ДОСТАТНІ УМОВИ ГЛОБАЛЬНОЇ НЕПЕРЕРВНОЇ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ЗАДАЧІ З НЕВІДОМИМИ МЕЖАМИ ДЛЯ ВИРОДЖЕНОЇ КВАЗІЛІНІЙНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ

©*2009 р. Володимир КИРИЛИЧ*

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів 79000

Редакція отримала статтю 12 липня 2008 р.

На основі методу характеристик та методу стискаючих відображень встановлено достатні умови, при виконанні яких задача Валле Пуссена з невідомими межами для виродженої квазілінійної гіперболічної системи рівнянь першого порядку має єдиний узагальнений неперервний розв'язок на всьому часовому проміжку.

1. ВСТУП

Для задач, які описують нелінійні хвильові процеси, важливим є питання про їх коректну розв'язність на всьому часовому проміжку, оскільки залежність характеристик рівняння (системи) від шуканих функцій приводить до розривних (слабких) розв'язків [2].

У даній роботі встановлено умови глобальної узагальненої неперервної розв'язності мішаної задачі для одновимірної квазілінійної гіперболічної системи рівнянь першого порядку, коли частина характеристик системи є перпендикулярною до осі часу (вироджена система). Крім того, додаткова інформація про систему задається на внутрішніх невідомих границях, поведінка яких описується системою звичайних диференціальних рівнянь, що є узагальненням задачі Валле Пуссена [5]. Подібні задачі зустрічаються при математичному описі багатьох фізичних явищ, зокрема, при вивченні руху газів та рідин [3].

УДК 517.956; MSC 2000: 30E99

Умови локальної розв'язності таких задач досліджені в роботах [3,6]. У випадку, коли вихідна система не є виродженою, існування локального та глобального узагальненого розв'язків задачі з невідомими межами вивчались у [1, 8]. Питанням глобальної неперервної розв'язності квазілінійних гіперболічних мішаних задач з відомими межами присвячені роботи [4, 7].

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

У прямокутнику $\Pi(T_0) = \{(x,t)|0 \le x \le \ell,\ 0 \le t \le T_0\}$, $\ell > 0$, $T_0 > 0$ — деякі сталі, розглянемо систему

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t,u,v)\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x,t,u,v), \quad i = 1,\dots,m, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x} = q_j(x,t,u,v), \quad j = 1,\dots,n, \tag{2}$$

$$\frac{ds_j}{dt} = r_j(t, s(t), u(s_j(t),t), v(s_j(t),t)), \quad j = 1,\dots,n, \tag{3}$$

де $u = (u_1,\dots,u_m)$, $v = (v_1,\dots,v_n)$, $s = (s_1,\dots,s_n)$. Задамо початкові та граничні умови

$$u(x,0) = \alpha(x), \quad 0 \le x \le \ell, \tag{4}$$

$$s_j(0) = c_j, \quad j = 1,\dots,n, \quad 0 \le c_j \le \ell, \tag{5}$$

$$u_i(0,t) = \gamma_i^0(t), \quad i \in I_+^0 = \{i|\mathrm{sgn}(\lambda_i(0,0,0,0)) = 1\}, \tag{6}$$

$$u_i(\ell,t) = \gamma_i^\ell(t), \quad i \in I_-^\ell = \{i|\mathrm{sgn}(\lambda_i(\ell,0,0,0)) = -1\}. \tag{7}$$

Додаткові умови на невідомі лінії мають вигляд

$$v_j(s_j(t),t) = \beta_j(t), \quad j = 1,\dots,n, \tag{8}$$

де функції $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_m)$, $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_n)$, γ_i^0 $(i \in I_+^0)$, γ_i^ℓ $(i \in I_-^\ell)$ і сталі c_j, $j = 1,\dots,n$, будемо вважати відомими. Позначимо $w = (u,v)$ і запровадимо такі множини:

$$D(T_0,P_0) = \Pi(T_0) \times \{w|\, w \in \mathbb{R}^{m+n}, \|w\| \le P_0\},$$

$$D^1(T_0,P_0) = [0,T_0] \times \{w|\, w \in \mathbb{R}^{m+n}, \|w\| \le P_0\},$$

$$D^2(T_0,P_0) = [0,T_0] \times [0,\ell]^n \times \{w|\, w \in \mathbb{R}^{m+n}, \|w\| \le P_0\},$$

де $P_0 > 0$ — деяка стала, $[0,\ell]^n \in \mathbb{R}^n$. Позначимо:

$$|u| = \max_i |u_i|, \quad |v| = \max_j |v_j|, \quad |s| = \max_j |s_j|, \quad |w| = \max\{|u|,|v|\}.$$

Нехай виконуються наступні припущення:

A1. В області $D^1(T_0, P_0)$ при $i = 1, \ldots, m$ виконуються рівності

$$\operatorname{sgn}(\lambda_i(0, t, u, v)) = \text{const}, \quad \operatorname{sgn}(\lambda_i(\ell, t, u, v)) = \text{const}. \tag{9}$$

A2. Функції $\lambda_i(x, t, w), f_i(x, t, w)$, $i = 1, \ldots, m$, $q_j(x, t, w)$, $j = 1, \ldots, n$, визначені в області $D(T_0, P_0)$, а функції $r_j(x, t, w)$, $j = 1, \ldots, n$, визначені в області $D^2(T_0, P_0)$. Дані функції обмежені за модулем зверху деякими сталими Λ, F, Q, R відповідно. Крім того, функції $q_j(x, t, w)$, $j = 1, \ldots, n$, є неперервні за t.

A3. Існують невід'ємні, сумовні на $[0, T_0]$ (і на $[0, \ell]$ відповідно) функції $\Lambda_1(t), \Lambda_2(t), F_1(t), F_2(t), R_1(t), R_2(t), Q_2(x)$, ($Q_2(x)$ сумовна в квадраті) і майже для всіх $t \in [0, T_0]$ ($x \in [0, \ell]$) при $(x_1, t, w_1) \in D(T_0, P_0)$, $(x_2, t, w_2) \in D(T_0, P_0)$, $(x^1, t, w_1) \in D^2(T_0, P_0)$, $(x^2, t, w_2) \in D^2(T_0, P_0)$ (і при $(x, t, w_1) \in D(T_0, P_0)$, $(x, t, w_2) \in D(T_0, P_0)$ відповідно) виконуються нерівності

$$\begin{gathered}
|\lambda_i(x_1, t, w_1) - \lambda_i(x_2, t, w_2)| \le \Lambda_1(t)|x_1 - x_2| + \Lambda_2(t)|w_1 - w_2|, \\
|f_i(x_1, t, w_1) - f_i(x_2, t, w_2)| \le F_1(t)|x_1 - x_2| + F_2(t)|w_1 - w_2|, \\
|r_j(x^1, t, w_1) - r_j(x^2, t, w_2)| \le R_1(t)|x^1 - x^2| + R_2(t)|w_1 - w_2|, \\
|q_j(x, t, w_1) - q_j(x, t, w_2)| \le Q_2(x)|w_1 - w_2|,
\end{gathered} \tag{10}$$

де $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

A4. Функції $\lambda_i(x, t, w)$, $f_i(x, t, w)$, $i = 1, \ldots, m$, $r_j(x, t, w)$, $q_j(x, t, w)$, $j = 1, \ldots, n$, — вимірні в області $D(T_0, P_0)$.

З припущень A2–A4 випливає, що функції $\lambda_i(x, t, w)$, $f_i(x, t, w)$, $i = 1, \ldots, m$ (і функції $r_j(x, t, w)$, $q_j(x, t, w)$, $j = 1, \ldots, n$) є неперервними в області $D(T_0, P_0)$ за змінними x, w (за змінними t, w) для майже всіх $t \in [0, T_0]$ ($x \in [0, \ell]$) і сумовні за t (за x) на $[0, T_0]$ ($[0, \ell]$) при фіксованих x, w (і t, w відповідно). Якщо $w : \Pi(T_0) \to \mathbb{R}^{n+m}$ та $x : [0, T_0] \to [0, \ell]$ — неперервні функції, то функції $\lambda_i(x(t), t, w(x(t), t))$, $f_i(x(t), t, w(x(t), t))$, $i = 1, \ldots, m$, $r_j(x(t), t, w(x(t), t))$, $j = 1, \ldots, n$, є також сумовними на $[0, T_0]$.

A5. Виконуються умови узгодження нульового порядку

$$\gamma_i^0(0) = \alpha_i(0),\ i \in I_+^0, \quad \gamma_i^\ell(0) = \alpha_i(\ell),\ i \in I_-^\ell. \tag{11}$$

A6. Функції $(x, t, u, v) \to q_j(x, t, u, v)$, $j = 1, \ldots, n$, не залежать від тих v_k, для яких $c_k \ne c_j$.

A7. Виконуються нерівності $r_j(t, 0, u, v) \ge 0$ при $c_j = 0$ і нерівності $r_j(t, \ell, u, v) \le 0$ при $c_j = \ell$.

A8. Існує невід'ємна функція $\tau \to M(\tau)$, сумовна на $[0,\ell]$, що виконуються нерівності

$$|q_j(x,t,w)| \le M(x)|v|, \quad j = 1,\dots,n.$$

Крім того, будемо вважати, що квадрат функції $M(\tau)$ є також сумовним.

A9. Функції $x \to \alpha_i(x)$, $i = 1,\dots,m$, — ліпшицеві зі сталою A_1 та обмежені за модулем зверху сталою A.

A10. Функції $t \to \gamma_i^0(t)$ $(i \in I_+^0)$, $t \to \gamma_i^\ell(t)$ $(i \in I_-^\ell)$, $t \to \beta_j(t)$ — локально ліпшицеві за t зі сталими Γ_1 і B_1 відповідно.

A11. Існують такі сталі $\varepsilon_0 \in (0,\ell)$ і $\Lambda_0 > 0$, що всі значення $\lambda_i(x,t,w)$ $(i \in I_+^0)$ при $0 \le x \le \varepsilon_0$ і $-\lambda_i(x,t,w)(i \in I_-^\ell)$ при $\ell - \varepsilon_0 \le x \le \ell$ не менші, ніж Λ_0, якщо $(t,w) \in D^1(T_0,P_0)$.

Запровадимо позначення:

$$\delta = \min_j \min\left\{c_j, \ell - c_j \,|\, c_j \ne 0, c_j \ne \ell\right\}.$$

Для тих індексів j, для яких $c_j \ne 0$ і $c_j \ne \ell$, означимо множини:

$$D_j^0 = \{(x,t) \in \Pi(T) |\, 0 \le x \le c_j - RT, 0 \le t \le T\},$$

$$D_j^\ell = \{(x,t) \in \Pi(T) |\, c_j + RT \le x \le \ell, 0 \le t \le T\},$$

$$D_j^c = \Pi(T) \setminus (D_j^0 \cup D_j^\ell) = \{(x,t) \in \Pi(T) |\, c_j - RT \le x \le c_j + RT, 0 \le t \le T\}.$$

Якщо ж індекс j є таким, що $c_j = 0$ або $c_j = l$, то множини D_j^0, D_j^ℓ, D_j^c задамо рівностями

$$D_j^0 = \emptyset,$$

$$D_j^\ell = \{(x,t) \in \Pi(T) |\, c_j + RT \le x \le \ell, 0 \le t \le T\},$$

$$D_j^c = \Pi(T) \setminus D_j^\ell.$$

Нехай

$$\|v\| = \max_j \max \left\{ \max_{D_j^0}(|v_j(x,t)| \exp(-H(c_j - RT - x))), \max_{D_j^c} |v_j(x,t)|, \right.$$

$$\left. \max_{D_j^\ell}(|v_j(x,t)| \exp(-H(x - c_j - RT))) \right\},$$

$$\|u\| = \max_{\Pi(T)} |u|, \quad \|w\| = \max\{\|u\|, \|v\|\}, \quad \|s\| = \max_{[0,T]} |s|.$$

Точне значення додатної сталої $H > 0$ вказано нижче в роботі.

Зауваження 1. Очевидно, що

$$\|v\| \le \max_{\Pi(T)} |v(x,t)|, \quad \|w\| \le \max_{\Pi(T)} |w(x,t)| \le \|w\| \exp(H\ell).$$

Зауваження 2. Нехай $U > 0$ — деяка стала. Припустимо, що $\|u\| \le U$. За допомогою леми Гроноулла з рівностей (2), (3) та властивостей функцій q_j, r_j отримуємо такі апріорні оцінки: $\|v\| \le V$, $\|s\| \le S$, де V, S — деякі сталі.

Справді, з формули (2) і припущення A8 випливає, що

$$|v_j(x,t)| \le |\beta_j(t)| + \left| \int_{s_j(t,w)}^{x} q_j(\xi, t, w(\xi,t)) d\xi \right| \le B + \int_0^\ell M(\xi)|v(\xi,t)| d\xi.$$

Тоді $|v(x,t)| \le B + \int_0^\ell M(\xi)|v(\xi,t)|d\xi$ і, отже, $|v(x,t)| \le B \exp\left(\int_0^\ell M(\xi)d\xi\right)$. Враховуючи зауваження 1, з отриманої нерівності дістаємо потрібний результат. Оцінки для функцій s_j отримуємо аналогічними міркуваннями.

Розглянемо простір $\mathbb{E}$ неперервних функцій $w : \Pi(T) \to \mathbb{R}^{m+n}$, $w = (u,v)$, причому функції $(x,t) \to u(x,t)$ будемо вважати ліпшицевими за x, t, а функції $(x,t) \to v(x,t)$ — ліпшицевими за x. Нехай $\mathbb{E}_0(T)$ — куля $\|w\| \le P_0$ в цьому просторі, $P_0 = \max\{U, V\}$.

Через $\mathbb{E}_1(T, L)$ позначимо множину функцій $(u,v) \in \mathbb{E}_0(T)$ таких, що сталі Ліпшиця для функції $(x,t) \to u(x,t)$ (за x, t) і для функції $(x,t) \to v(x,t)$ (за x) є обмеженими зверху сталою $L > 0$.

Для кожного $i = 1, \dots, m$ розв'язок задачі

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i(x, t, w(x,t)), \quad x(\breve{t}) = \breve{x}, \quad w \in \mathbb{E}_0(T), \tag{12}$$

будемо називати характеристикою i-ої сім'ї, що відповідає функції w, цю характеристику позначатимемо через $\varphi_i(t; \breve{x}, \breve{t}, w)$. Для $j = 1, \dots, n$ розв'язок задачі

$$\frac{ds_j}{dt} = r_j(t, s(t), w(s_j(t), t)), \quad s_j(0) = c_j, \quad w \in \mathbb{E}_0(T), \tag{13}$$

позначатимемо через $s_j(t; w)$ і називатимемо j-ою внутрішньою межею.

Згідно з припущеннями A2–A4 та за умови, що $w \in \mathbb{E}_0(T)$, функції λ_i, r_j задовольняють умови Каратеодорі, а тому для кожного $i = 1, \dots, m$ (відповідно, для кожного $j = 1, \dots, n$) існує єдиний узагальнений, тобто абсолютно неперервний розв'язок задачі (12) (відповідно, задачі (13)), який можна продовжити до межі прямокутника $\Pi(T)$.

Зауваження 3. Якщо

$$T \le \frac{1}{R} \min \left\{ \min_{j; c_j \ne 0} c_j,\ \ell - \max_{j; c_j \ne \ell} c_j \right\} := \frac{1}{R} \delta,$$

то розв'язок задачі (13) досягає межі $t = T$.

Справді,

$$\left| \int_0^t \frac{ds_j}{d\tau} d\tau \right| = \left| \int_0^t r_j(\tau, s(\tau), w(s_j(\tau), \tau)) d\tau \right|.$$

Тоді $c_j - RT \le s_j(t; w) \le c_j + RT$. Враховуючи властивості функцій r_j, отримаємо

$$\min_{j; c_j \ne 0} c_j - RT \le |s| \le \max_{j; c_j \ne \ell} c_j + RT.$$

Таким чином, якщо

$$\min_{j; c_j \ne 0} c_j - RT \ge 0, \quad \max_{j; c_j \ne \ell} c_j + RT \le \ell,$$

то розв'язок задачі (13) досягає межі $t = T$. Звідси отримуємо потрібне твердження.

Через $\chi_i(\breve{x}, \breve{t}, w)$ позначимо найменше значення аргумента t, для якого визначений розв'язок $\varphi_i(t; \breve{x}, \breve{t}, w)$.

Для $i = 1, \ldots, m$ запровадимо множини

$$\Pi_i^\alpha(w) = \{(x,t) \in \Pi(T) | \chi_i(x,t,w) = 0\},$$

$$\Pi_i^0(w) = \{(x,t) \in \Pi(T) |\ \chi_i(x,t,w) > 0,\ \varphi_i(\chi_i(x,t,w); x,t,w) = 0\},$$

$$\Pi_i^\ell(w) = \{(x,t) \in \Pi(T) |\ \chi_i(x,t,w) > 0,\ \varphi_i(\chi_i(x,t,w); x,t,w) = \ell\}.$$

Для $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ позначимо

$$\mathfrak{R}_i[w](x,t) =$$

$$= \begin{cases} \alpha_i(\varphi_i(0; x,t,w)), & i = \overline{1,m}, \quad (x,t) \in \Pi_i^\alpha(w), \\ \gamma_i^0(\chi_i(x,t,w), u(0, \chi_i(x,t,w))), & i \in I_+^0, \quad (x,t) \in \Pi_i^0(w), \\ \gamma_i^\ell(\chi_i(x,t,w), u(\ell, \chi_i(x,t,w))), & i \in I_-^\ell, \quad (x,t) \in \Pi_i^\ell(w), \end{cases} \tag{14}$$

$$\mathfrak{I}_i[w](x,t) = \int_{\chi_i(x,t,w)}^t f_i(\varphi_i(\tau; x,t,w), \tau, w(\varphi_i(\tau; x,t,w), \tau)) d\tau, \tag{15}$$

$$\mathfrak{A}_i[w](x,t) = \mathfrak{R}_i[w](x,t) + \mathfrak{I}_i[w](x,t),\ i = 1, \ldots, m, \tag{16}$$

$$\mathfrak{B}_j[w](x,t) = \beta_j(t) + \int_{s_j(t;w)}^{x} q_j(\xi,t,w(\xi,t))d\xi, \quad j = 1,\dots,n. \tag{17}$$

Означення. *Неперервну функцію* $w = (u,v) : \Pi(T) \to \mathbb{R}^{m+n}$, *яка задовольняє систему*

$$\begin{cases} u_i(x,t) &= \mathfrak{A}_i[w](x,t), \quad i = 1,\dots,m, \\ v_j(x,t) &= \mathfrak{B}_j[w](x,t), \quad j = 1,\dots,n, \end{cases} \tag{18}$$

де u *— ліпшицева за* x,t, *а* v *— ліпшицева за* x, *будемо називати узагальненим неперервним розв'язком задачі* (1)–(8).

3. ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ ГЛОБАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ

Умови локальної розв'язності задачі (1)–(8) встановлено у праці [3]. Доведемо наступне твердження.

Теорема 1. *Якщо виконуються припущення A1–A11, то в прямокутнику* $\Pi(T_0)$ *може існувати не більше одного неперервного узагальненого розв'язку задачі* (1)–(8).

Доведення. Зауважимо, що узагальнений неперервний розв'язок $\overset{\circ}{w}(x,t)$ задачі (1)–(8) в прямокутнику $\Pi(T_0)$ є узагальненим неперервним розв'язком такої задачі в будь-якому прямокутнику $[0,\ell] \times [t_1,t_2]$, де $0 \le t_1 \le t_2 \le T_0$, причому початкова умова має вигляд

$$u(x,t_1) = \overset{\circ}{u}(x,t_1), \quad \text{i} \quad c_j = s_j(t_1;\overset{\circ}{w}).$$

Припустимо тепер, що існує точка $(x_0,t_0) \in \Pi(T_0)$, така, що $w_1(x_0,t_0) \neq w_2(x_0,t_0)$, де $w_1(x,t)$, $w_2(x,t)$ — два узагальнені розв'язки задачі (1)–(8). Розглянемо множину $\mathfrak{M} = \{t | w_1(x,t) \neq w_2(x,t)\}$. Нехай $t^* = \inf \mathfrak{M}$. Тоді $t^* \bar{\in} \mathfrak{M}$, оскільки в протилежному випадку з неперервності w_1, w_2 величина t^* не могла би бути точно нижньою межею, тому $w_1(x,t^*) = w_2(x,t^*)$ для $x \in [0,\ell]$.

З іншого боку, оскільки t^* — точна нижня межа, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться точка (x,t) така, що $w_1(x,t) \neq w_2(x,t)$, $0 < t - t^* < \varepsilon$. Переносячи відлік часу в t^* і використовуючи зауваження, зроблене на початку доведення, отримуємо суперечність з існуванням області $[0,\ell] \times [t^*,T]$, в якій оператор $\mathfrak{S}^2(\mathfrak{S} = (\mathfrak{A}_1,\dots,\mathfrak{A}_m,\mathfrak{B}_1,\dots,\mathfrak{B}_n))$ є стиском [3], що завершує доведення.

Розглянемо питання про глобальну розв'язність задачі (1)–(8).

Через $\tilde{\mathbb{E}}(T)$ позначимо підпростір простору $\mathbb{E}(T)$, що складається з функцій $w(x,t) = \{u(x,t), v(x,t)\}$, неспадних за аргументом x, через $\tilde{\mathbb{E}}_1(T,L)$ позначимо відповідний підпростір простору $\mathbb{E}_1(T,L)$, і нехай

$$\tilde{\mathbb{E}}_2(T,L,P) = \{w \in \tilde{\mathbb{E}}_1(T,L) \mid \max\{\|v(x,t)\|, \|u(x,t) - \alpha(x)\|\} \le P\}.$$

Вважатимемо, що всі функції λ_i, f_i, q_j, r_j визначені в $D(T_0,\infty) = \Pi(T_0) \times \mathbb{R}^{m+n}$ і для кожного $P_0 > 0$ виконуються припущення A1–A11, а також припущення:

B1. Функції $\lambda_i(x,t,u,v)$, $i = 1,\dots,m$, — неспадні за x,u,v для кожного фіксованого t.

B2. Функції $\alpha_i(x)$, $i = 1,\dots,m$, — неспадні.

B3. Функції $\gamma_i^0(t)$ $(i \in I_+^0)$ — незростаючі, а функції $\gamma_i^\ell(t)$ $(i \in I_-^\ell)$ — неспадні за t.

B4. Функції $f_i(x,t,u,v)$, $i = 1,\dots,m$, — неспадні за x,u,v для кожного фіксованого t, причому

$$f_i(x,t,u,v) \ge 0, \quad i \in I_+^0, \quad (x,t,u,v) \in D(T_0,\infty),$$

$$f_i(x,t,u,v) \le 0, \quad i \in I_-^\ell, \quad (x,t,u,v) \in D(T_0,\infty),$$

якщо ж $i \notin I_+^0 \cup I_-^\ell$, то на знак $f_i(x,t,u,v)$ обмеження не накладаються.

B5. Функції $q_j(x,t,u,v)$, $j = 1,\dots,n$, — невід'ємні при $(x,t,u,v) \in D(T_0,\infty)$.

B6. Існує така невід'ємна неперервна на $\max\{[0,T_0];[0,\ell]\}$ функція $\tilde{M}(t)$, що в області $D(T_0,\infty)$ виконуються нерівності

$$|f_i(x,t,u,v)| \le \tilde{M}(t)|w|, |r_j(s,t,w)| \le \tilde{M}(t)|s|, i = 1,\dots,m, j = 1,\dots,n.$$

Крім того, нехай функція $M(\tau)$ з припущення A8 є неперервною.

B7. Функції $\Lambda_1(t)$, $\Lambda_2(t)$, $F_1(t)$, $F_2(t)$, $R_1(t)$, $R_2(t)$, $Q_2(x)$ є обмеженими зверху сталими Λ_1, Λ_2, F_1, F_2, R_1, R_2, Q_2 відповідно.

Лема 1. *Для кожного $i = 1,\dots,m$ нехай $\varphi_i(\tau;x_1,t,w)$, $\varphi_i(\tau;x_2,t,w)$ — два узагальнені (в розумінні Каратеодорі) розв'язки задачі*

$$(\varphi_i)'_\tau = \lambda_i(\varphi_i(\tau;x_j,t,w),\tau,w(\varphi_i(\tau;x_j,t,w),\tau)), \quad \varphi_i(t;x_j,t,w) = x_j,$$

$$j = 1,2, \quad w \in \tilde{\mathbb{E}}(T_0),$$

визначені на відрізку $[a,t]$, $a = \max\{\chi_i(x_1,t,w), \chi_i(x_2,t,w)\}$. Тоді справедлива нерівність

$$|\varphi_i(\tau;x_1,t,w) - \varphi_i(\tau;x_2,t,w)| \le |x_1 - x_2|. \tag{19}$$

Доведення. Нехай для визначеності $x_1 < x_2$. Якщо оцінка (19) неправильна, то існує таке значення $t_1 \in [a, t]$, що

$$\varphi_i(t_1; x_2, t, w) - \varphi_i(t_1; x_1, t, w) > x_2 - x_1, \tag{20}$$

до того ж, оскільки характеристики однієї сім'ї не перетинаються, то

$$\varphi_i(\tau; x_2, t, w) > \varphi_i(\tau; x_1, t, w).$$

Враховуючи монотонність функцій $\lambda_i(x, t, w)$, $w(x, t)$, для $\tau \in [t_1, t]$ отримуємо, що

$$\lambda_i(\varphi_i(\tau; x_1, t, w), \tau, w(\varphi_i(\tau; x_1, t, w), \tau)) \leq$$

$$\leq \lambda_i(\varphi_i(\tau; x_2, t, w), \tau, w(\varphi_i(\tau; x_2, t, w), \tau)).$$

Оскільки $t_1 < t$, то

$$\varphi_i(t_1; x_2, t, w) - \varphi_i(t_1; x_1, t, w) =$$

$$= x_2 - x_1 - \int_{t_1}^{t} [\lambda_i(\varphi_i(\tau; x_2, t, w), \tau, w(\varphi_i(\tau; x_2, t, w), \tau)) -$$

$$-\lambda_i(\varphi_i(\tau; x_1, t, w), \tau, w(\varphi_i(\tau; x_1, t, w), \tau))] d\tau \leq x_2 - x_1,$$

що суперечить нерівності (20). Лему доведено.

Наслідок 1. *З леми 1 отримуємо, що* $\Pi_i^{\ell}(w) \cap \Pi_i^0(w) = \emptyset$, *тому* $I_+^0 \cap I_-^{\ell} = \emptyset$ *в* $\Pi(T_0)$.

Лема 2. *Якщо* $w \in \tilde{\mathbb{E}}_2(T, L, P)$, *то функція* $\mathfrak{S}[w](x, t)$ *є неспадною за* x.

Доведення. Нехай $(x_1, t), (x_2, t) \in \Pi_i^{\alpha}(w)$ і нехай для визначеності $x_1 < x_2$, тоді

$$\mathfrak{A}_i[w](x_1, t) - \mathfrak{A}_i[w](x_2, t) = \alpha_i(\varphi_i(0; x_1, t, w)) -$$

$$-\alpha_i(\varphi_i(0; x_2, t, w)) + \int_0^t [f_i(\varphi_i(\tau; x_1, t, w), \tau, w(\varphi_i(\tau; x_1, t, w), \tau)) -$$

$$-f_i(\varphi_i(\tau; x_2, t, w), \tau, w(\varphi_i(\tau; x_2, t, w), \tau))] d\tau.$$

Оскільки $x_1 < x_2$, то $\varphi_i(0; x_2, t, w) > \varphi_i(0; x_1, t, w)$, то згідно з припущенням B2 маємо

$$\alpha_i(\varphi_i(0; x_1, t, w)) - \alpha_i(\varphi_i(0; x_2, t, w)) \leq 0.$$

Застосовуючи припущення B4, отримуємо

$$\mathfrak{A}_i[w](x_1,t) - \mathfrak{A}_i[w](x_2,t) \le 0. \tag{21}$$

Нехай тепер $(x_1,t),(x_2,t) \in \Pi_i^0(w)$, $x_1 < x_2$. Тоді $\chi_i(x_1,t,w) > \chi_i(x_2,t,w)$ і згідно з припущенням B3 маємо

$$\mathfrak{R}_i[w](x_1,t) - \mathfrak{R}_i[w](x_2,t) = \gamma_i^0(\chi_i(x_1,t,w)) - \gamma_i^0(\chi_i(x_2,t,w)) \le 0.$$

Далі, оскільки $(x_1,t),(x_2,t) \in \Pi_i^0(w)$, то $i \in I_+^0$, і згідно з припущенням B4 отримуємо

$$\mathfrak{I}_i[w](x_1,t) - \mathfrak{I}_i[w](x_2,t) =$$

$$= \int_{\chi_i(x_1,t,w)}^{t} [f_i(\varphi_i(\tau;x_1,t,w),\tau,w(\varphi_i(\tau;x_1,t,w),\tau)) -$$

$$- f_i(\varphi_i(\tau;x_2,t,w),\tau,w(\varphi_i(\tau;x_2,t,w),\tau))]d\tau -$$

$$- \int_{\chi_i(x_2,t,w)}^{\chi_i(x_1,t,w)} f_i(\varphi_i(\tau;x_2,t,w),\tau,w(\varphi_i(\tau;x_2,t,w),\tau))d\tau \le 0.$$

Отже, при $(x_1,t),(x_2,t) \in \Pi_i^0(w)$ і $x_1 < x_2$ маємо

$$\mathfrak{A}_i[w](x_1,t) - \mathfrak{A}_i[w](x_2,t) \le 0. \tag{22}$$

Аналогічно доводимо нерівність (22) для $(x_1,t),(x_2,t) \in \Pi_i^\ell(w)$.

Нехай тепер $(x_1,t) \in \Pi_i^0(w)$, $(x_2,t) \in \Pi_i^\alpha(w)$, $x_1 < x_2$. Аналогічно розглядаємо випадок, коли $x_1 < x_2$, $(x_1,t) \in \Pi_i^\alpha(w)$, $(x_2,t) \in \Pi_i^\ell(w)$. Випадок $x_1 < x_2$, $(x_1,t) \in \Pi_i^\alpha(w)$, $(x_2,t) \in \Pi_i^0(w)$ є неможливим.

У розглядуваному випадку, очевидно, існує така точка (x_3,t), що $0 = \varphi_i(0;x_3,t,w)$, крім того, $x_1 \le x_3 \le x_2$. Враховуючи це, а також попередні результати, отримуємо потрібну нерівність

$$\mathfrak{A}_i[w](x_1,t) \le \mathfrak{A}_i[w](x_3,t) \le \mathfrak{A}_i[w](x_2,t). \tag{23}$$

Нехай $(x_1,t) \in \Pi_i^0(w)$, $(x_2,t) \in \Pi_i^\ell(w)$, $x_1 < x_2$. Запроваджуючи проміжну точку $(x_3,t) \in \Pi_i^\alpha(w)$ (існування такої точки випливає з наслідку 1) і використовуючи оцінку (23), отримуємо

$$\mathfrak{A}_i[w](x_1,t) \le \mathfrak{A}_i[w](x_3,t) \le \mathfrak{A}_i[w](x_2,t).$$

Ця нерівність завершує доведення того, що функція $\mathfrak{A}[w](x,t)$ є неспадною за x.

Аналогічно, з формули (17) випливає, що при виконанні умови B5, функція $\mathfrak{B}[w](x,t)$ — неспадна за x. Лему доведено.

Лема 3. *Нехай $w(x,t) = \{u(x,t), v(x,t)\}$ — неперервний в $\Pi(T_0)$ ліпшицевий за x розв'язок рівняння $w = \mathfrak{S}w$. Тоді при виконанні припущень A8 і B6, а також умов зауваження 3, справедлива наступна апріорна оцінка розв'язку*

$$\|u(x,t)\| \le C, \tag{24}$$

$$\|v(x,t)\| \le B \exp\left(\int_0^\ell M(\xi)d\xi\right), \tag{25}$$

$$\|w(x,t)\| \le \max\left\{C,\ B \exp\left(\int_0^\ell M(\xi)d\xi\right)\right\}, \tag{26}$$

де C — деяка додатна стала.

Доведення. У $\Pi(T_0)$ виконується нерівність

$$|v(x,t)| \le B \exp\left(\int_0^\ell M(\xi)d\xi\right), \tag{27}$$

з якої випливає оцінка (25). Якщо $u(x,t)$ — неперервний в $\Pi(T_0)$ розв'язок рівняння $u(x,t) = \mathfrak{A}[w](x,t)$, то, застосовуючи припущення B6 і формулу (27), отримаємо

$$|u_i(x,t)| \le \max\{\Gamma, A\} + \int_0^t |f_i(\varphi_i(\tau;x,t,w),\tau,w(\varphi_i(\tau;x,t,w),\tau))|d\tau \le$$

$$\le \max\{\Gamma, A\} + \int_0^t \tilde{M}(\tau)|w(\varphi_i(\tau;x,t,w),\tau)|d\tau = \max\{\Gamma, A\} +$$

$$+ \int_0^t \tilde{M}(\tau)\max\{|u(\varphi_i(\tau;x,t,w),\tau)|;|v(\varphi_i(\tau;x,t,w),\tau)|\}d\tau \le \max\{\Gamma, A\} +$$

$$+ \int_0^t \tilde{M}(\tau)\left(|u(\varphi_i(\tau;x,t,w),\tau)| + B\exp\left(\int_0^\ell M(\xi)d\xi\right)\right)d\tau = \max\{\Gamma, A\} +$$

$$+ B\exp\left(\int_0^\ell M(\xi)d\xi\right)\int_0^{T_0}\tilde{M}(\tau)d\tau + \int_0^t \tilde{M}(\tau)|u(\varphi_i(\tau;x,t,w),\tau)|d\tau.$$

Перейдемо до максимуму за всіма i, а потім до максимуму за всіма $(x,t) \in \Pi(T_0)$ і застосуємо лему Гронуолла. Таким чином, отримуємо потрібний результат зі сталою C, яка обчислюється за формулою

$$C = \max\{\Gamma, A\} + B\exp\left(\int_0^\ell M(\xi)d\xi\right)\int_0^{T_0}\tilde{M}(\tau)d\tau e^{\int_0^{T_0}\tilde{M}(\tau)d\tau}.$$

Лема 4. *Для розв'язку $s_j(t;w)$, $j=1,\ldots,n$, задачі* (13) *справедлива оцінка*

$$\max_j |s_j(t;w)-c_j| \le \ell \int_0^t \tilde{M}(\tau)d\tau e^{\int_0^t \tilde{M}(\tau)d\tau}. \tag{28}$$

Доведення. Із формули (3) випливає, що

$$\left|\int_0^t \frac{ds_j}{d\tau}d\tau\right| = \left|\int_0^t r_j(\tau, s(\tau), w(s_j(\tau),\tau))d\tau\right| \le \int_0^t \tilde{M}(\tau)|s(\tau;w)|d\tau \le$$

$$\le \max_j c_j \int_0^t \tilde{M}(\tau)d\tau + \int_0^t \tilde{M}(\tau)\max_j |s_j(\tau;w)-c_j|d\tau.$$

Переходячи в лівій частині нерівності до максимуму за j, отримаємо

$$\max_j |s_j(t;w)-c_j| \le \max_j c_j \int_0^t \tilde{M}(\tau)d\tau + \int_0^t \tilde{M}(\tau)\max_j |s_j(\tau;w)-c_j|d\tau.$$

Застосовуючи до попередньої нерівності лему Гронуолла, отримуємо

$$\max_j |s_j(t;w)-c_j| \le \max_j c_j \int_0^t \tilde{M}(\tau)d\tau e^{\int_0^t \tilde{M}(\tau)d\tau}.$$

Лему доведено.

Теорема 2. *При виконанні вказаних вище припущень існує єдиний у всьому $\Pi(T_0)$ неперервний узагальнений розв'язок задачі* (1)–(8)*, і, до того ж, він є неспадною функцією змінної x.*

Доведення. Сталу Ліпшиця функції $w(x,t)$ за змінною x позначимо через L_1, а через Λ_1, Λ_2, F_1, F_2, R_1, R_2, Q_2 — максимуми на $[0,T_0]$ і $[0,\ell]$ функцій $\Lambda_1(t), \Lambda_2(t), F_1(t), F_2(t), R_1(t), R_2(t), Q_2(x)$ відповідно. Будемо вважати, що виконується нерівність $LT < 1$. Виберемо тепер, згідно з лемою 3, деяке $P_0 > \max\left\{C,\, Be^{\int_0^\ell M(\xi)d\xi}\right\}$ і позначимо $P = P_0 - \max\left\{C,\, Be^{\int_0^\ell M(\xi)d\xi}\right\}$. Доведемо, що для деяких $T^1>0, L^1>0$ і $H>0$ оператор $\mathfrak{S}$ є стискуючим відображенням кулі $\tilde{\mathbb{E}}_2(T^1, L^1, P)$ в себе.

За лемою 2 функція $\mathfrak{S}[w](x,t)$ є неперервною і неспадною за x, а функція $\mathfrak{A}[w](x,t)$ в $\Pi(T^1)$ задовольняє умову Ліпшиця за x зі сталою

$$L_1^{\mathfrak{A}} = A_1 + \Lambda_0^{-1}\Gamma_1 + (F_1 + L_1^1 F_2)T^1 + F\Lambda_0^{-1}. \tag{29}$$

Крім того, в $\Pi(T^1)$ функція $\mathfrak{B}[w](x,t)$ задовольняє умову Ліпшиця за x зі сталою Q. Таким чином, сталою Ліпшиця за x функції $\mathfrak{S}[w](x,t)$ буде число

$$L_1^{\mathfrak{S}} = A_1 + \Lambda_0^{-1}\Gamma_1 + (F_1 + L_1^1 F_2)T^1 + F\Lambda_0^{-1} + Q. \tag{30}$$

Сталою Ліпшиця за t функції $\mathfrak{A}[w](x,t)$ можна вважати число

$$L_2^{\mathfrak{A}} = \max\{1,\Lambda\}L_1^{\mathfrak{A}} + F.$$

Зауважимо тепер, що з припущення B6 випливає, що виконується нерівність

$$B + 2QRT^1 + \max_{0\le x\le \ell} M(x)P_0H^{-1} \le P. \tag{31}$$

Тому, якщо

$$B + 2QRT^1 + \max_{0\le x\le \ell} M(x)P_0H^{-1} \le P, \quad (A_1\Lambda + \Gamma_1 + F)T^1 \le P, \tag{32}$$

то з оцінки (31) випливають такі нерівності:

$$\|\mathfrak{S}[w](x,t) - \alpha(x)\| \le P, \quad \|\mathfrak{S}[w](x,t)\| \le P_0.$$

Виберемо тепер сталі $T^1, L_1^{\mathfrak{S}}, H$ так, щоб разом з нерівностями (32) виконувалась оцінка

$$L_1^1 \ge L_1^{\mathfrak{S}} = A_1 + \Lambda_0^{-1}\Gamma_1 + (F_1 + L_1^1F_2)T^1 + F\Lambda_0^{-1} + Q. \tag{33}$$

Для цих сталих $T^1, L_1^{\mathfrak{S}}, H$ оператор $\mathfrak{S}$ відображає простір $\tilde{\mathbb{E}}_2(T^1, L^1, P)$ в себе.

Розглянемо тепер стискуючі властивості оператора $\mathfrak{S}$. Із припущення B7 отримуємо, що для $w^1, w^2 \in \tilde{\mathbb{E}}_2(T^1, L, P)$ виконується нерівність

$$\|\mathfrak{S}[w^1](x,t) - \mathfrak{S}[w^2](x,t)\| \le \kappa\|w^1 - w^2\|, \tag{34}$$

де

$$\kappa = \tilde{\kappa} + (Q\tilde{M}_3T^1 + 2Q_2RT^1 + Q_2H^{-1}), \quad \tilde{M}_3 = R_2e^{(R_1+LR_2)T^1+H\ell},$$

$$\tilde{\kappa} = ([A_1 + \Gamma_1\Lambda_0^{-1} + (F_1 + LF_2)T^1 + F\Lambda_0^{-1}]\Lambda_2e^{H\ell+(\Lambda_1+L\Lambda_2)T^1} + F_2e^{H\ell})T^1.$$

Припустимо тепер, що виконується наступна умова:

B8. Нехай для функцій $r_j, j = 1,\ldots,n$, функція $\tilde{M}(t)$ задовольняє наступну рівність: $\tilde{M}(t) = pt$, де стала $p > 0$ буде вказана нижче.

Якщо виконується припущення B8, то з леми 4 отримаємо

$$\max_j |s_j(t;w) - c_j| \le \ell \int_0^t p\tau d\tau e^{\int_0^t p\tau d\tau} = \ell \frac{pt^2}{2} e^{\frac{pt^2}{2}} \le \ell \frac{pT_0^2}{2} e^{\frac{pT_0^2}{2}}. \qquad (35)$$

Позначимо $h(p) = \ell \frac{pT_0^2}{2} e^{\frac{pT_0^2}{2}}$. Тоді для довільного $\delta > 0$, означеного в п. 1, існує таке $p > 0$ (досить мале), що $h(p) < \delta$.

Тоді розв'язок задачі (13) не виходить за межі $x = 0$ і $x = \ell$ області $\Pi(T_0)$, а рівняння (17) будуть мати сенс в усьому прямокутнику $\Pi(T_0)$. (Зауважимо, що враховуючи властивості функції $r_j(x,t,w)$, $j = 1, \dots, n$ при $c_j = 0$ і $c_j = \ell$ це твердження також буде виконуватися).

Замінимо тепер в означенні множин D_j^0, D_j^ℓ, D_j^c, а також в означенні норми v всі добутки RT на $h(p)$. Означена таким чином норма v, а також області D_j^0, D_j^ℓ, D_j^c не будуть залежати від T.

Враховуючи всі попередні зауваження для оператора $\mathfrak{B}$, для $w^1, w^2 \in \mathbb{E}_2(T, L, P)$ справджується оцінка

$$\|\mathfrak{B}[w^1](x,t) - \mathfrak{B}[w^2](x,t)\| \le (QM_3 + 2Q_2 h(p) + Q_2 H^{-1})\|w^1 - w^2\|.$$

Тому у формулі (34) можна покласти

$$\kappa = \tilde{\kappa} + (Q\tilde{M}_3 T^1 + 2Q_2 h(p) + Q_2 H^{-1}). \qquad (36)$$

Крім того, при виконанні цих припущень перша з нерівностей (32) набуде такого вигляду

$$B + 2Qh(p) + \max_{0 \le x \le \ell} M(x) P_0 H^{-1} \le P.$$

Таким чином, при досить малих $T^1 > 0, p > 0$ і досить великому $H > 0$ оператор $\mathfrak{S}$ є стиском, тому задача (1)–(8) має єдиний неперервний узагальнений розв'язок для деякого T^1.

Далі будемо будувати розв'язок в усьому $\Pi(T_0)$ кроками за t, використовуючи при цьому на кожному кроці доведену частину теореми 2, а саме, якщо $T^1 < T_0$, то перенесемо початковий момент часу в точку $t = T^1$, приймаючи при цьому замість $\alpha(x)$ розв'язок $u(x,t)$, отриманий на попередньому кроці в точці $t = T^1$ (в даному випадку роль сталої A_1 буде відігравати L_1^1), а замість c_j^2 — значення функції $s_j(t;w)$ при $t = T^1$ (при цьому жодних нових обмежень на функцію $q_j(x,t,w)$ не накладаємо, оскільки тепер норма v не залежить від T^n, а згідно з (35), для всіх v_k, для яких $c_k = c_j$, розв'язок задачі (13) не виходить за межі області D_j^c і тому всі оцінки зроблені для оператора $\mathfrak{B}$ залишаються вірними). Застосувавши тепер доведену частину теореми 2, знову отримаємо розв'язок задачі (1)–(8) для деяких T^2, L^2 при тих же P, P_0. Далі, якщо $T^1 + T^2 < T_0$, то проробляємо цю процедуру знову і т.д. Оскільки з кожним таким кроком величина сталої Ліпшиця зростає (див.(33)), а величина T^n — обернено пропорційна до L, то отримуємо, що таким чином можна побудувати розв'язок в області $[0, \ell] \times [0, T^*]$, де $T^* = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T^n$.

Покажемо, що при зроблених припущеннях можна вибрати значення T^n і L^n таким чином, що цей ряд буде розбіжним, тоді розв'язок задачі (1)–(8) можна побудувати для довільного досить великого T_0.

З проведених міркувань випливає, що на n-ому кроці повинні виконуватися наступні нерівності

$$h(p) < \delta, \quad L^n T^n < 1, \quad T^n \Lambda_1 \Lambda < \Lambda_0, \quad 2\Lambda T^n < \ell,$$

$$([L^{n-1} + \Gamma_1 \Lambda_0^{-1} + (F_1 + L^n F_2) T^n + F\Lambda_0^{-1}] \Lambda_2 e^{H\ell + (\Lambda_1 + L^n \Lambda_2) T^n} + F_2 e^{H\ell}) T^n +$$
$$+ (Q \tilde{M}_3 T^n + 2Q_2 h(p) + Q_2 H^{-1}) < 1,$$
$$B + 2Qh(p) + \max_{0 \le x \le \ell} M(x) P_0 H^{-1} \le P, \quad (L^{n-1}\Lambda + \Gamma_1 + F) T^n \le P,$$
$$L^n \ge L^{n-1} + \Lambda_0^{-1}\Gamma_1 + (F_1 + L^n F_2) T^n + F\Lambda_0^{-1} + Q. \qquad (37)$$

Крім того, нехай виконується нерівність $\tilde{F} T^n < 1$, де $\tilde{F} = \max\{F_1, F_2\}$. Покладемо тепер з врахуванням нерівності $L^n T^n < 1$:

$$L^0 = A_1,$$

$$L^n = L^{n-1} + \Lambda_0^{-1}\Gamma_1 + \tilde{F} + 1 + F\Lambda_0^{-1} + Q = A_1 + n(\Lambda_0^{-1}\Gamma_1 + \tilde{F} + 1 + F\Lambda_0^{-1} + Q).$$

Позначимо:

$$\tilde{M} = e^{H\ell} \max\left\{e^{\Lambda_1 T_0 + \Lambda_2},\ e^{R_1 T_0 + R_2}\right\},$$
$$c_1 = Q\tilde{M} + F_2 e^{H\ell} + \tilde{M}\Lambda_2(\Gamma_1 \Lambda_0^{-1} + 1 + \tilde{F} + F\Lambda_0^{-1}),$$
$$c_2 = \Lambda_0^{-1}\Gamma_1 + \tilde{F} + 1 + F\Lambda_0^{-1} + Q$$

і виберемо сталі p і H так, щоб виконувались нерівності:

$$h(p) < \delta, \quad B + 2Qh(p) + \max_{0 \le x \le \ell} M(x) P_0 H^{-1} \le P,$$

$$2Q_2 h(p) < 1/3, \quad Q_2 H^{-1} < 1/3.$$

Тоді частина нерівності (37) набуває вигляду

$$T^n < \frac{1}{\tilde{F}}, \quad T^n < \frac{1}{L^n}, \quad T^n < \frac{\ell}{2\Lambda}, \quad T^n < \frac{\Lambda_0}{\Lambda_1 \Lambda},$$

$$T^n < \frac{1}{3[c_1 + \tilde{M}\Lambda_2(A_1 + (n-1)c_2)]}, \quad T^n < \frac{P}{c_3 + \Lambda(A_1 + (n-1)c_2)},$$

де $c_3 = \Gamma_1 + F$. Отже, замість T^n можна взяти

$$T^n = \frac{c_4}{A_1 + nc_5 + c_6}, \tag{38}$$

де

$$c_4 = \min\left\{\frac{1}{\tilde{F}}, \frac{\ell}{2\Lambda}, \frac{\Lambda_0}{\Lambda_1\Lambda}, \frac{1}{3\tilde{M}\Lambda_2}, \frac{P}{\Lambda}\right\},$$

$$c_5 = c_2, \quad c_6 = \max\left\{0, \frac{c_1}{\tilde{M}\Lambda_2} - c_2, \frac{c_3}{\Lambda} - c_2\right\},$$

а

$$\sum_{n=1}^{\infty} T^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_4}{A_1 + nc_5 + c_6} = +\infty.$$

Оскільки число T_0 — скінченне, то побудований таким способом розв'язок буде існувати в цілому $\Pi(T_0)$, що й завершує доведення теореми 2.

Глобальна єдиність розв'язку задачі (1)–(8) випливає з теореми 1.

Наслідок 2. *Нехай задача* (1)–(8) *розглядається на* $[0, \infty)$*, причому виконуються всі попередні припущення на кожному скінченному відрізку* $[0, T_0]$*,* $T_0 > 0$*. Тоді існує єдиний узагальнений неперервний розв'язок задачі* (1)–(8) *на всьому інтервалі* $0 \le t < \infty$*.*

Автор висловлює подяку професору А. Філімонову за поради та зауваження.

[1] *Андрусяк Р.В., Кирилич В.М., Мышкис А.Д.* Локальная и глобальная разрешимость квазилинейной гиперболической задачи Стефана на прямой // Дифференц. уравнения, 2000. – **42**, № 4. – С. 1–15.

[2] *Бхатнагар П.* Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах. – М.: Мир, 1983. – 135 с.

[3] *Лапин Д.С., Филимонов А.М.* Смешанная задача для сингулярной квазилинейной гиперболической системы с одной пространственной переменной // Матем. заметки, 2003. – **73**, № 2. – С. 315–318.

[4] *Мышкис А.Д., Филимонов А.М.* О глобальной непрерывной разрешимости смешанной задачи для одномерных гиперболических систем квазилинейных уравнений // Дифференц. уравнения, 2008. – **44**, № 3. – С. 1–15.

[5] *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

[6] *Филимонов А.М.* Задача Стефановского типа для гиперболических систем квазилинейных уравнений с вырождением. – М.: ВИНИТИ, 1983. – 19 с.

[7] *Turo J.* Global solvability of the mixed problem for first order functional partial differential equations // Annales Polonici Mathematici, 1991. – LI. – P. 231–238.

[8] *Turo J.* Mixed problems for quasilinear hyperbolic systems // Nonlinear Analysis, Theory, Methods, Applications, 1997. – **30**, № 4. – P. 2329–2340.

SUFFICIENT CONDITIONS FOR GLOBAL CONTINUOUS SOLVABILITY OF THE FREE BOUNDARY PROBLEM FOR DEGENERATE QUASILINEAR HYPERBOLIC SYSTEM

Volodymyr KYRYLYCH

Ivan Franko National University of Lviv,
1 Universytetska Str., Lviv 79000, Ukraine

Applying method of characteristics and method of contraction mapping, the sufficient conditions were provided under which free boundary Vallée Poussin problem for degenerate quasilinear hyperbolic system of first-order equations will have single generalized continuous solution over the whole time length.