$$(x,t) \in \Sigma_1, \quad (\xi,\tau) \in \Sigma,$$

$$K_{20}(x,t;\xi,\tau) = K_{10}(x,t;\xi,\tau) + G_2(x,t;\xi,\tau), \qquad (x,t) \in \Sigma_1, \quad (\xi,\tau) \in \Sigma,$$

$$K_{1l}(x,t;\xi,\tau) = K_{2l}(x,t;\xi,\tau) = \frac{1}{2}\, \gamma_l(\xi,\tau) \Gamma(x,t;\xi,\tau) +$$

$$+ (-1)^{l-1} \int\limits_\tau^t ds \int\limits_{S_1} \Gamma(x,t;\eta,s) \gamma_l(\eta,s) \frac{\partial G_l(\eta,s;\xi,\tau)}{\partial N^{(l)}(\eta,s)}\, d\sigma_\eta,$$

$$l = 1, 2, \quad (x,t) \in \Sigma_1, \quad (\xi,\tau) \in \Sigma_1,$$

$$\Phi_m(x,t) = \int\limits_{S_1} \Gamma(x,t;\xi,0) \varphi_1(\xi) d\sigma_\xi - \sum_{l=2}^{3} u_m^{(l)}(x,t) - z_m(x,t) -$$

$$- \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{S_1} \Gamma(x,t;\xi,\tau) \left[\theta_0(\xi,\tau) + \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=2}^{3} (-1)^{i-1} \gamma_i(\xi,\tau) \frac{\partial u_i^{(j)}(\xi,\tau)}{\partial N^{(i)}(\xi,\tau)} \right] d\sigma_\xi,$$

$$m = 1, 2, \quad (x,t) \in \Sigma_1,$$

$$z_1(x,t) \equiv 0, \qquad z_2(x,t) \equiv z(x,t).$$

Третє рівняння шуканої системи рівнянь для V_m, $m = 0, 1, 2$, отримаємо з крайової умови (7). Розкриваючи цю умову, з врахуванням формули стрибка для конормальної похідної від потенціалу простого шару $u_2^{(0)}$ з (15) маємо

$$V_0(x,t) + \sum_{l=0}^{2} \int_0^t d\tau \int_{S^{(l)}} K_{0l}(x,t;\xi,\tau) V_l(\xi,\tau) d\sigma_\xi = \Phi_0(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma, \tag{32}$$

де $K_{01}(x,t;\xi,\tau) \equiv 0$,

$$K_{0l}(x,t;\xi,\tau) = -2 \left[\frac{\partial G_2(x,t;\xi,\tau)}{\partial N(x,t)} + \chi(x,t) G_2(x,t;\xi,\tau) \right], \quad l = 0, 2,$$

$$(x,t) \in \Sigma, \quad (\xi,\tau) \in \Sigma^{(l)},$$

$$\Phi_0(x,t) = -2 \left[\psi(x,t) - \chi(x,t) \sum_{l=2}^{3} u_2^{(l)}(x,t) - \sum_{l=2}^{3} \frac{\partial u_2^{(l)}(x,t)}{\partial N(x,t)} \right],$$

$$(x,t) \in \Sigma \backslash S.$$

Отже, для знаходження невідомих щільностей V_m, $m = 0, 1, 2$, ми отримали систему інтегральних рівнянь (31), (32). Всі три рівняння цієї системи є рівняннями вольтеррівського типу: перші два з них – це рівняння першого роду, а третє – рівняння другого роду, розв'язане відносно V_0. За допомогою елементарних нерівностей (2), (22), (23), (30) для ядер цих рівнянь K_{ml}, $m, l = 0, 1, 2$, знаходимо оцінки

$$|K_{0l}(x,t;\xi,\tau)| \le C\,(t-\tau)^{-\,(n+1-\lambda)/2} \exp\left\{ -c\,\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} \right\},$$

$$0 \le \tau < t \le T, \quad x \in S, \quad \xi \in S^{(l)}, \quad l = 0, 1, 2, \tag{33}$$

$$|K_{ml}(x,t;\xi,\tau)| \le C\,(t-\tau)^{-\,(n-1)/2} \exp\left\{ -c\,\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} \right\},$$

$$0 \le \tau < t \le T, \quad x \in S_1, \quad \xi \in S^{(l)}, \quad m = 1, 2; \quad l = 0, 1, 2. \tag{34}$$

Щодо правих частин системи рівнянь (31), (32), тобто функцій Φ_m, $m = 0, 1, 2$, то для них, як випливає з припущень теореми, умов узгодження (10) і властивостей параболічних потенціалів (див. [8]), виконані умови

$$\Phi_0 \in \underset{\circ}{H}^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma), \quad \Phi_m \in \underset{\circ}{H}^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\Sigma_1), \quad m = 1, 2. \tag{35}$$

Дослідимо тепер питання про редукцію системи інтегральних рівнянь Вольтерри I-го роду (31) до еквівалентної їй системи інтегральних рівнянь Вольтерри II-го роду.

З цією метою введемо до розгляду крайові інтегро-диференціальні оператори $\mathcal{E}_1$ і $\mathcal{E}_2$, що є аналогами оператора $\mathcal{E}$, який був визначений в роботах [2] та [13] і використовувався там як регуляризатор параболічної першої крайової задачі.

Нехай функція $\psi \in \underset{\circ}{H}^{l+\lambda,(l+\lambda)/2}(\Sigma_1)$, $l = 1, 2$. Тоді дія оператора $\mathcal{E}_m$, $m = 1, 2$, на функцію ψ задається формулою

$$\mathcal{E}_m(x,t)\psi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^t (t-\tau)^{-1/2} d\tau \int\limits_{S_1} \mathcal{H}_m(x,\hat{t};\xi,\tau)\psi(\xi,\tau)d\sigma_\xi \right\}\Bigg|_{\hat{t}=t},$$

$$(x,t) \in \Sigma_1 \backslash S_1, \quad m = 1, 2, \tag{36}$$

де функція $\mathcal{H}_m(x,t;\xi,\tau)$ визначена при $0 \le \tau < t \le T$, $x, \xi \in S_1$, і для побудови якої треба використати атлас $(n-1)$-вимірного многовиду $S_1 \in H^{l+\lambda}$ $(l = 1, 2)$ за допомогою розбиття одиниці, а також ф.р. оператора $L_{m,n-1}$ який є слідом головної частини (без молодших членів) оператора L_m на Σ_1 у локальних внутрішніх координатах. Це означає, що при $n \ge 2$ побудова оператора $\mathcal{E}_m$, $m = 1, 2$, є істотно локальною. Найбільш простою виглядає конструкція функції $\mathcal{H}_m$, $m = 1, 2$, а отже, і оператора $\mathcal{E}_m$ у випадку так званих "модельних" варіантів поверхні $\Sigma_1 = S_1 \times [0, T]$, тобто, коли $S_1 = \mathbb{R}^{n-1}$, або, коли S_1 – елементарна поверхня з класу $H^{l+\lambda}$, $l = 1, 2$ (див [2], [12]). Зокрема, в умовах першого варіанту функція $\mathcal{H}_m(x',t;\xi',\tau)$ $(0 \le \tau < t \le T$, $x', \xi' \in \mathbb{R}^{n-1})$ просто збігається з ф.р. рівномірно параболічного оператора

$$L_{m,n-1} \equiv \sum_{i,j=1}^{n-1} \tilde{a}_{ij}^{(m)}(x',t)D_{ij} - D_t, \qquad m = 1, 2,$$

де $\tilde{a}_{ij}^{(m)} = a_{ij}^{(m)} - a_{in}^{(m)} a_{jn}^{(m)} \left(a_{nn}^{(m)}\right)^{-1}$, $i, j = 1, \ldots, n-1$.

Зазначимо без доведення декілька відомих властивостей оператора $\mathcal{E}_m$, $m = 1, 2$ (див. [2], [6], [7], [12], [13]). Першу з них можна описати за допомогою такого твердження.

Лема. *Оператор* $\mathcal{E}_m$, $m = 1, 2$, *який визначений формулою (36), є лінійним обмеженим оператором, що відображає простір* $\underset{\circ}{H}^{l+\lambda,(l+\lambda)/2}(\Sigma_1)$ *на простір* $\underset{\circ}{H}^{l-1+\lambda,(l-1+\lambda)/2}(\Sigma_1)$, $l = 1, 2$. *При цьому рівняння* $\mathcal{E}_m\psi = 0$ *має в просторі* $\underset{\circ}{H}^{l+\lambda,(l+\lambda)/2}(\Sigma_1)$ *лише тривіальний розв'язок* $\psi \equiv 0$.

Друга властивість пов'язана з дією оператора $\mathcal{E}_m$ на функцію $u_m^{(1)}$ з (14). Якщо припустити, що невідома щільність V_m, яка входить до потенціалу простого шару $u_m^{(1)}$, задовольняє умову (18), то справджується рівність

$$\mathcal{E}_m(x,t)u_m^{(1)} = \Big(A_m(x,t)\nu^{(1)}(x), \nu^{(1)}(x)\Big)^{-1/2} V_m(x,t) +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{S_1} K_m(x,t;\xi,\tau)V_m(\xi,\tau)d\sigma_\xi, \quad (x,t) \in \Sigma_1 \backslash S_1, \quad m = 1, 2, \qquad (37)$$

де $A_m(x,t) = \Big(a_{ij}^{(m)}(x,t)\Big)_{i,j=1}^n$, до того ж для ядра $K_m(x,t;\xi,\tau)$ в кожній області вигляду $0 \leq \tau < t \leq T$, $x, \xi \in S_1$, виконується нерівність (22).

Використовуючи зазначені властивості оператора $\mathcal{E}_m$, $m = 1, 2$, переконуємося в тому, що після застосування $\mathcal{E}_m$ до відповідного рівняння системи (31) останні замінюються еквівалентними рівняннями Вольтерри II-го роду. Остаточно шукана система інтегральних рівнянь відносно V_m, $m = 0, 1, 2$, матиме вигляд

$$V_m(x,t) + \sum_{l=0}^{2} \int_0^t d\tau \int_{S^{(l)}} R_{ml}(x,t;\xi,\tau)V_l(\xi,\tau)d\sigma_\xi =$$

$$= \Psi_m(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma^{(m)}, \quad m = 0, 1, 2, \qquad (38)$$

де $\Psi_0(x,t) \equiv \Phi_0(x,t)$, $(x,t) \in \Sigma^{(0)}$,

$\Psi_m(x,t) = \big(A_m(x,t)\nu^{(1)}(x), \nu^{(1)}(x)\big)^{1/2} \mathcal{E}_m(x,t)\Phi_m$, $(x,t) \in \Sigma^{(m)}$, $m = 1, 2$.

А для ядер $R_{ml}(x,t;\xi,\tau)$ при $0 \leq \tau < t \leq T$, $x \in S^{(m)}$, $\xi \in S^{(l)}$, $m, l = 0, 1, 2$, має місце оцінка (22).

Розв'язуючи систему рівнянь (38) методом послідовних наближень, знаходимо V_m, $m = 0, 1, 2$. При цьому перевіряємо, що V_m задовольняють умову (18).

Завершуючи доведення теореми, залишилося перевірити виконання для u_s, $s = 1, 2$, умов (11), оцінки (12) та обґрунтувати єдиність побудованого за формулами (13), (38) розв'язку $u = (u_1, u_2)$ задачі (3)–(7). Для цього достатньо зауважити, що компоненту u_1 можна окремо розглядати як розв'язок параболічної першої крайової задачі

$$
\begin{gathered}
L_1 u_1(x,t) = -f_1(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_1, \\
u_1(x,0) = \varphi_1(x), \qquad x \in \mathcal{D}_1, \\
u_1(x,t) = v(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma_1,
\end{gathered} \tag{39}
$$

при виконанні умов узгодження

$$
\varphi_1(x) = v(x,0), \qquad \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0}, \quad x \in S_1, \tag{40}
$$

а компоненту u_2 – як розв'язок параболічної крайової задачі

$$
\begin{gathered}
L_2 u_2(x,t) = -f_2(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_2, \\
u_2(x,0) = \varphi_2(x), \qquad x \in \mathcal{D}_2, \\
u_2(x,t) = v(x,t) - z(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma_1, \\
\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial N(x,t)} + \chi(x,t) u_2(x,t) = \psi(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma,
\end{gathered} \tag{41}
$$

при виконанні умов узгодження

$$
\begin{gathered}
\varphi_2(x) = v(x,0) - z(x,0), \qquad x \in S_1, \\
\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} - \frac{\partial z(x,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0}, \qquad x \in S_1, \\
\frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial N(x,0)} + \chi(x,0)\varphi_2(x) = \psi(x,0), \qquad (x,t) \in S,
\end{gathered} \tag{42}
$$

де функція $v \in H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\Sigma_1)$ визначена за допомогою співвідношення (29). Тоді (див. [8]) умови теореми гарантують існування єдиних розв'язків задач (39), (41), які при виконанні умов узгодження відповідно (40) і (42) належать до класів Гельдера з (11), і для них виконана оцінка (12). Теорема доведена.

[1] *Апушкинская Е.А., Назаров А.И.* Начально-краевая задача с граничным условием Вентцеля для недивергентных параболических уравнений // РАН, Алгебра и анализ. – 1994. – 6, вып. 6. – С. 1–29.

[2] *Бадерко Е.А.* О решении первой краевой задачи для параболического уравнения с помощью потенциала простого слоя // Докл. АН СССР. – 1985. – Т. 283. – № 1. – С. 11–13.

[3] *Вентцель А.Д.* О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов// Теория вероятн. и ее применения. – 1959. – 4, № 2. – С. 172–185.

[4] *Житарашу Н.В., Эйдельман С.Д.* Параболические граничные задачи. – Кишенев: Штиница, 1992. – 328 с.

[5] *Ивасишен С.Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач. – Киев: Вища школа, 1990. – 200 с.

[6] *Камынин Л.И.* Приложения параболических потенциалов к краевым задачам математической физики // Дифф. уравнения. – 1991. – 27, № 4. – С. 627–641.

[7] *Копитко Б.І., Цаповська Ж.Я.* Початково-крайова задача з умовою спряження типу Вентцеля для параболічного рівняння з розривними коефіцієнтами // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2008. – 51, № 1. – С. 7–16.

[8] *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М. : Наука, 1967. – 736 с.

[9] *Матійчук М.І.* Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. – Чернівці: Прут, 2003. – 248 с.

[10] *Портенко М.І.* Процеси дифузії в середовищах з мембранами. - Інститут математики НАН України. Київ, 1995. – 199 с.

[11] *Солонников В.А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида// Труды Мат. Ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР.- 1965. – № 83. – С. 3–162.

[12] *Цаповська Ж.Я.* Розв'язання методом потенціалів параболічної початково-крайової задачі з оператором типу Вентцеля в умові спряження. // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1999. – 42, № 2. – С.39–46.

[13] *Черепова М.Ф.* Решение методом потенциала I-ой краевой задачи для параболического уравнения 2-го порядка в нецилиндрической области. – М.: 1985. – Деп. в ВИНИТИ 11.01.85. – № 361-85Деп.

[14] *Yi Zeng and Yousong Luo.* Linear Parabolic Equations with Ventsel Initial Boundary Conditions. // Bull. Austral. Math. Soc. – 1995. – 51. – P. 465–479.

CLASSICAL SOLVABILITY OF BOUNDARY PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATION WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENTS

Stepan KICHURA, Zhanneta TSAPOVS'KA

Ivan Franko Lviv National University
1 Universytetska Str., Lviv 79000, Ukraine

The initial-boundary problem for second order linear parabolic equation with discontinuous coefficients is under investigation. We consider the second boundary problem condition on the exterior part of the domain's boundary and the Wentzel type coupling condition on the interior part of the domain's boundary. It is proved the unique solvability theorem for problem in Hölder space using boundary integral equations method.