UKRAINISCHE ŠEVČENKO-GESELSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN IN LEMBERG (LWIW).
(ČARNIECKI-GASSE № 26).

SITZUNGSBERICHTE

DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-ÄRZTLICHEN SEKTION.

HEFT XVIII.

(JÄNNER 1933 — APRIL 1933).

VERÖFFENTLICHT
VOM DIREKTOR DER MATH.-NATURWISS.-ÄRZTLICHEN SEKTION.

LEMBERG, 1933.
VERLAG UND BUCHDRUCKEREI DER ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT
DER WISSENSCHAFTEN IN LEMBERG (LWIW).

I.

Sitzungen der mathematisch-naturwissenschaftlich-ärztlichen Sektion.

CLXXXV. Sitzung am 31. Jänner 1933.

Vorsitzender Hr. Levyćkyj.

1. Hr. G. Polanśkyj hält einen längeren Vortrag über das Leben und die Bedeutung des im April 1932 verstorbenen ukrainischen Geologen weil. Vl. Risnyčenko für die ukrainische Wissenschaft.

2. Der Vorsitzende legt zwei Abhandlungen des Hrn. Vl. Dobrovolśkyj (Kyjiv) u. T.: 1) Sur la gravitation dans le problème des trois corps. 2). Une chose qui compense les théorèmes de Sturm et de Sylvester" vor.

Beide Abhandlungen erscheinen im vorliegenden Hefte der „Sitzungsberichte".

3. Hr. I. Kandiak berichtet über den Plan der ukrainischen landwirtsch. Hochschule in Podiebrady (Tschechoslovakei) externe Kurse zu errichten — unter gleichzeitigen Benutzung der wissenschaftlichen Institute unserer Gesellschaft.

4. Die Hrn. M. Muzyka und G. Polanśkyj berichten über den Verlauf der Vorarbeiten zu dem am 6. und 7. Mai l. J. stattzufindenden IV. ukrain. Ärzte-und Naturhistoriker-Tage.

5. Frl. O. Mryc referiert über die Art und Weise der Konservierung des Herbariums im Museum der Gesellschaft.

TRAITÉS.

Sur la gravitation dans le problème des trois corps.

(par Vl. P. Dobrovolsky).

Depuis Lagrange jusqu' à présent la loi de gravitation des trois corps reste inconnue. Le 7. mars 1931 l'Académie Royale de Belgique a statué publier mes investigations à ce sujet sur le titre: „Sur le problème des n corps" (imprimées ensuite dans „Bulet. de la classe des sciences de l'Acad. Royale de Belgique" t. XVIII) fondées sur la nature du potentiel uniforme qui renferment la loi de gravitation des n et des trois corps. Dans la vue du potentiel multiforme au dedans du champ des trois corps j'ose compléter la loi y trouvée par la manière suivante.

Soient-en supposant les axes des coordonnées rectangulaires — $m_1(x_1 y_1 z_1)$, $m_2(x_2 y_2 z_2)$, $m_3(x_3 y_3 z_3)$ les points du champ des forces dans lesquelles sont concentrées les trois masses données: m_1, m_2, m_3 entièrement libres qui s'attirent mutuellement suivant la loi de Newton. Soient aussi a, b, c les côtés du triangle $(m_1 m_2 m_3)$ opposés respectivement aux sommets m_1, m_2, m_3.

Il y a donc d'abord la fonction des forces:

$$U = -k\left[\frac{m_2 m_3}{a} + \frac{m_3 m_1}{b} + \frac{m_1 m_2}{c}\right] + \text{const.} \qquad (1)$$

où k est un facteur astronomique. D'après de témoignage du Bruns et Poincaré (Acta Math. v. XI et XIII) cette intégrale des forces vives est seulement l'une de six intégrales qui sont algébriques par rapport aux coordonnés des masses agissantes et leurs dérivées premières. C'est pourquoi il faut s'appuyer sur des arguments indubitables qui découlent de la formule (1).

Les lignes des forces en dedans du champs $(m_1 m_2 m_3)$ sont·

$$\frac{x - x_n}{\frac{\partial U}{\partial x_n}} = \frac{y - y_n}{\frac{\partial U}{\partial y_n}} = \frac{z - z_n}{\frac{\partial U}{\partial z_n}} \qquad (n = 1, 2, 3) \qquad (2)$$

En calculant et réluissant les équations (2) on aura d'après simplifications:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{x - x_1}{\frac{m_2(x_2 - x_1)}{c^3} + \frac{m_3(x_3 - x_1)}{b^3}} = \frac{y - y_1}{\frac{m_2(y_2 - y_1)}{c^3} + \frac{m_3(y_3 - y_1)}{b^3}} = \\
&\qquad = \frac{z - z_1}{\frac{m_2(z_2 - z_1)}{c^3} + \frac{m_3(z_3 - z_1)}{b^3}} \\
&\frac{x - x_2}{\frac{m_3(x_3 - x_2)}{a^3} + \frac{m_1(x_1 - x_2)}{c^3}} = \frac{y - y_2}{\frac{m_3(y_3 - y_2)}{a^3} + \frac{m_1(y_1 - y_2)}{c^3}} = \\
&\qquad = \frac{z - z_2}{\frac{m_3(z_3 - z_2)}{a^3} + \frac{m_1(z_1 - z_2)}{c^3}} \\
&\frac{x - x_3}{\frac{m_1(x_1 - x_3)}{a_3} + \frac{m_2(x_2 - x_3)}{a^3}} = \frac{y - y_3}{\frac{m_1(y_1 - y_3)}{b^3} + \frac{m_2(y_2 - y_3)}{a^3}} = \\
&\qquad = \frac{z - z_3}{\frac{m_2(z_1 - z_3)}{b^3} + \frac{m_2(z_2 - z_3)}{a^3}}
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Il est aisé à vérifier que toutes les trois lignes des forces (3) sortent du point unique ou se coupent en l'un centre d'attraction du système (non centre de gravité):

$$
\left.\begin{aligned}
x = x_c &= \frac{m_1 a^3 x_1 + m_2 b^3 x_2 + m_3 c^3 x_1}{m_1 a^3 + m_2 b^3 + m_3 c^3}, \\
y = y_c &= \frac{m_1 a^3 y_1 + m_2 b^3 y_2 + m_3 c^3 y_3}{m_1 a^3 + m_2 b^3 + m_3 c^3}, \\
z = z_c &= \frac{m_1 a^3 z_1 + m_2 b^3 z_2 + m_3 c^3 z_3}{m_1 a^3 + m_2 b^3 + m_3 c^3}
\end{aligned}\right. \qquad (4)
$$

Les formules (4) Mr. prof. B. Delaunay a deviné d'avance et a démontré en partie en moyen des considérations géométriques. (Verhandl. d. III. intern. Math. Kongr. in Heidelberg 1904). Je fais dériver sans façon les formules (4) de la propriété du champ des forces (cf. „Über das Sonne-Erde-Mond-System" von Wlad. Dobrowolsky, Astron. Nachr. 1926 Bd. 227).

En posant pour abréger: $M = m_1 a^3 + m_2 b^3 + m_3 c^3$ (5)

on aura les accélérations des masses aggisantes le long des axes des coordonnées en forme:

$$
\left.\begin{aligned}
x_1'' &= \frac{M(x_c - x_1)}{b^3 c^3}, & y_1'' &= \frac{M(y_c - y_1)}{b^3 c^3}, & z_1'' &= \frac{M(z_c - z_1)}{b^3 c^3} \\
x_2'' &= \frac{M(x_c - x_2)}{c^3 a^3}, & y_2'' &= \frac{M(y_c - y_2)}{c^3 a^3}, & z_2'' &= \frac{M(z_c - z_2)}{c^3 a^3} \\
x_3'' &= \frac{M(x_c - x_3)}{a^3 b^3}, & y_3'' &= \frac{M(y_c - y_3)}{a^3 b^3}, & z_3'' &= \frac{M(z_c - z_3)}{a^3 b^3}
\end{aligned}\right\} (6)
$$

Il est très facile à contrôler que les sommes:

$$x_c'' = x_1'' + x_2'' + x_3'', \quad y_c'' = y_1'' + y_2'' + y_3'', \quad z_c'' = z_1'' + z_2'' + z_3'' \qquad (7)$$

ne sont pas nulles bien que suivant le théorème des forces intérieures on a:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial U}{\partial x_2} + \frac{\partial U}{\partial x_3} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial y_1} + \frac{\partial U}{\partial y_2} + \frac{\partial U}{\partial y_3} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial z_1} + \frac{\partial U}{\partial z_2} + \frac{\partial U}{\partial z_3} = 0.$$

Prenant en considération que — en raison des (3) et (4) — on aura:

$$
\left.\begin{aligned}
x_c - x_1 &= \frac{m_2 b^3 (x_2 - x_1) + m_3 c^3 (x_3 - x_1)}{M}, \\
x_c - x_2 &= \frac{m_1 a^3 (x_1 - x_2) + m_3 c^3 (x_3 - x_1)}{M}, \\
x_c - x_3 &= \frac{m_2 b^3 (x_2 - x_3) + m_1 a^3 (x_1 - x_3)}{M},
\end{aligned}\right. \qquad (8)
$$

$$y_c - y_1 = \frac{m_2\, b^3 (y_2 - y_1) + m_3\, c^3 (y_3 - y_2)}{M} \text{ etc.}$$

$$z_c - z_2 = \frac{m_1\, a^3 (z_1 - z_2) + m_3\, c^3 (z_3 - z_2)}{M} \text{ etc.}$$

et en outre cela encore:

$$\left.\begin{aligned}
&\cos(b, c) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\, b\, c} = \\
&= \frac{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1) + (z_2 - z_1)(z_3 - z_1)}{b\, c} \\
&\cos(c, a) = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2\, c\, a} = \\
&= \frac{(x_3 - x_2)(x_1 - x_2) + (y_3 - y_2)(y_1 - y_2) + (z_3 - z_2)(z_1 - z_2)}{c\, a} \\
&\cos(a, b) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\, a\, b} = \\
&= \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) + (y_1 - y_3)(y_2 - y_3) + (z_1 - z_3)(z_2 - z_3)}{a\, b}
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Comme

$$a = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2},$$
$$b = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2},$$
$$c = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

en elévant au carré les sommes $x_1'' + x_2'' + x_3''$, $y_1'' + y_2'' + y_3''$, $z_1'' + z_2'' + z_3''$ on a d'après addition en raison des (6), (8), (9) l'expression suivante pour l'accélération du système

$$g = \sqrt{(x_1'' + x_2'' + x_3'')^2 + (y_1'' + y_2'' + y_3'')^2 + (z_1'' + z_2'' + z_3)^2}$$

$$\begin{aligned}
g = \frac{1}{a^2 b^2 c^2} \Big[& (m_1^2 + m_2^2)\, a^4 b^4 + (m_2^2 + m_3^2)\, b^4 c^4 + \\
& + (m_3^2 + m_1^2)\, c^4 a^4 + m_1 m_2\, a\, b\, (a^2 + b^2 - c^2) + \\
& + m_2 m_3\, b\, c\, (b^2 + c^2 - a^2) + m_3 m_1\, c\, a\, (c^2 + a^2 - b^2) \Big]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \quad (10)$$

C'est clair que la gravitation du système doit être:

$$\begin{aligned}
\mathrm{F} = \Big[& (m_1^2 + m_2^2)\, a^4 b^4 + (m_2^2 + m_3^2)\, b^4 c^4 + (m_3^2 + m_1^2)\, c^4 a^4 + \\
& + m_1 m_2\, a\, b\, (a^2 + b^2 - c^2) + m_2 m_3\, b\, c\, (b^2 + c^2 - a^2) + \\
& + m_3 m_1\, c\, a\, (c^2 + a^2 - b^2) \Big]^{\frac{1}{2}} \; \frac{m_1 + m_2 + m_3}{a^3 b^3 c^3}
\end{aligned} \quad (11)$$

Kiev, le 15. decembre 1932.

Une chose qui compense les théorèmes de Sturm et de Sylvester

(par. Vl. P. Dobrovolsky).

Soit α l'une des racines réelles de l'équation du degré n entier aux coëfficients réels:

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n = 0.$$

Comme $f(\alpha) = 0$ il est aisé à controlêr que au dedans du domaine de chaque racine réelle la fonction de Sylvester

$$U(x) = (n-1)[f'(x)]^2 - n f(x) f''(x) \qquad (1)$$

est positive. Dans le cas des toutes les racines réelles en vertu d'une inégalité connue de Cauchy pour n quantités réelles à savoir:

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 > \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{n}$$

on a:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right] = \frac{[f'(x)]^2 - f(x) f''(x)}{[f(x)]^2} = \sum \left(\frac{1}{x-\alpha}\right)^2 >$$

$$> \frac{1}{n}\left[\sum \frac{1}{x-\alpha}\right]^2 = \frac{1}{n}\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]^2 > 0.$$

C'est pourquoi dans le cas présent quand l'équation donnée $f(x) = 0$ admeut seulement les racines réelles en raison de théorème de Rolle on aura:

$$(n-1)[f'(x)]^2 - n f(x) f''(x) > 0$$

$$(n-2)[f''(x)]^2 - (n-1) f'(x) f'''(x) > 0$$

$$(n-k)\left[\overset{(k)}{f}(x)\right]^2 - (n-k+1)\overset{(k-1)}{f}(x)\overset{(k+1)}{f}(x) > 0$$

d'une autre manierè

$$\begin{aligned} &[f'(x)]^2 - f(x) f''(x) > \frac{[f'(x)]^2}{n} > 0 \\ &[f''(x)]^2 - f'(x) f'''(x) > \frac{[f''(x)]^2}{n-1} > 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

$$\left[\overset{(k)}{f}(x)\right]^2 - \overset{(k-1)}{f}(x)\overset{(k+1)}{f}(x) > \frac{[\overset{(k)}{f}(x)]^2}{n-k+1} > 0$$

pour chaque x réelle de $x = -\infty$ à $x = +\infty$. Dans le cas quand l'équation $f(x) = 0$ admet les racines réelles et imaginaires, toutes les fonctions (2) y compris la fonction de Sylvester $U(x)$ et la fonction

$$V(x) = [f'(x)]^2 - f(x) f''(x) \qquad (3)$$

pour $x = k$ arbitraire réelle peuvent changer son signe. C'est clair que pour l'equation:

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{x-\alpha} =$$

$$= A_0 x^{n-1} + (A_0\alpha + A_1) x^{n-2} + (A_0\alpha^2 + A_1\alpha + A_2) x^{n-3} + \ldots = 0 \quad (4)$$

les fonctions précédentes $V(x)$ et $U(x)$ prennent la forme:

$$[\varphi'(x)]^2 - \varphi(x)\varphi''(x) =$$

$$= \frac{1}{(x-\alpha)^4}\Big[\{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)\}(x-\alpha)^2 - [f(x)]^2\Big] = \frac{V_1(x)}{(x-\alpha)^4} \quad (5)$$

$$(n-2)[\varphi'(x)]^2 - (n-1)\varphi(x)\varphi''(x) =$$

$$= \frac{1}{(x-\alpha)^4}\Big[\{(n-2)[f'(x)]^2 - (n-1)f(x)f''(x)\}(x-\alpha)^2 +$$

$$+ 2f(x)f'(x)(x-\alpha) - n[f'(x)]^2\Big] = \frac{U_1(x)}{(x-\alpha)^4} \quad (6)$$

Suivant le genre des racines de $f(x) = 0$ qui sont comprises en voisinage du nombre réel arbitraire $x = k$ la fonction:

$$W(x) = (n-2)[f'(x)]^2 - (n-1)f(x)f''(x) \quad (7)$$

peut changer son signe de même que les fonctions $V(x)$ et $U(x)$. Cela posé quatre cas possibles sont à distinguer.

Premier cas. Soient $U(k) > W(k) > 0$ et $V(k) > 0$. Cela designe que $\quad V(k) = [f'(k)]^2 - f(k)f''(k) > \frac{[f'(k)]^2}{n-1} > \frac{[f'(k)]^2}{n} > 0$

Comme:

$$f(k) = \varphi(k)[k-\alpha], \qquad f'(k) = \varphi'(k)[k-\alpha] + \varphi(k),$$

$$f''(k) = \varphi''(k)[k-\alpha] + 2\varphi'(k)$$

on aura:

$$U(k) = \{(n-1)[\varphi'(k)]^2 - n\varphi(k)\varphi''(k)\}[k-\alpha]^2 -$$

$$- 2\varphi(k)\varphi'(k)[k-\alpha] + (n-1)[\varphi(k)]^2 > 0$$

$$W(k) = \{(n-2)[\varphi'(k)]^2 - (n-1)\varphi(k)\varphi''(k)\}[k-\alpha]^2 -$$

$$- 2\varphi(k)\varphi'(k)[k-\alpha] + (n-2)[\varphi(k)]^2 > 0.$$

En outre la condition de réalité pour $[k-\alpha]$ dans le trinôme du second degré $A[k-\alpha]^2 + B[k-\alpha] + C > 0$, à savoir $B^2 - 4AC \geqq 0$, pour les fonctions précedentes $U(k)$ et $W(k)$ prend la forme:

$$[\varphi'(k)]^2 - \varphi(k)\varphi'(k) \leqq \frac{[\varphi'(k)]^2}{n-1} < \frac{[\varphi'(k)]}{n-2}$$

En raison de (6) on déduit de la que

$$W(k)[k-\alpha]^2 + 2f(k)f'(k)[k-\alpha] - n[f'(k)]^2 \geqq 0 \quad (8)$$

Suivant la nature du trinôme quadratique par rapport à $[k - \alpha]$ cette dernière inégalité (8) admet les deux solutions suivantes:

$$k - \alpha_1 \gtrless \frac{- f(k)\{f'(k) - \sqrt{(n-1)\,U(k)}\}}{W(k)}$$

$$\text{et}\quad k - \alpha_2 \gtrless \frac{- (f\,k)\{f'(k) + \sqrt{(n-1)\,U(k)}\}}{W(k)}$$

D'une autre manière on a:

$$\alpha_1 \gtrless k + \frac{f(k)\{f'(k) - \sqrt{(n-1)\,U(k)}\}}{W(k)} \tag{9}$$

$$\text{et}\quad \alpha_2 \gtrless k + \frac{f(k)\{f'(k) + \sqrt{(n-1)\,U(k)}\}}{W(k)}$$

Ainsi donc aux conditions que $U(k) > W(k) > 0$ et $V(k) > 0$ en voisinage du nombre réel $x = k$ existent les deux racines réelles de l'équation $f(x) = 0$ non comprises entre

$$x = k + \frac{f(k)\{f'(k) - \sqrt{(n-1)\,U(k)}\}}{W(k)} \tag{10}$$

$$\text{et}\quad x = k + \frac{f(x)\{f'(k) + \sqrt{(n-1)\,U(k)}\}}{W(k)}$$

Pour $U(k) = 0$ ces racines sont multiples.

Exemple 1. Trouver les limites pour les racines réelles de l'équation

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$$

en voisinage du nombre $k = 1$.

On a: $f(k) = -24$, $f'(k) = 0$, $f''(k) = 12$, $U(k) = 846 > 0$. Donc $\alpha_1 < 1 - \sqrt{3}$, $\alpha_2 > 1 + \sqrt{3}$. L'intervalle de $1 - \sqrt{3}$ à $1 + \sqrt{3}$ ne contient pas des racines réelles.

Deuxième cas. Soient $U(k) > 0$, $W(k) < 0$, $V(k) > 0$, autrement:

$$\frac{[f'(k)]^2}{n-1} > [f'(k)]^2 - f(k)\,f''(k) \geqq \frac{f'(k)}{n} > 0$$

Comme auparavant on déduit de cette condition que l'inégalité (8)

$$W(k)\,[k - \alpha]^2 + 2\,f(k)\,f'(k)\,[k - \alpha] - n\,[f(k)]^2 > 0$$

suivant la nature du trinôme quadratique $A\,[k - \alpha]^2 + B\,[k - x] + C > 0$, découle du même principe $B^2 - 4\,A\,C > 0$. Par la raison que $W(k) < 0$ l'inégalité (8) admet dans le cas présent la solution:

$$\frac{-f(k)\{f'(k)-\sqrt{(n-1)U(k)}\}}{W(k)} \gtrless k-\alpha \gtrless \frac{-f'(k)\{f'(k)+\sqrt{(n-1)U(k)}\}}{W(k)}$$

Cela revient au même

$$k+\frac{-f(k)\{f'(k)-\sqrt{(n-1)U(k)}\}}{W(k)} \gtrless \alpha \gtrless k+\frac{f(k)\{f'(k)+\sqrt{(n-1)U(k)}\}}{W(k)}$$

Ainsi donc aux conditions $U(k) > 0$, $W(k) < 0$, $V(k) > 0$ en voisinage du nombre réel $x = k$ il existe l'une des racines réelles, égales ou multiples de l'équation $f(x) = 0$ comprise en dedans d'intervallo de

$$x = k + \frac{f(k)\{f'(k) - \sqrt{(n-1)U(k)}\}}{W(k)} \qquad \text{(10 bis)}$$

$$x = k + \frac{f(k)\}f'(k) + \sqrt{(n-1)U(k)}\}}{W(k)}$$

Exemple 2. Trouver les limites ponr la racine réelle de l'équation

$$f(x) = x^3 - 3x - 2 = 0$$

en voisinage du nombre donné $k = -2$.

On a: $f(k) = -4$, $f'(k) = 9$, $f''(k) = -12$, $V(k) = 33 > 0$, $U(k) = 18 > 0$, $W(k) = -15 < 0$.

Donc: $2 \geqq \alpha > -1,\ 1$

Troisième cas. Soient $U(k) < 0$, $W(k) < 0$, $V(k) \gtrless 0$,c'est á dire:

$$\frac{[f'(k)]^2}{n-1} > \frac{[f'(k)]^2}{n} > [f'(k)]^2 - f(k)f''(k) \text{ et } V(k) = [f'(k)]^2 - f(k)f''(k) \gtrless 0$$

On a dans ce cas

$$W(k)[k-\alpha]^2 + 2f(k)f'(k)[k-\alpha) - n[f(k)]^2 \leqq 0.$$

Suivant la nature du trimôme du second degré par rapport à $[k - \alpha]$, savoir $A[k-\alpha]^2 + B[k-\alpha]^2 + C < 0$ ou $A < 0$, $B^2 - 4AC \leqq 0$, on peut conclure que dans ce cas il n'y a aucunes limites réelles pour les racines de l'équation $f(x) = 0$. Donc aux conditions $U(k) < 0$, $W(k) < 0$, $V(k) \gtrless 0$ l'équation donnée admet les racines imaginaires de la forme $\alpha \pm \beta i$ dont le module de la partie réelle est compris en voisinage de $x = k$.

Quatrième cas. Soient $U(k) < 0$, $W(k) < 0$, $V(k) < 0$, en d'autres termes

$$\frac{[f'(k)]^2}{n-1} > \frac{[f'(k)]^2}{n} > [f'(k)]^2 \quad f(k)f''(k)$$

Prenant en considération que — suivant l'inégalité de Cauchy —

$$[a_1 i]^2 + [a_2 i]^2 + \quad + [a_n i]^2 \leqq \frac{[a_1 i + a_2 i + \ldots + a_n i]^2}{n}$$

on déduit que cela devient au même

$$\sum\left[\frac{1}{x-\alpha}\right]^2 \leqq \frac{1}{n}\left[\sum\frac{1}{x-\alpha}\right]^2 \text{ ou } [f'(x)]^2 - f(x)\,f''(x) < \frac{[f'(x)]^2}{n} \leqq \frac{[f'(x)]^2}{n-1}$$

et $V(x) \leqq 0$ pour $x = yi$ et $\alpha = \beta i$. Donc aux conditions $U(k) < 0$, $W(k) < 0$, $V(k) \leqq 0$ en voisinage du nombre réel $x = k$ sont comprises les racines imaginaires de l'équation $f(x) = 0$ de la forme $\pm\beta i$ dont le module est compris en voisinage de $x = k$.

Problème de Newton. Trouver les limites des racines positives et negatives réelles de l'équation

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n = 0.$$

$$\text{Min } (\alpha \text{ positive}) > \frac{f(0)\{f'(0) + \sqrt{(n-1)\,W(0)}\}}{W(0)}$$

$$\text{et Max } (\alpha \text{ négative}) < \frac{f(0)\{f'(0) - \sqrt{(n-1)\,f(0)}\}}{W(0)}$$

et au rebours dans les autres cas. En faisant la même operation pour l'équation

$$\Phi(y) = f'(x) = A_n y^n + A_{n-1} y^{n-1} + \qquad + A_0 = o$$

on aura les autres limites pour Max (α positive) et Min (α négative).

Exemple 3. Pour l'équation:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 6x + 12 = 0$$

on a: $f(0) = 12$, $f'(0) = 6$, $f''(0) = -14$, $U(0) = 780$, $W(0) = 576$. Donc:

$$\text{Min } (\alpha \text{ posit.}) > \frac{1+\sqrt{15}}{8} \text{ et Max } (\alpha \text{ négat.}) < \frac{1-\sqrt{15}}{8}$$

D'apres la même opération pour l'équation:

$$\Phi(y) = 12y^4 + 6y^3 \quad 7y^2 - 2y + 1 = 0$$

on aura: $\Phi(0) = 1$, $\Phi'(0) = -2$, $\Phi''(0) = -14$, $U(0) = 68$, $W(0) = 50$. Donc:

$$\text{Max } (\alpha \text{ posit.}) > \frac{25}{-1+\sqrt{19}} \text{ et Min } (\alpha \text{ négat.}) < \frac{25}{-1-\sqrt{19}}$$

Problèmes de Sturm et de Sylvester: Combien des racines imaginaires sont comprises entre $x = a$ et $x = b$ où $b > a$ on résout par cette manière suivante. En posant successivement dans (10) ou (10 bis) le nombre $k = a$, $a + \frac{b-a}{n}$, $a + \frac{2(b-a)}{n}\ldots$ on aura les limites des toutes les racines comprises dans l'intervalle (a, b). On peut prendre et les autres nombres.

Exemple 4. Combien des racines réelles de l'équation

$$f(x) = 4x^5 \quad 3x^4 + 3x^3 - 9x^2 - x + 3 = 0$$

sont compris entre -1 et $+1$?

On a: $k = -1, 0, = 1$. Pour $k = -1$ on aura: $f(\ 1) = -15$, $f'(-1) = 58$, $f''(-1) = -152$, $V(-1) = 5644 > 0$, $U(-1) = 24856 > 0$, $W(-1) = 19212$. Donc $\alpha_1 < -1{,}16$ $\alpha_2 > -0{,}93$. L'intervalle $x = (-1{,}16 \ldots -0{,}93)$ ne contient pas des racines.

Pour $k = 0$ on aura: $f(0) = 3$, $f'(0) = -1$, $f''(0) = -18$, $V(0) = 55 > 0$, $U(0) = 274 > 0$, $W(0) = 219 > 0$. Donc $\alpha_1 < -0{,}4$ et $\alpha_2 > 0{,}4$. L'intervalle $(-0{,}4, \ldots + 0{,}4)$ ne contient pas des racines.

Pour $k = 1$ on aura: $f(1) = -3$, $f'(1) = -2$, $f''(1) = 44$, $V(1) = 136 > 0$, $U(1) = 676 > 0$, $W(1) = 540 > 0$. Donc $\alpha_1 > 1{,}3$ $\alpha_2 < 0{,}8$. L'intervalle $(0{,}8 \ldots 1{,}3)$ ne contient pas des racines.

On déduit de la que les intervalles $(-0{,}93, \ldots 0{,}4)$ et $(0{,}4, \ldots 0{,}8)$ peuvent contenir une à une des racines réelles. Cela on peut contrôler en posant $k = \pm 0{,}6$.

Exemple 5. Combien des racines réelles de l'équation

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 2x - 8 = 0$$

sont comprises entre -1 et 2? On a les nombres successives $k = -1, 0, 1, 2$

Dont pour $k = -1$ on aura: $f(-1) = 10$, $f'(-1) = 24$, $f''(-1) = -14$, $V(-1) = 581 > 0$, $U(-1) = 3647 > 0$, $W(-1) = 2625 > 0$, $\alpha_1 > -0{,}7$, $\alpha_2 < -1{,}02$. L'intervalle $(1{,}02 \ldots -0{,}7)$ ne contient pas des racines.

Pour $k = 0$ on aura: $f(0) = -8$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = -14$, $V(0) = -108 < 0$, $U(0) = -406 < 0$, $W(0) = -324 < 0$. En voisinage de $k = 0$ existent deux racines imaginaires de la forme $x = \pm a i$.

Pour $k = 1$ on aura: $f(1) = -10$, $f'(1) = -2$, $f''(1) = 10$, $V(1) = 104 > 0$, $U(1) = 412 > 0$, $W(1) = 308 > 0$. Donc $\alpha_1 > 1{,}2$ $\alpha_2 < 1{,}02$. L'intervalle $(1{,}02 \quad 1{,}2)$ ne contient pas des racines.

Comme $f(2) = 0$, on peut en déduire que en dedans d'intervalle de -1 à 2 sont comprises seulement toutes les deux racines de la forme $\pm ai$.

Kiev, le 14. décembre 1932.

CLXXXVI. Sitzung am 27. Februar 1933.

Vorsitzender Hr. Levyćkyj.

1. Das Erscheinen der ärztlichen Sammelschrift XI. 1. wurde zur Kenntnis genommen.

2. Als Vortragende seitens der Sektion an der Ševčenko-Feier, die im namens unserer Gesellschaft März l. J. stattfinden solle,

wurden die Herren R. Cehelśkyj (mit dem Vortrag über die wissenschaftliche Tätigkeit der Gesellschaft im 1932 J.), sowie G. Polanśkyj (mit dem Vortrag über Polissje) designiert.

3. Der Vorsitzende legt die Arbeit des Hrn. M. Kurenśkyj (Leningrad) u. T. Die Grundformeln zur Integration der Gleichungen mit partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung mit mehreren abhängigen und unabhängigen Variablen (II. Teil)" vor.

Diese Arbeit erscheint im vorliegenden Heft der „Sitzungsberichte".

4. Hr. Polanśkyj legt eine Arbeit des Hrn. Krupśkyj (Krasnodar) vor mit der Bemerkung, das dieselbe wegen ihres populären Charakters den Satzungen der Gesellschaft nicht entspricht.

5. Hr. A. Lastovećkyj berichtet über seine spektrographische Untersuchungen (Röntgen-Spektrogramm) einer Graphitart vom Berge Čyvčyn (Ostkarpathen).

Die Grundformeln zur Integration der Gleichungen mit partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung mit mehreren abhängigen und unabhängigen Variablen.

Zweiter Teil[1]).

(von M. K. Kurenśkyj (Kurensky)).

VIII. Die Jacobi'sche Integrationsmethode einer nichtlinearen Gleichung mit partiellen Ableitungen 1. Ordnung mit einer unbekannten Funktion, sowie auch die Darboux'-sche Integrationsmethode einer nichtlinearen Gleichung mit partiellen Ableitungen 2. Ordnung mit einer Funktion basieren sich auf demselben Prinzip — der Übereinstimmungsbedingungen der gegebenen und der neuen, ihr zugeordneten Gleichung. Das führt zu einer linearen Gleichung mit einer unbekannten Hilfsfunktion Φ in der Jacobi'schen Methode, oder zu einem System von zwei linearen Gleichungen 1. Ordnung mit einer unbekannten Funktion Φ

[1]) Vgl. die Arbeiten des Verfassers in: Sitzungsberichte der math. naturw. ärztl. Sektion Heft XI. 1929. sowie auch Heft XII. 1930; Comptes rendus de l'Acad. d Sciences Paris t. 191, 1930; Rendiconti del Circ. mat. di Palermo t. LV, 1931; Proceed. of the London Math. Soc. vol. 31. 1930; Rendiconti della R. Acad. N. dei Lincei, vol. X, 1929; Annali di Matem. t. VIII. 1930-1931; Rendiconti del Circ. mat. di Palermo t. LVI. 1932; Arbeiten der naturw.-techn. Abteil. der Akad. der Wissensel. in Kyjiv 1931 (ukrain.), wo der Verfasser den I. Teil seiner Untersuchungen entwickelte. Vgl. auch Rendiconti della R. Acad. N. dei Lincei, vol. XIV 1931, vol. XV 1932, vol. XVI und vol. XVII 1933, wo der Verfasser eine Übersicht von zwei Abschnitten des II Teiles bekannt gegeben hat; vgl. ferner Bulletin de l'Acad. de Belgique 1933, sowie auch die Arbeiten des internat. Mathemat. Kongresses in Zürich 1932. Weitere Teile III-V erscheinen später in den „Sitzungsberichten".

in der Integrationsmethode von Darboux für eine nichtlineare Gleichung 2. Ordnung [1]). Infolge dessen kann man diese beiden Integrationsmethoden der Gleichungen 1. und 2. Ordnung einer unbekannten Funktion als die Jacobi-Darboux-Methode zusammenfassen.

Der II. Teil meiner Arbeit behandelt eine Abkürzung und Verallgemeinerung der Darboux-schen Integrationsmethode der nichtlinearen Gleichung 2. Ordnung mit einer und zwei unbekannten Funktionen; der III. Teil wird die Grundformeln der verallgemeinerten Integrationsmethode der nichtlinearen Gleichung 1. Ordnung mit zwei oder mehreren unbekannten Funktionen entwickeln.

Die Darboux'sche Integrationsmethode war bis unlängst die einzige bekannte Methode der Integration einer nichtlinearen Gleichung 2. Ordnung mit einer unbekannten Funktion z. Ihr wurde eine ziemlich bedeutende mathematische Literatur gewidmet.

Im V. Abschnitt wurden einige Abkürzungen, Beiträge und Korrekturen der Forsyth'-schen Formeln für die Integration einer nichtlinearen Gleichung 2. Ordnung mit einer unbekannten Funktion z, falls die Gleichung 3 Ableitungen 2. Ordnung r, s, t, enthält, angegeben.

Statt des Forsyth' schen Systemes von zwei linearen Hilfsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} R\,T\frac{d\,\Phi}{d\,x} + \lambda_i R T\frac{d\,\Phi}{d\,y} - \Xi\, T\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,r} - \lambda_i\, R\, H\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,t} = 0 \\ \lambda_j{}^2\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,r} - \lambda_j\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,s} + \frac{\partial\,\Phi}{\partial\,t} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

wobei λ, λ_j verschiedene Auflösungen der charakteristischen Gleichung:

$$R\,\lambda^2 - S\,\lambda + T = 0 \qquad (2)$$

darstellen, und

$$\frac{d\,F}{d\,x} = \Xi = X + Zp + Pr + Qs\,;\ \frac{d\,F}{d\,y} = H = Y + Zq + Ps + Qt\,;\ \frac{\partial\,F}{\partial\,r} = R; \ldots$$

bedeuten, bekommen wir eine der drei linearen Gleichungen (27) des V. Abschnittes (Sitzungsber. XI) und eine der zwei linearen Gleichungen (28), Abschn. V, z. B.

$$\left.\begin{aligned} \lambda_i\, T\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,r} - T\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,s} + (S - \lambda_i R)\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,t} = 0 \\ \lambda_i\, R\frac{d\,\Phi}{d\,x} + T\frac{d\,\Phi}{d\,y} - \lambda_i\,\Xi\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,r} - H\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,t} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

— λ_i eine Auflösung der Gleichung (2). Das System (1) ist dem System (3) für $\lambda_i = \lambda_j$ äquivalent. Die Forsyth'schen Beschränkungen:

[1]) Vgl. das bekannte Buch von A. R. Forsyth Bd. VI.

$$1).\ \frac{\partial F}{\partial r} \neq 0, \qquad 2).\ D\left(\frac{F_1 \Phi}{r, s}\right) \neq 0 \qquad (4)$$

sind trotz der Versicherungen von A. R. Forsyth nicht immer stichhaltig, und man kann die Kombination (4) mit irgend einer der 40 Kombinationen des Abschn. V. vertauschen, um die Darboux'-sche Integrationsmethode anwenden zu können.

Wir bekommen die Forsyth'schen Übereinstimmungen, sowie auch die Gleichungen (27), (28) des V. Abschn., indem wir gleich setzen drei von den 5 Verhältnissen:

$$\frac{(r\,t)}{(r\,s)};\ \frac{[r\,x]+[s\,y]}{[r\,y]};\ \frac{[y\,t]}{[rx]};\ \frac{[t\,x]}{[t\,y]+[s\,x]};\ \frac{[t\,s]}{[t\,r]}, \qquad (5)$$

wobei die Klammern die Determinanten 2. Ordnung der Matrix:

$$\left\|\begin{matrix} R & S & T & \Xi & H \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r} & \frac{\partial \Phi}{\partial s} & \frac{\partial \Phi}{\partial t} & \frac{d \Phi}{d x} & \frac{d \Phi}{d y} \end{matrix}\right\| \qquad (6)$$

bezeichnen.

Man kann die Verhältnisse (5) — auf Grund der Abhängigkeit der Determinanten der Matrix (6) — durch andere äquivalente vertauschen. Man kann die Bedingungen der Übereinstimmung der drei Gleichungen:

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0;\ \Phi_i\,(x, y, z, p, q, r, s, t) = C_i\ \ (i = 1, 2)$$

entweder für jede von 3 Paaren prüfen, oder, wie es Forsyth angibt, ohne weiteres für 3 Gleichungen in seiner Form:

$$D\left[\frac{F, \Phi_1, \Phi_2}{r, x, t}\right] = D\left[\frac{F, \Phi_1, \Phi_2}{y, s, t}\right];\quad D\left[\frac{F, \Phi_1, \Phi_2}{r, s, x}\right] = D\left[\frac{F, \Phi_1, \Phi_2}{r, y, t}\right] \qquad (7)$$

oder in einer anderen Form, mit den Abschn. V, VI übereinstimmend, niederschreiben.

Um die Gleichung $F(x, y, z, p, q, r, t) = 0$, in welcher die Ableitung s nicht vorkommt, zu integrieren, muss man auf Grund der Untersuchung aller 40 Determinanten 3. Ordnung $\triangle^r_{pq}$ die Nullungleichheiten einer von 16 Determinanten in Betracht nehmen.

$$\text{Falls } 1)\ \triangle^1_{23}, \frac{\partial \Phi}{\partial t} \gtrless 0,\ [y, t] \gtrless 0, \text{ oder } 2)\ \triangle^2_{23}, \frac{\partial F}{\partial t} \gtrless 0,\ [y,t] \gtrless 0$$

sind, dann haben wir entweder ein Hilfssystem von linearen Gleichungen 1. Ordnung:

$$\left.\begin{aligned} R\frac{\partial \Phi}{\partial t} - T\frac{\partial \Phi}{\partial r} &= 0 \\ T\frac{\partial \Phi}{\partial x} + Tp\frac{\partial \Phi}{\partial z} + Tr\frac{\partial \Phi}{\partial p} + Ts\frac{\partial \Phi}{\partial q} - \Xi\frac{\partial \Phi}{\partial t} &= 0 \end{aligned}\right\} (8)$$

oder nur das erste von diesen linearen Gleichungen; man muss die Integrale $\Phi_1 = C$, $\Phi_2 = C_2$, die s nicht enthalten, suchen.

Ist 3) $\triangle^3_{23}, \frac{\partial \Phi}{\partial t} \gtrless 0, [x,t] \gtrless 0,$ oder 4) $\triangle^4_{23}, \frac{\partial F}{\partial t} \gtrless 0, [x,t] \gtrless 0,$

so bekommt das System (8) die Form:

$$\left.\begin{aligned} R\frac{\partial \Phi}{\partial t} - T\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \\ T\frac{\partial \Phi}{\partial y} + Tq\frac{\partial \Phi}{\partial z} + Ts\frac{\partial \Phi}{\partial p} + Tt\frac{\partial \Phi}{\partial q} - H\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Ist 5) $\triangle^1_{23}, \frac{\partial \Phi}{\partial t} \gtrless 0, [y,r] \gtrless 0,$ oder 6) $\triangle^2_{25}, \frac{\partial F}{\partial t} \gtrless 0, [y,r] \gtrless 0,$

dann bekommt man:

$$\left.\begin{aligned} R\frac{\partial \Phi}{\partial t} - T\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \\ R\frac{\partial \Phi}{\partial x} + Rp\frac{\partial \Phi}{\partial z} + Rz\frac{\partial \Phi}{\partial p} + Rs\frac{\partial \Phi}{\partial q} - \Xi\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Im Falle 7) $\triangle^3_{25}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \gtrless 0, [x,t] \gtrless 0,$ oder 8) $\triangle^4_{25}, \frac{\partial F}{\partial z} \gtrless 0, [x,t] \gtrless 0$

bekommt man:

$$\left.\begin{aligned} R\frac{\partial \Phi}{\partial t} - T\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \\ R\frac{\partial \Phi}{\partial y} + Rq\frac{\partial \Phi}{\partial z} + Rs\frac{\partial \Phi}{\partial p} + Rt\frac{\partial \Phi}{\partial q} - H\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Im Falle 9) $\triangle^1_{34}, \frac{\partial \Phi}{\partial r} \gtrless 0, [y,t] \gtrless 0,$ oder 10) $\triangle^2_{34}, \frac{\partial F}{\partial z} \gtrless 0, [y,t] \gtrless 0,$
bekommt man das System (10).

Im Falle 11) $\triangle^3_{34}, \frac{\partial \Phi}{\partial t} \gtrless 0, [x,r] \gtrless 0,$ oder 12) $\triangle^4_{34}, \frac{\partial F}{\partial t} \gtrless 0, [x,r] \gtrless 0,$
bekommt man das System (9).

Im Falle 13) $\triangle^1_{45}, \frac{\partial F}{\partial r} \gtrless 0, [y,r]\, 0, \gtrless$ oder 14) $\triangle^2_{45}, \frac{\partial F}{\partial r} \gtrless 0, [y,r] \gtrless 0,$
bekommt man das System (10).

Im Falle 15) $\triangle^3_{45}, \frac{\partial \Phi}{\partial r} \gtrless 0, [x,r] \gtrless 0,$ oder 16) $\triangle^4_{45}, \frac{\partial F}{\partial r} \gtrless 0, [x,r] \gtrless 0,$
bekommt man das System (11).

In allen Fällen wird die Gleichung $\Phi_1 = C_1$, mit der gegebenen Gleichung $F = 0$ übereinstimmend, durch eine gewöhnliche Differentialgleichung:

$$\frac{dt}{dr}+\frac{R}{T}=0 \tag{12}$$

bestimmt; man muss das Integral $\Phi_1=C_1$, das die Variable s nicht enthält, bestimmen. Die zweite Gleichung $\Phi_2=C_2$ muss man in der Gestalt eines partikulären Integrals, das s nicht enthält, eines der Systeme (8)-(11), oder eines dem Systeme (7) analogen Systemes zu bestimmen trachten. Wird irgend ein System (7)-(11) übereinstimmend und bekommen wir mittelst desselben das Integral $\Phi_2=C_2$, welches s nicht enthält und welches mit den Gleichungen $\Phi_1=C_1$, $F=0$ ein System von 3 übereinstimmenden Gleichungen bildet, dann führt die Elimination von r, t, s aus den Gleichungen $F=0$, $\Phi_1=C_1$, $\Phi_2=C_2$ zum mittelbaren Integral: $f(x,y,z,p,q,C_1,C_2)=0$.

Sind alle Systeme (8)-(11) unübereinstimmend, und findet man ein von s unabhängiges Integral der gewöhnlichen Gleichung (12), dann müsste man die dritte Gleichung in der Gestalt: $\Psi(x,y,z,p,q,r,s,t)=\text{const.}$ im Systeme der Form (7), wo F, Φ_1, Φ_2 entsprechend F, Φ_1, Ψ bedeuten, suchen. Die unbekannte Funktion z findet man aus der Relationen:

$$dp=r\,dx+s\,dy;\quad dq=s\,dx+t\,dy;\quad dz=p\,dx+x\,dy.$$

Das Übereinstimmen aller angeführten Systeme ist gesichert, da allen denselben das gemeinsame Integral $F=0$ entspricht; doch können die Systeme unvollständig sein und kein anderes, von $F=0$ verschiedenes und mit demselben übereinstimmendes Integral besitzen.

Für die Gleichung $F(x,y,z,p,q,s,t)=0$ ohne r kann man das Integral, das r nicht enthält, schlechterdings aus der gewöhnlichen Differentialgleichung:

$$\frac{dt}{ds}+\frac{S}{T}=0 \tag{13}$$

bestimmen, oder auf Grund von nur einem Systeme von 2 linearen Gleichungen:

$$S\frac{\partial\Phi}{\partial t}-T\frac{\partial\Phi}{\partial s}=0 \tag{14}$$

$$S\frac{\partial\Phi}{\partial x}+T\frac{\partial\Phi}{\partial y}+(Sp+Tq)\frac{\partial\Phi}{\partial z}+(Sz+Ts)\frac{\partial\Phi}{\partial p}+(Ss+Tt)\frac{\partial\Phi}{\partial q}-$$
$$-\Xi\frac{\partial\Phi}{\partial s}-H\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0 \tag{15}$$

oder endlich auf Grund eines Systemes der gewöhnlichen Gleichungen, welches aus der letzten linearen Gleichung 1. Ordnung folgt. Alle diese Fälle entsprechen allen 16 Determinanten 3. Ordnung $\triangle_p^r$ $(r=1,2,3,4;$ $p=1,3,4\ 5)$.

Im Falle der Gleichung $F(x, y, z, p, q, r, s)$ ohne t bekommt man statt der Gleichungen (13), (14), (15) folgende:

$$\frac{dr}{ds} + \frac{S}{R} = 0.$$

$$R\frac{\partial \Phi}{\partial x} + S\frac{\partial \Phi}{\partial y} + (Rp + Sq)\frac{\partial \Phi}{\partial z} + (Rr + Ss)\frac{\partial \Phi}{\partial p} + (Rs + St)\frac{\partial \Phi}{\partial q} -$$
$$- \Xi\frac{\partial \Phi}{\partial r} - H\frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0.$$

Für die Gleichung $F(x, y, z, p, q, r) = 0$ ohne s und t muss man das folgende System der gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{dx}{R} = \frac{dz}{Rp} = \frac{dp}{Rr} = \frac{dq}{Rs} = \frac{dr}{-\Xi} = \frac{dt}{-H}$$

betrachten; für die Gleichung $F(x, y, z, p, q, t) = 0$ ohne s und r hat man das System:

$$\frac{dy}{T} = \frac{dz}{Tq} = \frac{dp}{Ts} = \frac{dq}{Tt} = \frac{ds}{-\Xi} = \frac{dt}{-H}$$

und für die Gleichung $F(x, y, z, p, q, s) = 0$ ohne r und t bekommt man die zweite Gleichung $\Phi_1 = C_1$, wenn wir aus dem System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\frac{dx}{S} = \frac{dz}{Sp} = \frac{dp}{Sr} = \frac{dq}{Ss} = \frac{ds}{-\Xi} = \frac{dt}{-H}$$

das Integral, welches t, aber kein r enthält, oder aus dem System:

$$\frac{dy}{S} = \frac{dz}{Sq} = \frac{dp}{Ss} = \frac{dq}{St} = \frac{dr}{-\Xi} = \frac{ds}{-H}$$

das Integral, welches r, aber kein t enthält, bestimmen.

VIII. Ausser meiner im Abschn. VI gegebenen Methode zur Integration eines Systemes nichtlinearer Gleichung 2. Ordnung mit zwei unbekannten Funktionen z, z' der unabhängigen Variabeln x, y:

$$F_1\,(x, y, z, z', p, q, p', q', r, s, t, r' s', t') = 0$$
$$F_2\,(x, y, z, z', p, q, p', q', r, s, t, r', s', t') = 0 \qquad (16)$$

wobei:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad g = \frac{dz}{\partial y}, \quad p' = \frac{dz'}{\partial x}, \quad q' = \frac{dz'}{\partial y}$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{d^2 r}{\partial x\, \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$r' = \frac{\partial^2 z'}{\partial x^2}, \quad s' = \frac{\partial^2 z'}{\partial x\, \partial y}, \quad t' = \frac{\partial^2 z'}{\partial y^2}$$

bedeuten, gab es keine Integrationsmethode.

In der mathematischen Literatur gibt es nicht einmal eine Andeutung dafür, wie man ein System linearer Gleichungen 2. Ordnung mit 2 unbekannten Funktionen integrieren soll, ausser der Methode der Differentiation eines Systemes nichtlinearer Gleichungen (16) oder entsprechender linearer Gleichungen und der Elimination einer von unbekannten Funktionen — sagen wir z' — und der Zurückführung der Integration des Systemes auf die Integration der Gleichungen höherer Ordnung, die im allgemeinen wegen der Differentiation dem gegebenen System 2. Ordnung nicht äquivalent sind.

Indem wir zum System (16) die Gleichung

$$\Phi(x, y, z, z', p, q, p', q', r, s, t, r', s' t') = \text{const.} \qquad (17)$$

adjungieren und die Bezeichnungen:

$$\Xi_i \equiv \frac{d F_i}{dx} = X_i + Z p + Z'_i p' + P_i r + Q_i s + P'_i r' + Q'_i s'$$

$$H \equiv \frac{d F_i}{dy} = Y_i + Z q + Z'_i q' + P_i s + Q t + P_i s' + Q'_i t'$$

$$X_i = \frac{\partial F_i}{\partial z}, \dots Q'_i = \frac{\partial F_i}{\partial q'}, \qquad T'_i = \frac{\partial F_i}{\partial t_i} \quad (i = 1, 2)$$

einführen, so bekommen wir auf Grund von Absch. VI die Übereinstimmungsbedingungen von 3 Gleichungen (16), (17) in der Form aller gleich Null Determinanten 6. Ordnung der Matrix:

$$\left\| \begin{array}{c|ccccc|ccc} \frac{d\Phi}{dx} & \frac{\partial\Phi}{\partial r} & \frac{\partial\Phi}{\partial s} & \frac{\partial\Phi}{\partial t} & 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial r'} & \frac{\partial\Phi}{\partial s'} & \frac{\partial\Phi}{\partial t'} & 0 \\ \Xi_1 & R_1 & S_1 & T_1 & 0 & R_1' & S_1' & T_1' & 0 \\ \Xi_2 & R_2 & S_2 & T_2 & 0 & R_2' & S_2' & T_2' & 0 \\ H_1 & 0 & R_1 & S_1 & T_1 & 0 & R_1' & S_1' & T_1' \\ H_2 & 0 & R_2 & S_2 & T_2 & 0 & R_2' & S_2' & T_2' \\ \frac{d\Phi}{dy} & 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial r} & \frac{\partial\Phi}{\partial s} & \frac{\partial\Phi}{\partial t} & 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial r'} & \frac{\partial\Phi}{\partial s'} & \frac{\partial\Phi}{\partial t'} \end{array} \right\| \qquad (18)$$

Für die Ungleichheit $\triangle^{1}_{1789} \neq 0$, d.h. für 1) $D\left(\frac{F_1, F_2}{r, r'}\right) \neq 0$, 1) $D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{r, s, t}\right) \neq 0$,

so wie auch für die Ungleichheit jeder anderen der 6 Determinantem $\triangle^{r}_{1789}$ $(r = 1, \dots 6)$ genügt es 4 entsprechende Determinanten der Matrix (18) gleich Null zu setzen. Das führt uns auf das System von 4 nichtlinearen Gleichungen 1. Ordnung einer unbekannten Funktion Φ. Indem wir für Jacobi'sche Determinanten Symbole:

$$D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{r, s, r'}\right) = (r\, s\, r'), \dots D\left[\frac{F_1, F_2, \Phi}{x, r, s}\right] = [x\, r\, s],$$

so wie auch die Bezeichnungen:

$$\frac{(r\,s\,r')}{(r\,t\,r')} = \lambda, \quad \frac{(r\,s\,t)}{(r\,t\,r')} = \mu$$

einführen, so kann man das System von 4 obengenannten nichtlinearen Gleichungen 1. Ordnung in der Gestalt:

$$\lambda = \frac{(r\,t\,t')}{(s\,t\,t')} = \frac{(r\,t\,r')}{(s\,t\,r')} + \mu\frac{(r\,s'\,r')}{(s\,t\,r')} = \frac{(r\,t\,s')}{(s\,t\,s')} + \mu\frac{(r\,t'\,r')}{(s\,t\,s')} = \frac{[r\,t\,y]}{[s\,t\,y]} + \mu\frac{[r'\,r\,x]}{[s\,t\,y]} \tag{20}$$

schreiben. Zur weiteren Abkürzung führen wir für Jacobi'sche Determinanten 2. Ordnung gegebener Funktionen F_1, F_2 in Bezug auf die Variablen $r, s, \ldots t', x, y$ Bezeichnungen:

$$\varrho = (s\,t),\ \sigma = (t\,r),\ \tau = (r\,s);\ \varrho' = (s'\,t'),\ \sigma' = (t'\,r'),\ \tau' = (r'\,s')$$

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= (r\,r'), & \sigma_1 &= (s\,r'), & \tau_1 &= (t\,r') \\ \varrho_2 &= (r\,s'), & \sigma_2 &= (s\,s'), & \tau_2 &= (t\,s') \\ \varrho_3 &= (r\,s'), & \sigma_3 &= (s\,t'), & \tau_3 &= (t\,t') \end{aligned} \tag{21}$$

$$\xi_1 = [r\,x],\ \xi_2 = [s\,x],\ \xi_3 = [t\,x];\ \xi'_1 = [r'\,x],\ \xi'_2 = [s'\,x],\ \xi'_3 = [t'\,x]$$

$$\eta_1 = [r\,y],\ \eta_2 = [s\,y],\ \eta_3 = [t\,y];\ \eta'_1 = [r'\,y],\ \eta'_2 = [s'\,y],\ \eta'_3 = [t'\,y]$$

wobei die Klammern Jacobi'sche Determinanten mit totalen Ableitungen in Bezug auf x, y unmittelbar, so wie auch mittelst $z, z'\,p, q, p', q'$ bezeichnen.

Falls wir Ausdrücke für λ und μ in der Form von gewissen Funktion von $x, y, z, z', p \ldots q'$ kennen werden, dann bekommt das System der nichtlinearen Gleichungen (19), (20) die Gestalt eines folgenden Systems von 6 linearen Gleichungen 1. Ordnung:

$$(\varrho - \mu\tau_1)\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \sigma\frac{\partial\Phi}{\partial s} + (\tau + \mu\varrho_1)\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \mu\sigma\frac{\partial\Phi}{\partial r'} = 0.$$

$$(\sigma_1 - \lambda\tau_1)\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \varrho_1\frac{\partial\Phi}{\partial s} + \lambda\varrho_1\frac{\partial\Phi}{\partial t} + (\tau + \lambda\sigma)\frac{\partial\Phi}{\partial r'} = 0.$$

$$\tau_3\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \lambda\tau_3\frac{\partial\Phi}{\partial s} + (\lambda\sigma_3 - \varrho_3)\frac{\partial\Phi}{\partial t} - (\sigma + \lambda\varrho)\frac{\partial\Phi}{\partial r'} = 0 \tag{22}$$

$$(\tau_1 - \mu\tau')\frac{\partial\Phi}{\partial r} \quad \lambda\tau_1\frac{\partial\Phi}{\partial s} + (\lambda\sigma_1 - \varrho_1)\frac{\partial\Phi}{\partial t} + (\mu\varrho_2 - \lambda\varrho - \sigma)\frac{\partial\Phi}{\partial r'} - \mu\varrho_1\frac{\partial\Phi}{\partial s'} = 0.$$

$$(\tau_2 + \mu\sigma')\frac{\partial\Phi}{\partial r} \quad \lambda\tau_2\frac{\partial\Phi}{\partial s} + (\lambda\sigma_2 - \varrho_2)\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \mu\varrho_3\frac{\partial\Phi}{\partial r'} - \mu\varrho_1\frac{\partial\Phi}{\partial t'} \quad (\sigma + \lambda\varrho)\frac{\partial\Phi}{\partial s'} = 0.$$

$$(\eta_3 - \mu\xi'_1)\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \lambda\eta_3\frac{\partial\Phi}{\partial s} + (\lambda\eta_2 - \eta_1)\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \mu\xi_1\frac{\partial\Phi}{\partial r'} - \mu\varrho_1\frac{d\Phi}{dx} - (\sigma + \lambda\varrho)\frac{d\Phi}{dy} = 0.$$

Erste 15 Determinanten (20) sind Determinanten der Matrix in Bezug auf die 2. Zeile und 6. Kolonne; unter ihnen bestehen folgende Gleichheiten:

$$\varrho\,\varrho_1 + \sigma\,\sigma_1 + \tau\,\tau_1 = 0. \qquad \varrho'\,\varrho_1 + \sigma'\,\varrho_2 + \tau'\,\varrho_3 = 0$$
$$\varrho\,\varrho_2 + \sigma\,\sigma_2 + \tau\,\tau_2 = 0 \qquad \varrho'\,\sigma_1 + \sigma'\,\sigma_2 + \tau'\,\sigma_3 = 0.$$
$$\varrho\,\varrho_3 + \sigma\,\sigma_3 + \tau\,\tau_3 = 0 \qquad \varrho'\,\tau_1 + \sigma'\,\tau_2 + \tau'\,\tau_3 = 0.$$
$$\varrho\,\varrho' = \begin{vmatrix} \sigma_2 & \sigma_3 \\ \tau_2 & \tau_3 \end{vmatrix}, \quad \sigma\,\varrho' = \begin{vmatrix} \tau_2 & \tau_3 \\ \varrho_2 & \varrho_3 \end{vmatrix}, \quad \tau\,\varrho' = \begin{vmatrix} \varrho_2 & \varrho_3 \\ \sigma_2 & \sigma_3 \end{vmatrix}$$
$$\varrho\,\sigma' = \begin{vmatrix} \sigma_3 & \sigma_1 \\ \tau_3 & \tau_1 \end{vmatrix}, \quad \sigma\,\sigma' = \begin{vmatrix} \tau_3 & \tau_1 \\ \varrho_3 & \varrho_1 \end{vmatrix}, \quad \tau\,\sigma' = \begin{vmatrix} \varrho_3 & \varrho_1 \\ \sigma_3 & \sigma_1 \end{vmatrix} \tag{23}$$
$$\varrho\,\tau' = \begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \\ \tau_1 & \tau_2 \end{vmatrix}, \quad \sigma\,\tau' = \begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \varrho_1 & \varrho_2 \end{vmatrix}, \quad \tau\,\tau' = \begin{vmatrix} \varrho_1 & \varrho_2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} \varrho_1 & \sigma_1 & \tau_1 \\ \varrho_2 & \sigma_2 & \tau_2 \\ \varrho_3 & \sigma_3 & \tau_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Auf Grund dieser Identitäten ist das System der 6 Gleicungen (22) dem Systeme folgender 4 linearen Gleichungen 1. Ordnung äquivalent:

$$\left\{\begin{aligned}
&(\tau + \lambda_i\,\sigma)\frac{\partial \Phi}{\partial r'} = (\lambda_i\,\tau_1 - \sigma_1)\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \varrho_1\,\frac{\partial \Phi}{\partial s} - \lambda_i\,\varrho_1\,\frac{\partial \Phi}{\partial t}\\
&(\sigma + \lambda_i\,\varrho)\frac{\partial \Phi}{\partial t'} = \tau_3\,\frac{\partial \Phi}{\partial r} - \lambda_i\,\tau_3\,\frac{\partial \Phi}{\partial s} + (\lambda_i\,\sigma_3 - \varrho_3)\frac{\partial \Phi}{\partial t}\\
&(\tau + \lambda_i\,\sigma)^2\,\frac{\partial \Phi}{\partial s'} = [\varrho(\varrho_1 - \lambda_i\,\sigma_1 + \lambda_i^2\tau_1) + (\tau + \lambda_i\,\sigma)(\lambda\,\tau_2 - \sigma_2)]\,\frac{\partial \Phi}{\partial r} +\\
&\quad + [\sigma(\varrho_1 - \lambda_i\,\sigma_1 + \lambda_i^2\,\tau_1) + (\tau + \lambda_i\,\sigma)\,\varrho_2]\,\frac{\partial \Phi}{\partial s} +\\
&\quad + [\tau(\varrho_1 - \lambda_i\,\sigma_1 + \lambda_i^2\,\tau_1) - (\tau + \lambda_i\,\sigma)\,\lambda_i\,\varrho_2]\,\frac{\partial \Phi}{\partial t}\\
&-\varrho_1\,(\tau + \lambda_i\,\sigma)\,\frac{d\,\Phi}{d\,x} + \varrho_1\,(\sigma + \lambda_i\,\varrho)\,\frac{d\,\Phi}{d\,y} + \xi_1\,(\tau + \lambda_i\,\sigma)\frac{\partial \Phi}{\partial r'} =\\
&= [\eta_3\,\varrho_1 + \xi'_1\,(\tau + \lambda_i\,\sigma)]\,\frac{\partial \Phi}{\partial r} - \lambda_i\,\eta_3\,\varrho_1\,\frac{\partial \Phi}{\partial s} + (\lambda_i\,\eta_2 - \eta_1)\,\varrho_1\,\frac{\partial \Phi}{\partial t},
\end{aligned}\right. \tag{24}$$

wobei λ_i eine Lösung der Gleichung vierten Grades:

$$\begin{aligned}
&[\varrho(\varrho\,\tau_1 + \sigma\,\tau_2) + \sigma^2\,\tau_3]\,\lambda^4 +\\
&+ [\varrho^2(\varrho_2 - \sigma_1) + 2\,(\varrho\,\sigma\,\tau_1 + \tau\,\varrho\,\tau_2 + \tau\,\sigma\,\tau_3) + \sigma^2\,(\tau_2 - \sigma_3)]\,\lambda^3 +\\
&+ \{\sigma^2[(\tau_1 + \varrho_3) - 2\,\sigma_2] + 3\,(\tau^2\,\tau_3 + \varrho^2\,\varrho_1) + \varrho\,\tau\,[2\,(\tau_1 + \varrho_3) - \sigma_2]\}\,\lambda^2 +\\
&+ [\sigma^2\,(\varrho_2 - \sigma_1) + 2\,(\varrho\,\sigma\,\varrho_1 + \tau\,\varrho\,\varrho_2 + \tau\,\sigma\,\varrho_3) + \tau^2\,(\tau_2 - \sigma_3)]\,\lambda +\\
&+ [\tau\,(\tau\,\varrho_3 + \sigma\,\varrho_2) + \sigma^2\,\varrho_1] = 0,
\end{aligned} \tag{25}$$

ist und μ_i durch folgende Formel:

$$\mu_i = -\frac{\sigma\,\lambda_i + \tau}{\varrho_1}.$$ dargestellt ist.

Jeder Lösung λ_i der Gleichung (25) entspricht ein System von 4 linearen Gleichungen (24). Ein jedes solche System ist übereinstimmend, da seine Gleichungen gemeinsame Integrale $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ besitzen; dasselbe kann nur unvollständig sein. Finden wir auf Grund eines oder mehrerer Systeme (24) 4 von einander unabhängige partielle Integrale $\Phi_1 = C_1, \ldots \Phi_4 = C_4$, die untereinander und mit den Gleichungen des Systemes (16) übereinstimmen, dann reduziert sich das Bestimmen der Funktionen z, z' auf die Berechnung der Ableitungen r, s,... t' von den 6 Gleichungen und auf die Quadraturen.

Betrachten wir folgenden sperietllen Fall des Systems (16):

$$\begin{cases} F_1 \equiv F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \\ F_2 \equiv r' + s' + t' + f(x, y, z\ p, q, r, s, t) = 0 \end{cases}$$

Denselben kann auf gewöhnliche Darboux'sche Art integrieren, indem wir zur ersten Gleichung zweite übereinstimmende Gleichung: $\Phi(x, y, z, p, q, r, s, t) =$ const. adjungeren, die Übereinstimmungsbedingungen der Gleichungen $F_1 = 0$, $\Phi =$ const. anführen und den berechneten Ausdruck für die unbekannte Funktion z in die Gleichung $F_2 = 0$ einsetzen.

Indem wir die Übereinstimmungsbedingungen für 3 Gleichungen 2. Ordnung untersuchen, können wir das System mittelst der verallgemeinerten Darboux'schen Methode integrieren. Wir bekommen:

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = R; \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = S; \quad \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = T.$$

Wenn wir $\lambda = \frac{1}{\nu}$ einsetzen, so bekommen wir die Gleichung (25) in der Form einer quadratischen Glg:

$$R\nu^2 - S\nu + T = 0,$$

die ersten drei Glgn des Systems (24) in der Gestalt von 2 Gleichungen (28) Abschn. V., die einer Gleichung:

$$\nu_i T \frac{\partial \Phi}{\partial r} - T \frac{\partial \Phi}{\partial s} + (S - \nu_i R) \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

äquivalent sind, und die letzte Gleichung des Systems (24) in der Gestalt:

$$\left[T \frac{\partial f}{\partial r} + \nu_i (R - S) \frac{\partial f}{\partial s} - R \frac{\partial f}{\partial t}\right] \left[\nu_i R \frac{d\Phi}{dx} + T \frac{d\Phi}{dy} - \nu_i \Xi \frac{\partial \Phi}{\partial r} - H \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right] +$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial r}\right) \nu_i TS \frac{d\Phi}{dy} - \left(\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial t}\right) \nu_i HS \frac{\partial \Phi}{\partial t} +$$

$$\left(T \frac{df}{dy} - H \frac{\partial f}{\partial r}\right) \nu_i R \left(\nu_i \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial \Phi}{\partial s}\right) + \left(T \frac{df}{dy} - H \frac{\partial f}{\partial t}\right) R \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

Diese Gleichung unterscheidet sich, wie es vorauszusehen war, von einer der Gleichungen (27) Absch. V, da die Variablen x, y, z, p, q gleichzeitig in allen 3 Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $\Phi = \text{const.}$ vorkommen. Mann kann die Bedingungen, wann sie in die Gleichungen (27). Absch. V. übergeht, d. h. wann zwei letzten Zeilen der obigen Gleichung gleich Null sind, angeben.

Die Integrationsformeln des Systems (16) gehen in die Formeln des Absch. V bei der Integration einer Gleichung 2. Ordnung mit einer unbekannten Funktion z: $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ über.

IX. Hat das System der Gleichungen 5 Ableitungen 2 Ordnung, dann muss man 3 Kombinationen mit den Ableitungen:

$$[1]\ s, t, r', s', t';\quad [2]\ r, s, r', s', t';\quad [3]\ r, t, r', s', t'$$

untersuchen, weil für übrige Kombinationen:

$$[4]\ s' t', r, s, t;\quad [5]\ r', s', r, s, t;\quad [6]\ r', t', r, s, t$$

in entsprechenden linearen Gleichungen zur Bestimmung der Funktion Φ veränderliche r, s, t entsprechend in r', s', t' und umgekehrt, die Jacobi'-schen Determinanten $\varrho, \sigma, \tau, \xi_1, \ldots \eta_3$ in $\varrho', \sigma', \tau', \xi'_1, \xi'_2, \ldots \eta'_3$ und umgekehrt übergehen; dann schreiben wir für den Wechsel von $\varrho_1 \ldots \tau_3$ folgende Tafel:

statt	wird	statt	wird	statt	wird
ϱ_1	$-\varrho_1$	σ_1	$-\varrho_2$	τ_1	$-\varrho_3$
ϱ_2	$-\sigma_1$	σ_2	$-\sigma_2$	τ_2	$-\sigma_3$
ϱ_3	$-\tau_1$	σ_3	$-\tau_2$	τ_3	$-\tau_3$

Für die Integration des Systemes:

$$F_k(x, y, z, z', p, q, p', q', s, t, r', s', t') = 0 \quad (k\ \ 1,2)$$

mit der adjungierten dritten übereinstimmenden Gleichung $\Phi = \text{const.}$ bekommt man erste Übereinstimmungsbedingungen in der Form $\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0$ und dann kommen wir zur Untersuchung von partiellen Integralen $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2, \ldots$ die untereinander, wie auch mit den gegebenen Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ übereinstimmen und die Veränderliche r nicht enthalten sollen, aus dem System von 3 linearen Gleichungen:

$$(\varrho' + \lambda_i \sigma') \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\lambda_i \tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + (\lambda_i \tau_1 - \tau_2) \frac{\partial \Phi}{\partial t'}$$

$$(\sigma' + \lambda_i \tau') \frac{\partial \Phi}{\partial s} = (\lambda_i \sigma_2 - \sigma_3) \frac{\partial \Phi}{\partial r'} - \lambda_i \sigma_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + \sigma_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t'}$$

$$\tau_3 \left[(\xi'_3 - \lambda_i \xi'_2) \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \lambda_i \xi'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} - \xi'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t'} - (\sigma' + \lambda_i \tau') \frac{d \Phi}{d x} \right] =$$

$$= (\lambda_i \sigma' + \varrho') \left[\eta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t'} - \eta'_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \tau_3 \frac{d \Phi}{d y} \right],$$

wobei eine der Lösungen einer kubischen Gleichung:

$$(\tau_1 \tau' + \sigma_1 \sigma')\lambda^3 + [\sigma_1 \varrho' - \tau_2 \tau' + (\tau_1 - \sigma_2)\sigma']\lambda^2 +$$
$$+ [\tau_3 \tau' - \sigma_2 \varrho' + (\sigma_3 - \tau_2)\sigma']\lambda + (\tau_3 \sigma' + \sigma_3 \varrho') = 0. \text{ ist.}$$

Für das System:

$$F_k(x, y, z, z', p, q, p', q', r, s, r', s', t') = 0 \quad (k = 1{,}2)$$

schreibt man die erste Übereinstimmungsbedingung in der Form $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$, und das System von 3 linearen Gleichung geht in das folgende über:

$$(\varrho' + \lambda_1 \sigma')\frac{\partial \Phi}{\partial s} = -\lambda_1 \sigma_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \sigma_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + (\lambda_1 \sigma_1 - \sigma_2)\frac{\partial \Phi}{\partial t'}$$

$$(\sigma' + \lambda_1 \tau')\frac{\partial \Phi}{\partial r} = (\lambda_1 \varrho_2 - \varrho_3)\frac{\partial \Phi}{\partial r'} - \lambda_1 \varrho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + \varrho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t'}$$

$$\sigma_3 \left[(\xi'_3 - \lambda_1 \xi'_2)\frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \lambda_1 \xi'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} - \xi'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t'} - (\sigma' + \lambda_1 \tau')\frac{d \Phi}{d x}\right] =$$
$$= (\lambda_1 \sigma' + \varrho')\left[\eta'_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t'} - \eta'_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \sigma_3 \frac{d \Phi}{d y}\right],$$

wobei eine Lösung der kubischen Gleichung:

$$(\sigma_1 \tau' + \varrho_1 \sigma')\lambda^3 + [\varrho_1 \varrho' - \sigma_2 \tau' + (\sigma_1 - \varrho_2)\sigma']\lambda^2 +$$
$$+ [\sigma_3 \tau' - \varrho_2 \varrho' + (\varrho_3 - \sigma_2)\sigma']\lambda + (\varrho_3 \varrho' + \sigma_3 \sigma') = 0 \text{ ist.}$$

Für das System:

$$F_k(x, y, z, z', p, q, p', q', r, t, r', s', t') = 0 \quad (k = 1{,}2)$$

welches der letzten Kombination entspricht, bekommt man unter Adjungierung der dritten Gleichung

$$\Phi(x, y, z, z', p, q, p', q', r, s, t, r', s', t') = \text{const.},$$

ein System von 4 linearen Gleichungen 1. Ordnung:

$$(\sigma' + \lambda_1 \tau')\frac{\partial \Phi}{\partial r} = (\lambda_1 \varrho_2 - \varrho_3)\frac{\partial \Phi}{\partial r'} - \lambda_1 \varrho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + \varrho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t'}$$

$$(\varrho' + \lambda_1 \sigma')\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\lambda_1 \tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + (\lambda_1 \tau_1 - \tau_2)\frac{\partial \Phi}{\partial t'}$$

$$(\lambda_1 \sigma' + \varrho')^2 \frac{\partial \Phi}{\partial s} = \left[(\varrho' + \lambda_1 \sigma')(\tau_3 - \lambda_1 \tau_2) - (\sigma' + \lambda_1 \tau')\lambda_1 \tau_3\right]\frac{\partial \Phi}{\partial r'} +$$
$$+ \left[(\varrho' + \lambda_1 \sigma')\lambda_1 \tau_1 + (\sigma' + \lambda_1 \tau')\tau_3\right]\frac{\partial \Phi}{\partial s'} +$$

$$+\left[-(\varrho'+\lambda_i\sigma')\tau_1+(\sigma'+\lambda_i\tau')(\lambda_i\tau_1-\tau_2)\right]\frac{\partial\Phi}{\partial t'}$$

$$(\lambda_i\sigma'+\varrho')\left[\eta_3\frac{\partial\Phi}{\partial t'}-\eta'_3\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\tau_3\frac{d\Phi}{dy}\right]=$$

$$=\tau_3\left[(\xi'_3-\lambda_i\xi'_2)\frac{\partial\Phi}{\partial r'}+\lambda_i\xi'_1\frac{\partial\Phi}{\partial s'}-\xi'_1\frac{\partial\Phi}{\partial t'}-(\sigma'+\lambda_i\tau')\frac{d\Phi}{dx}\right],$$

wobei λ_i eine Lösung der biquadratischen Gleichung:

$$[\varrho_1\sigma'^2+\tau_1\tau'^2]\lambda^4+[\sigma'(2\varrho_1\varrho'-\varrho_2\sigma')+\tau'(2\tau_1\sigma'-\tau_2\tau')]\lambda^3+$$
$$+[(\varrho_1\varrho'^2-2\varrho_1\varrho'\sigma'+\varrho_3\sigma'^2)+(\tau_1\sigma'^2-2\tau_2\sigma'\tau'+\tau_3\tau'^2)]\lambda^2+$$
$$+[\varrho'(2\varrho_3\sigma'-\varrho_2\varrho')+\sigma'(2\tau_3\tau'-\tau_2\sigma')]\lambda+[\varrho_3\varrho'^2+\tau_3\sigma'^2]=0 \text{ ist.}$$

Für den Rest von 3 Kombinationen der 5 Ableitungen 2. Ordnung, z. B. für das System

$$F_k(x,y,z,z',p,q,p',q',r',t',r,s,t)=0 \quad (k=1,2)$$

haben wir, übereinstimmend mit den am Aufange dieses Abschnittes gegebenen Regeln:

$$(\sigma+\lambda_i\tau)\frac{\partial\Phi}{\partial r'}=(\tau_1-\lambda_1\sigma_1)\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\lambda_i\varrho_1\frac{\partial\Phi}{\partial s}-\varrho_1\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

$$(\varrho+\lambda_i\sigma)\frac{\partial\Phi}{\partial t'}=\lambda_i\tau_3\frac{\partial\Phi}{\partial r}-\tau_3\frac{\partial\Phi}{\partial s}+(\sigma_3-\lambda_i\varrho_3)\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

$$(\lambda_i\sigma+\varrho)^2\frac{\partial\Phi}{\partial s'}=\left[(\varrho+\lambda_i\sigma)(\lambda_i\sigma_3-\tau_3)+(\sigma+\lambda_i\tau)\lambda_i\tau_3\right]\frac{\partial\Phi}{\partial r}-$$
$$-\left[(\varrho+\lambda_i\sigma)\lambda_i\varrho_3+(\sigma+\lambda_i\tau)\tau_3\right]\frac{\partial\Phi}{\partial s}+$$
$$+\left[(\varrho+\lambda_i\sigma)\varrho_3+(\sigma+\lambda_i\tau)(\sigma_3-\lambda_i\varrho_3)\right]\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

$$(\lambda_i\sigma+\varrho)\left[-\eta_3\frac{\partial\Phi}{\partial t'}-\tau_3\frac{d\Phi}{dy}+\eta'_3\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]=$$

$$=\tau_3\left[(\xi_3-\lambda_i\xi_2)\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\lambda_i\xi_1\frac{\partial\Phi}{\partial s}-\xi_1\frac{\partial\Phi}{\partial t}-(\sigma+\lambda_i\tau)\frac{d\Phi}{dx}\right];$$

$$[\varrho_1\sigma^2+\varrho_3\tau^2]\lambda^4+[\sigma(2\varrho\varrho_1-\sigma\sigma_1)+\tau(2\sigma\varrho_3-\tau\sigma_3)]\lambda^3+$$
$$+[(\varrho_1\varrho^2-2\varrho\sigma\sigma_1+\sigma^2\tau_1)+(\varrho_3\sigma^2-2\tau\sigma\sigma_3+\tau^2\tau_3)]\lambda^2+$$
$$+[\varrho(2\sigma\tau_1-\varrho\sigma_1)+\sigma(2\tau\tau_3-\sigma\sigma_3)]\lambda+[\tau_1\varrho^2+\tau_3\sigma^2]=0.$$

X. Hat das Gleichungssystem nur 4 Ableitungen 2. Ordnung, dann muss man von allen 15 Kombinationen mit 4 Ableitungen $r, s, \ldots t'$ 12, und zwar:

$$[1]\, s, r', s', t'$$

$$[2]\, r, r', s', t'; \quad [4]\, s, t, s', t'; \quad [6]\, s, t, r', s'; \quad [8]\, r, t, s', t'; \quad [10]\, r, t, r', s,$$

$$[3]\, t, r', s', t'; \quad [5]\, s, r, s', r'; \quad [7]\, s, r, t', s'; \quad [9]\, r', t', s, t; \quad [11]\, r', t', r, s$$

$[12]\, r, t, r', t'$ untersuchen.

Für übrige 3 Kombinationen

$$[13]\, s', r, s, t; \quad [14]\, r', r, s, t; \quad [15]\, t', r, s, t$$

bekommt man Hilfsgleichungen aus den Gleichungen für [1], [2], [3] mittelst Wechsels der Variablen r, s, t und der Determinantem $\varrho, \sigma, \ldots \eta_3$ auf Grund der Regeln des Absch... IX. Für das System:

$$F_k(x, y, z, z', p, q, p', q', s, r', s', t') = 0 \quad (k = 1,2)$$

bekommt man 2 lineare Gleichungen 1. Ordnung:

$$(\varrho' - \lambda_i \sigma') \frac{\partial \Phi}{\partial s} = \sigma_2 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + \lambda_1 \sigma_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} - (\sigma_2 + \lambda_i \sigma_1) \frac{\partial \Phi}{\partial t'}$$

$$\lambda_i \sigma_1 \frac{d \Phi}{d x} - \sigma_3 \frac{d \Phi}{d y} + (\lambda_i \xi'_1 - \eta'_3) \frac{\partial \Phi}{\partial s} = \lambda_i \xi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} - \eta_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t'},$$

wobei λ_i eine Lösung der quadratischen Gleichung:

$$\sigma_1 \lambda^2 + \sigma_2 \lambda + \sigma_3 = 0. \text{ ist.}$$

Man muss partielle Integrale $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2, \ldots$, die die Variablen r und t nicht enthalten, suchen. Die zweite lineare Gleichung zur Bestimmung der Funktion Φ kann man noch mit einer der Gleichungen:

$$\sigma_1 \frac{d \Phi}{d x} + (\sigma_2 + \lambda_i \sigma_1) \frac{d \Phi}{d y} + (\xi'_1 + \eta'_2 + \lambda_i \eta'_1) \frac{\partial \Phi}{\partial s} = (\xi_2 + \lambda\, \eta_2) \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \eta_2 \frac{\partial \Phi}{\partial s'}$$

$$(\lambda_i \sigma_2 + \lambda_3) \frac{d \Phi}{d x} + \lambda_i \sigma_3 \frac{d \Phi}{d y} + (\lambda_i \eta'_3 + \lambda_i \xi'_2 + \xi'_3) \frac{\partial \Phi}{\partial s} = \lambda_i \xi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + (\lambda_i \eta_2 + \xi_2) \frac{\partial \Phi}{\partial t'}$$

$$\lambda_i (\varrho' - \lambda_i \sigma') \left[\sigma_1 \frac{d \Phi}{d x} - \sigma_3 \frac{d \Phi}{d y} + \xi'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \xi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} \right] =$$

$$= \sigma_3 \left[\lambda_i \eta'_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \eta'_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} - (\eta'_2 + \lambda \eta'_1) \frac{\partial \Phi}{\partial t'} \right];$$

$$(\lambda_i \sigma' - \varrho') \left[\sigma_3 \frac{d \Phi}{d y} + \eta'_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \eta_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t'} \right] =$$

$$= \sigma_3 \left[(\xi'_3 + \lambda_i \xi'_2) \frac{\partial \Phi}{\partial r'} - \lambda_i \xi'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} - \xi'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t'} + (\lambda_i \tau' - \sigma') \frac{d \Phi}{d x} \right] \text{ tauschen.}$$

Für das System $F_k(x, y, z, z', p, q, p'\, q', r, r', s', t') = 0$ $(k = 1,2)$ findet man Integrale, die keine s und t enthalten, aus dem System:

$$(\lambda_i \tau' + \sigma')\frac{\partial \Phi}{\partial r} = (\lambda_i \varrho_2 - \varrho_3)\frac{\partial \Phi}{\partial r'} - \lambda_i \varrho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + \varrho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t'}$$

$$\lambda_i \varrho_1 \frac{d\Phi}{dx} + \varrho_3 \frac{d\Phi}{dy} + (\lambda_i \xi'_1 + \eta'_3)\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \lambda_i \xi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \eta_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t'},$$

wobei man λ_i aus der Gleichung

$$\varrho_1 \lambda^2 - \varrho_2 \lambda + \varrho_3 = 0 \quad \text{bestimmt.}$$

Für analoge Kombination *[3]* hat das System und die quadratische Gleichung die Form:

$$(\sigma' + \lambda_i \varrho')\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \lambda_i \tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + (\tau_1 - \lambda_i \tau_2)\frac{\partial \Phi}{\partial t'}$$

$$\tau_1 \frac{d\Phi}{dx} + \lambda_i \tau_3 \frac{d\Phi}{dy} + (\xi'_1 + \lambda_i \eta'_3)\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \xi_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \lambda_i \eta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$\tau_3 \lambda^2 - \tau_2 \lambda + \tau_1 = 0.$$

F ü r d a s S y s t e m $F_k(x, y, z, z', p, q, p', q', s, t, s', t') = 0$ $(k = 1,2)$ findet man Integrale, die r und r' nicht enthalten, aus dem System:

$$-\lambda_i \tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s} + (\varrho' + \lambda_i \sigma_3)\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + (\tau_2 - \lambda_i \varrho)\frac{\partial \Phi}{\partial t'} = 0$$

$$\sigma_2 \frac{d\Phi}{dx} + (\tau_2 - \lambda_i \varrho)\frac{d\Phi}{dy} - (\xi_2 + \eta_3)\frac{\partial \Phi}{\partial s'} = (\eta_3 - \xi'_2)\frac{\partial \Phi}{\partial s} - (\eta_2 + \eta'_2)\frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

dem die Gleichung

$$\varrho \lambda^2 + (\sigma_3 - \tau_2)\lambda + \varrho' = 0 \quad \text{entspricht.}$$

Für analoge Kombination *[5]* bekommt man:

$$\lambda_i \varrho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s} + (\tau' - \lambda_i \sigma_1)\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \varrho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} - (\varrho_2 + \lambda_i \tau)\frac{\partial \Phi}{\partial r'} = 0$$

$$\varrho_2 \frac{d\Phi}{dy} + (\varrho_2 + \lambda_i \tau)\frac{d\Phi}{dx} - (\eta_2 + \xi_1)\frac{\partial \Phi}{\partial s'} = (\lambda_i \xi_1 - \eta'_2)\frac{\partial \Phi}{\partial s} - (\xi'_2 + \lambda_i \xi_2)\frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

$$\tau \lambda^2 + (\varrho_2 - \sigma_1)\lambda + \tau' = 0.$$

F ü r d a s S y s t e m $F_k(x, y, z, z', p, q, p', q', s, t, r', s') = 0$ $(k = 1,2)$ bekommt man Integrale, die r und t nicht enthalten, aus dem System:

$$(\tau_1 + \lambda_i t')\frac{\partial \Phi}{\partial s} - \sigma_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - (\varrho_1 - \lambda_i \sigma_2)\frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \lambda_i \sigma_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} = 0$$

$$\lambda_i \sigma_1 \frac{d\Phi}{dx} + (\varrho + \lambda_i \tau_1)\frac{d\Phi}{dy} - (\xi_2 + \lambda_i \eta_3)\frac{\partial \Phi}{\partial r'} =$$

$$= -(\eta_3 + \lambda_i \xi'_1)\frac{\partial \Phi}{\partial s} + (\eta_2 - \lambda_i \eta'_1)\frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

dem die Gleichung:

$$\iota' \lambda^2 + (\tau_1 - \sigma_2)\lambda + \varrho = 0 \text{ entspricht,}$$

und für analoge Kombination [7] ist das System und die Gleichung:

$$(\sigma_2 - \lambda\varrho')\frac{\partial \Phi}{\partial r} - \varrho_2 \frac{\partial \Phi}{\partial s} + (\tau + \lambda_i \varrho_3)\frac{\partial \Phi}{\partial s'} - \lambda_i \varrho_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t'} = 0$$

$$\varrho_2 \frac{d\Phi}{dx} + (\varrho_3 + \lambda_i \varrho')\frac{d\Phi}{dy} + (\xi_1 + \eta'_3)\frac{\partial \Phi}{\partial r} = (\xi_1 - \lambda_i \eta'_3)\frac{\partial \Phi}{\partial s'} + (\eta_1 + \lambda_i \eta'_2)\frac{\partial \Phi}{\partial t'}$$

$$\varrho' \lambda^2 + (\varrho_3 - \sigma_2)\lambda + \tau = 0.$$

Für das System $F_k(x, y, z, z', p, q, p', q', r, t, s', t') = 0$ $(k = 1,2)$ findet man Integrale ohne r' aus dem System der 3 Gleichungen

$$\lambda_i \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial s'} = \lambda_i \tau_2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \lambda_i \varrho_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial t'} = \tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \lambda_i \varrho_2 \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \varrho_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$\lambda_i \varrho_2 \frac{d\Phi}{dx} + \tau_3 \frac{d\Phi}{dy} + \lambda_i \xi'_2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \eta'_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \lambda_i \xi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + \eta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t'},$$

wo λ_i eine Lösung der kubischen Gleichung

$$\varrho_2 \lambda^2 (\varrho_2 \lambda - \tau_2) + \tau_3 (\varrho_3 \lambda - \tau_3) = 0 \text{ darstellt.}$$

Für analoge Kombination [9] bekommt man:

$$\lambda_i \sigma' \frac{\partial \Phi}{\partial s} = -\lambda_i \sigma_2 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} - \tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + \lambda_i \sigma_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t'}$$

$$\sigma' \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \lambda_i \sigma_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + \tau_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t'}$$

$$\lambda_i \sigma' \frac{d\Phi}{dx} - \tau_3 \frac{d\Phi}{dy} - \lambda_i \xi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \eta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t'} = -\lambda_i \xi'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \eta'_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$\sigma_1 \lambda^2 (\sigma_1 \lambda + \sigma_3) + \tau_3 (\tau_1 \lambda + \tau_3) = 0.$$

Für das System $F_k(x, y, z, z', p, q, p', q', r, t, r', s') = 0$ $(k = 1,2)$ sucht man partielle Integrale ohne t' aus dem System und der Gleichung:

$$\lambda_i \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \lambda_i \tau_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \tau_2 \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \lambda_i \varrho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial s'} = \tau_2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \lambda_i \varrho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \varrho_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$\lambda_i \varrho_1 \frac{d\Phi}{dx} + \tau_2 \frac{d\Phi}{dy} + \lambda_i \xi'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \eta'_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \lambda_i \xi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \eta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s'}$$

$$\varrho_1 \lambda^2 (\varrho_1 \lambda - \tau_1) - \tau_2 (\varrho_2 \lambda - \tau_2) = 0.$$

Für analoge Kombination [11] sind die Gleichungen, wie folgt:

$$\lambda_i \sigma' \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\lambda_i \varrho_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} - \sigma_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + \lambda_i \varrho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t'}$$

$$\sigma' \frac{\partial \Phi}{\partial s} = -\sigma_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \lambda_i \varrho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + \sigma_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t'}$$

$$-\lambda_i \varrho_1 \frac{d\Phi}{dx} + \sigma_3 \frac{d\Phi}{dy} + \lambda_i \xi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} - \eta_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t'} = \lambda_i \xi'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \eta'_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s}$$

$$\varrho_1 \lambda^2 (\varrho_1 \lambda + \varrho_3) + \sigma_3 (\sigma_1 \lambda + \sigma_3) = 0.$$

Für das System $F_k(x,y,z,z',p,q,p',q',r,t,r',t') = 0$ $(k=1,2)$ das kein Analogon hat, sind die Übereinstimmungsbedingungen mit der dritten Gleichung und das System linearer Gleichungen zur Bestimmung von $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2, \ldots$ folgend:

$$\frac{\tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s}}{(r t r')} = \frac{(t r' t')}{\varrho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'}} = \frac{[t' t y]}{[r r' x]} = \frac{(r r t')}{\varrho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s}} = \frac{\tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s}}{(r t' r')},$$

$$\lambda_i \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial r'} = \lambda_i \tau_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \lambda_i \varrho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t}; \quad \varrho_1 \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial s'} = (\varrho_1 \tau_1 \lambda_i^2 + \tau_3^2) \frac{\partial \Phi}{\partial s}$$

$$\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial t'} = \tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \lambda_i \varrho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s} - \varrho_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$\lambda_i \left(\varrho_1 \frac{d\Phi}{dx} + \xi'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \xi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} \right) + \tau_3 \frac{d\Phi}{dy} + \eta'_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \eta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t'} = 0,$$

wo λ_i eine Lösung der biquadratischen Gleichung

$\varrho_1 \lambda^2 (\varrho_1 \lambda^2 + \tau_3 \varrho_3) + \tau_3 (\varrho_1 \tau_1 \lambda^2 + \tau_3^2) = 0$ bedeutet.

XI. Für die Gleichungen, die nur 3 Ableitungen 2. Ordnung enthalten, genügt 10 Kombinationen

[1] r,s,t; [2] r,s,r'; [3] s,t,t'; [4] r,s,s'; [5] s,t,s'
[6] r,s,t'; [7] s,t,r'; [8] r,t,r'; [9] r,t,t'; [10] r,t,s', untersuchen,

da die für die übrigen 10 Kombinationen analogen Hilfssysteme der linearen Gleichungen 1. Ordnung analog sind.

Für das System $F_k(x,y,z,z',p,q\ p'\ q',r,s,t) = 0$ $(k=1,2)$ welches wir in Bezug auf r und t auflösen, muss man eine solche dritte Gleichung suchen, um für das System:

$r = f_1(x, y, z, z', p, q, p', q', \varphi);\quad s = \varphi(x, y, z, z', p, q, p', q');\quad t = f_2(x, \ldots \varphi)$
die Übereinstimmungsbedingungen aus den Relationen

$$dp = f_1\, dx + \varphi\, dy;\quad dq = \varphi\, dx + f_2\, dy,$$

zu bekommen, was uns zum System von 2 linearen Gleichungen 1. Ordnung mit einer unbekannten Funktion φ führen wird, der Identität

$$\frac{d f_1}{d y} = \frac{d\varphi}{d x};\quad \frac{d\varphi}{d y} = \frac{d f_2}{d x} \text{ entsprechend.}$$

• Für das System $F_k(x, y, z, z', p, q, p', q', r, s, r') = 0$ $(k = 1,2)$ gelangen wir zur Untersuchung von Integralen, die Veränderlichen t, t, s', nicht enthalten, aus dem System der gewöhnlichen Differentialgleichungen, welche der linearen Gleichung 1. Ordnung

$$(\xi_1 + \eta_2)\frac{\partial \Phi}{\partial r'} = \varrho_1 \frac{d\Phi}{dx} + \sigma_1 \frac{d\Phi}{dy} + \xi'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \eta'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s} \text{ entsprechen.}$$

Für analoge Kombination [3] hat die lineare Gleichung die Form

$$(\xi_2 + \eta_3)\frac{\partial \Phi}{\partial t'} = \sigma_3 \frac{d\Phi}{dx} + \tau_3 \frac{d\Phi}{dy} + \xi'_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \eta'_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Für das System $F_k(x, y, z, z', p, q, p', q', r, s, s') = 0$ $(k = 1,2)$ ist die lineare Gleichung für Integrale, die t r' t' nicht enthalten,

$$(\xi_1 + \eta_2)\frac{\partial \Phi}{\partial s'} = \varrho_2 \frac{d\Phi}{dx} + \sigma_2 \frac{d\Phi}{dy} + \xi'_2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \eta'_2 \frac{\partial \Phi}{\partial s}.$$

Analoge Kombination [5] führt zur linearen Gleichung:

$$(\xi_2 + \eta_3)\frac{\partial \Phi}{\partial s'} = \sigma_2 \frac{d\Phi}{dx} + \tau_2 \frac{d\Phi}{\partial y} + \xi'_2 \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \eta'_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Für das System $F_k(x, y, z, z', p, q, p', q', r, s, t') = 0$ $(k = 1,2)$ bekommt man Integrale ohne t, r', s', aus der Gleichung:

$$(\xi_1 + \eta_2)\frac{\partial \Phi}{\partial t'} = \varrho_3 \frac{d\Phi}{dx} + \sigma_3 \frac{d\Phi}{dy} + \xi'_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \eta'_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s},$$

und für analoge Kombination [7] hat die Gleichung die Form:

$$(\xi_2 + \eta_2)\frac{\partial \Phi}{\partial r'} = \sigma_1 \frac{d\Phi}{dx} + \tau_1 \frac{d\Phi}{dy} + \xi'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \eta'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Für das System $F_k(x, y, z, z', p, q, p', q', r, t, r') = 0$, $(k = 1,2)$ mit der adjungierten 3. Gleichung $\Phi(x, \ldots r, s, t, r', s', t') = \text{const.}$, sind 3 erste Übereinstimmungsbedingungen, wie folgt:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s'} = 0,\quad \frac{\partial \Phi}{\partial t'} = 0,\quad (r\, t\, r')^2 + \varrho_1 \tau_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right)^2 = 0,$$

und die 4. Bedingung für das System $F_1 = 0$, F_2 0, $\Phi = \text{const.}$ kann man in 6 verschiedenen Gestalten schreiben, z. B.

$$\tau_1 [x r r'] \frac{\partial \Phi}{\partial s} + (r t r') [y t r'] = 0; \quad \varrho_1 [y t r'] \frac{\partial \Phi}{\partial s} + (r t r') [x r r'] = 0, \ldots$$

Wenn wir z. B. die erste von diesen 4 Bedingungen der Übereinstimmung wählen, dann finden wir Integrale ohne die Variablen s', t', aus dem System von 2. linearen Gleichungen

$$-\tau_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \pm \sqrt{-\varrho_1 \tau_1} \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \varrho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial r'} = 0$$

$$\tau_1 \left(\varrho_1 \frac{d \Phi}{d x} + \xi'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \xi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} \right) \pm \sqrt{-\varrho_1 \tau_1} \left(\tau_1 \frac{d \Phi}{d y} + \eta'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \eta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} \right) = 0.$$

Für analoge Kombination [9] ist dieses System:

$$-\tau_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \pm \sqrt{-\varrho_3 \tau_3} \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \varrho_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial t'} = 0$$

$$\tau_3 \left(\varrho_3 \frac{d \Phi}{d x} + \xi'_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \xi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t'} \right) \pm \sqrt{-\varrho_3 \tau_3} \left(\tau_3 \frac{d \Phi}{d y} + \eta'_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \eta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t'} \right) = 0.$$

Für das System $F_k (x, y, z, z', p, q, p', q', r, t, s') = 0$ $(k=1,2)$ bekommt man partielle Integrale ohne r' t' aus dem System von 2 linearen Gleichungen, z. B. folgender Form:

$$-\tau_2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \pm \sqrt{-\varrho_2 \tau_2} \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \varrho_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial s'} = 0$$

$$\tau_2 \left(\varrho_2 \frac{d \Phi}{d x} + \xi'_2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \xi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} \right) \pm \sqrt{-\varrho_2 \tau_2} \left(\tau_2 \frac{d \Phi}{d y} + \eta'_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \eta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} \right) = 0.$$

XII. Hat das System 2 Ableitungen 2. Ordnung, so muss man erste 12 Kombinationen von allen 15

[1] r, t; [2] r, s; [3] t, s; [4] r, r'; [5] t, t'
[6] r, s'; [7] s, r'; [8] r, t'; [9] t, r'; [10] s, t'
[11] t, s'; [12] s, s'; [13] r', t'; [14] r', s'; [15] $t' s'$

untersuchen, da man für übrige 3 entsprechende Hilfsgleichungen leicht aus den Gleichungen für erste 3 Kombinationen bekommen kann.

Für das System $F_k (x, y, z, z', p, q, p', q', r, t) = 0$, $(k=1,2)$ welches wir in Bezug auf r und t, $r = f_1$, $t = f_2$, auflösen, finden wir die 3. Gleichung

$$s = \varphi (x, y, z, z', p, q, p', q')$$

in der Form von partiellen Integralen, die r', s', t' nicht enthalten, aus dem System von 2 linearen Gleichungen, die wir in der Form:

$$\frac{d f_1}{d y} = \frac{d \varphi}{\partial x}; \quad \frac{d \varphi}{d y} = \frac{d f_2}{d x} \text{ schreiben.}$$

Für das System $F_k (x, y, z, z', p, q, p', q', r, s) = 0$, $(k=1,2)$ welches wir in der Form $r = f_1$, $s = f_2$ schreiben, haben wir zur Bestimmung der dritten Gleichung

$$t = \varphi\,(x, y, z, z', p, q, p', q')$$

zwei entsprechende lineare Gleichungen 1. Ordnung mit der unbekannten Funktion φ.

Für das System $F_k\,(x, y, z, z', p, q, p', q', s, t) = 0 \quad (k=1{,}2)$ finden wir das System von 2 linearen Gleichungen 1. Ordnung analog.

Für das System $F_k\,(x, y, z, z', p, q, p', q', r, r') = 0 \quad (k=1{,}2)$ muss man Integrale $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2, \ldots$, die s oder s' und kein t und t' enthalten, aus dem System von gewöhnlichen Differentialgleichungen bestimmen, welches der linearen Gleichung 1. Ordnung

$$\varrho_1 \frac{d\Phi}{dy} + \xi'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \eta'_2 \frac{\partial \Phi}{\partial s} = \xi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \eta_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} \text{ entspricht.}$$

Analoge Kombination [5] führt zur linearen Gleichung

$$\tau_3 \frac{d\Phi}{dy} + \xi'_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \eta'_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \xi_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + \eta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t'}.$$

Für das System $F_k\,(x, y, z, z'\ p, q, p', q', r, s') = 0 \quad (k=1{,}2)$ muss man Integrale, die r' aber kein s, t, t' enthalten, der linearen Gleichung

$$\varrho_2 \frac{d\Phi}{dy} + \eta'_2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \xi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \eta_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'}$$

oder Integrale, die t' und kein t, r', oder s und kein t, r' enthalten, aus der Gleichung

$$\varrho_2 \frac{d\Phi}{dx} + \xi'_2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \eta'_2 \frac{\partial \Phi}{\partial s} = \xi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + \eta_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t'} \text{ bestimmen.}$$

Für analoge Kombination [7] hat man eine Gleichung für Integrale mit r und ohne t s', t'

$$\sigma_1 \frac{d\Phi}{dy} + \xi'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \eta'_2 \frac{\partial \Phi}{\partial s} = \eta_2 \frac{\partial \Phi}{\partial r'},$$

und eine Gleichung für Integrale mit t und ohne r, t', oder mit s' und ohne r, t'

$$\sigma_1 \frac{d\Phi}{dx} + \xi'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \eta'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \xi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \eta_2 \frac{\partial \Phi}{\partial s'}.$$

Für das System $F_k\,(x, y, z, z', p, q, p', p'\ r, t') = 0 \quad (k=1{,}2)$ bekommt man Integrale mit s und ohne t, r', s', aus der Gleichung

$$\varrho_3 \frac{d\Phi}{dx} + \xi'_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \eta'_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s} = \xi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t'},$$

und Integrale mit s' und ohne s, t, r', aus der Gleichung

$$\varrho_3 \frac{d\Phi}{dy} + \eta'_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \xi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + \eta_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t'}.$$

Für analoge Kombination [9] ist die Gleichung für Integrale mit s und ohne r', s', t', und ensprechend die Gleichung für Integrale mit s' und ohne r, s, t',:

$$\tau_1 \frac{d\Phi}{dy} + \xi'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \eta'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \eta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r'}$$

$$\tau_1 \frac{d\Phi}{dx} + \xi'_1 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \xi_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \eta_4 \frac{\partial \Phi}{\partial s'}.$$

Für das System $F_k(x, y, z, z', p, q, p', q', s, t') = 0$ $(k=1,2)$ hat man die Gleichung für Integrale mit t und ohne r, r', s':

$$\sigma_3 \frac{d\Phi}{dx} + \xi'_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \eta'_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \xi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t'},$$

und die Gleichung für Integrale mit r und ohne t, r', oder mit s' und ohne t', r':

$$\sigma_3 \frac{d\Phi}{dy} + \xi'_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \eta'_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s} = \xi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + \eta_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t'}.$$

Für analoge Kombination [11] hat man entsprechend die Gleichung für Integrale mit t' und ohne r, s, r' und die Gleichung für Integrale mit s und ohne r, t' oder mit r' und ohne r, t':

$$\tau_2 \frac{d\Phi}{dx} + \xi'_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \xi_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + \eta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t'}$$

$$\tau_2 \frac{d\Phi}{dy} + \xi'_2 \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \eta'_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \xi_3 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \eta_3 \frac{\partial \Phi}{\partial s'}.$$

Für das letzte System $F_k(x, y, z, z', p, q, p', q', s, s') = 0$ $(k=1,2)$ sind die Gleichungen für Integrale mit r oder r' und ohne t, t':

$$\sigma_2 \frac{d\Phi}{dy} + \xi'_2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \eta'_2 \frac{\partial \Phi}{\partial s} = \xi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial r'} + \eta_2 \frac{\partial \Phi}{\partial s'},$$

und für Integrale mit t oder t' und ohne r, r':

$$\sigma_2 \frac{d\Phi}{dx} + \xi'_2 \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \eta'_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \xi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial s'} + \eta_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t'}.$$

Hat das System nur eine Ableitung 2. Ordnung und die Gestalt:

$$F_k(x, y, z, z', p, q, p', q', r) = 0, \quad (k=1,2)$$

dann schreibt man dieselbe in der Form:

$$f_1(x, y, z, z', p, q, p', q') = 0; \quad r = f_2(x, y, z, z' p, q, p', q')$$

und sucht die dritte übereinstimmende Gleichung $s = \varphi$ aus der linearen Gleichung $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{df_2}{dy}$, die wir aus der Relation $dp = f_2\, dx + \varphi\, dy$ bekommen.

Für das System $F_k(x, y, z, z', p, q, p', q', t) = 0$, $(k=1,2)$ schreibt man:

$$f_1(x,y,z,z',p,q,p',q')=0; \quad t=f_2(x,y,z,z',p,q,p',q'),$$

und sucht die weitere Gleichung $s=\varphi$ aus der linearen Gleichung $\frac{d\varphi}{dy}=\frac{df_2}{dx}$.

Das System $F_k(x, y, z, z', p, q, p', q', s) = 0$, $(k=1,2)$ schreiben wir in der Form:

$$f_1(x,y,z,z',p,q,p',q')=0; \quad s=f_2(x,y,z,z',p,q,p',q'),$$

und suchen die dritte Gleichung in der Form $r=\varphi$, oder in der Form $t=\psi$, und bekommen lineare Gleichungen 1. Ordnung aus den entsprechenden Relationen:

$$\frac{d\varphi}{dy}=\frac{df_2}{dx}; \quad \frac{df_2}{dy}=\frac{d\psi}{dx}.$$

Anhang. In der letzten Zeit hat Hr. Saltykoff in Comptes rendus t. 195 Nr. 11, 12. Sept. 1932, pp. 525-527 eine interessante Methode zur Bestimmung eines vollständigen Integrals der Gleichung mit partiellen Ableitungen 2. Ordnung mit einer unbekannten Funktion z angegeben, die das Integral einer Gleichung, falls die Darboux-sche Methode unbrauchbar ist, zu bestimmen hilft. Z. B. Für die Gleichung $r-t=\frac{k}{x}p$ (k beliebig), die man mit der Darboux-schen Methode nicht integrieren kann, gibt die Saltykoff'sche Methode das Integral:

$$z=C_1\left(x^2-\frac{k-1}{3}y^2\right)y+C_2\left(\frac{1}{k-1}x^2-y^2\right)+C_3x^{k+1}+C_4y+C_5 \quad (k \gtrless 1)$$

$$z=C_1x^2y+C_2[x^2(lgx-1)+y^2]+C_3y+C_4x^2+C_5 \quad (k=1)$$

Auf Grund dieser Methode gibt für die Integration einer Gleichung 2. Ordnung, falls wir zur selben eine zweite Gleichung, um ein vollständig integrierbares System von 2. Gleichnngen zu bekommen, adjungieren wollen, die Bedingung einer vollen Integrierbarkeit eine Gleichung, die sogenannte Resolvente, zur Bestimmung der gesuchten Gleichung; man muss aus derselben irgend ein partielles Integral, das von einer beliebigen Konstante abhängt, bestimmen. Dann findet man das vollständige Integral durch das Integrieren eines Systemes von 4 Gleichungen mit totalen Differentialen.

Die Saltykoff'sche Methode beruht auf folgenden zwei Theoremen:

1) Genügen die Grössen r, s, t der Gleichheit:

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{\partial s}{\partial x}; \quad \frac{\partial s}{\partial y}=\frac{\partial t}{\partial x}, \tag{1}$$

dann genügen die Funktionen z, p, q, r, s, t den Gleichungen:

$$\text{(I)}\ \frac{\partial r}{\partial x}+H_s\frac{\partial r}{\partial y}+D_1H=0; \qquad \text{(II)}\ \frac{\partial s}{\partial x}+H_s\frac{\partial s}{\partial y}+D_2H=0.$$

$$(\mathrm{III})\ \frac{\partial s}{\partial y} + \Phi_s \frac{\partial s}{\partial y} + D_1 \Phi = 0; \qquad (\mathrm{IV})\ \frac{\partial t}{\partial y} + \Phi_s \frac{\partial t}{\partial x} + D_2 \Phi = 0,$$

wobei H_s und Φ_s partielle Ableitungen 1. Ordnung in Bezug auf s der zweiten Glieder des gegebenen Systems:

$$r + H(x, y, z, p, q, s) = 0; \quad t + \Phi(x, y, z, p, q, s) = 0 \tag{2}$$

und D_1 und D_2 vollständige partielle Ableitungen in Bezug auf s und y unmittelbar und mittelst z, p, q mittelbar darstellen.

2) Genügen die Funktionen z, p, q, r, s, t den Gleichungen (2), (I), (IV), dann folgen die Bedingungen (1) unmittelbar.

Das System (2) ist also vollständig intergrierbar, falls zwei Gleichungen (II) und (III) mittelst des Hilfssystemes (2) ein System von Jacobi'schen Determinanten in Bezug anf s bilden. Auf solche Weise ist die vollständige Integrierbarkeit des Systems (2) durch die Gleichheit:

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{D_2 H - H_s D_1 \Phi}{H_s \Phi_s - 1}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{D_1 \Phi - \Phi_s D_2 H}{H_s \Phi_s - 1}\right) \tag{3}$$

bedingt.

Wird die Bedingung (3) erfüllt, dann bekommt man das vollständige Integral des Systemes (2) mittelst der Integration des Systemes von 4 Gleichungen mit totalen Ableitungen, durch die Gleichheiten $dz = p\,dx + q\,dy$; $dp = r\,dx + s\,dy$; $dq = s\,dx + t\,dy$ dargestellt, und einer dem System der Jacobi'schen Determinanten (II)-(III) äquivalenten Gleichung.

Sid die Gleichungen (2) in der Involution, dann zeigt die entsprechende Bedingung einer solchen Annahme, dass die Gleichungen (II) und (III) konvergieren und die Grössen der Ableitungen $\frac{\partial s}{\partial x}$ und $\frac{\partial s}{\partial y}$ unbestimmt bleiben; dann kann man die Darboux'sche Methode anwenden. Es folgt daraus, dass die Involution einen singulären Fall der vollständigen Integration darstellt.

Der Ausdruck „die Übereinstimmungsbedingungen" der Gleichungen in früheren Abschnitten wird statt des Ausdruckes „Involutionsbedingungen", welche man in der Darboux'schen Integrationmethode in Betracht zieht, gebraucht.

Die wichtigen Verallgemeinerungen von Saltykoff, die derselbe zur Bestimmung des vollständigen Integrals einer Gleichung 2. Ordnung mit einer Funktion z, falls die Darboux'sche Methode unbrauchbar wird, benützt, kann man für den Fall eines Systemes der Gleichungen 2. Ordnung mit zwei unbekannten Funktionen z, z' verallgemeinern, um vollständige Integrale eines solchen Systemes der Gleichungen dann zu bestimmen, wenn das mittelst der verallgemeinerten Darboux'schen Methode, die wir in den Abschnitten VIII-XII behandelt haben, nicht möglich wäre.

Leningrad, 18.II. 1933.

Geschlossen am 30. April 1933.