Ю. БОГАЧЕВСЬКИЙ (Стрий).

Формалізм та інтуїціонізм у математиці.[1]

Оцей доклад виходить в дещо зміненому виді. А саме додано до нього деякі пояснення, необхідні на це, щоби читач, не все математик, міг як слід зорієнтуватись у проблємі. Всеж таки доклад (реферат) остане докладом та не слід ставити до нього таких самих вимог, як до моноґрафії тої ділянки математики, що її в такому чи інакшому місці заторкує. Його ціль — поінформувати, заінтересувати. І якщо така, що правда, скромна ціль буде осягнена, то здається, що завдання докладу можу вважати сповненим. Та в ніякому випадку такий доклад, хоч би в десятеро поширений, не буде надаватись до студії. Тому подаю наприкінці літературу предмету, бодай таку, як знаю, крім цього згадуватиму принагідно ориґінальні твори та розвідки, що з них можнаби річ студіювати. Не хочу вплутувати ненаукових афоризмів. та мимохіть нагадуються та насуваються слова віденського фізика Лєхера: „... Stecken wir das Ziel bescheidener, so erreichen wir mehr". Маю надію, що оцей доклад сповнить своє ось так скромно закроєне завдання.

I. ПРОБЛЄМА.

Як тему розвідки вибрав я полєміку, що вивязалась поміж математиками в останніх десятиліттях та яку порушувано трохи не на кожному з'їзді математиків — з післявоєнних згадати б тільки про з'їзд в Навгаймі 1920 р., Єні 1921 р., Лайпціґу 1922 і др., а з останніх з'їзд німецьких лікарів і природників в Празі, на якому брали участь в дискусії не тільки математики, а й представники льоґіки, а також і критики мови. Полєміка торкається питання вартости математики та стійности її тверджень. Питання можна сформулувати словами, що їх тяжко перекласти на українську мову: „Ist die jetzige Mathematik überhaupt logisch zwingend?"

Відповідно до цього, як ставились математики до цього питання, та чи давали притакуючу, чи заперечуючу відповідь на

[1]) Реферат читаний на VI. з'їзді укр. природників і лікарів у Львові 17. травня 1937.

 нього, ділились вони на два табори. Противники тези про безоглядну стійність та „певність“ математики називають себе **інтуіціоністами**, приклонників називають **формалістами**. Цікаво, що саме оці математики, яким наука дуже багато завдячує, подали з часом в сумнів багато тверджень та доказів, між ін. навіть своїх власних. Ця обставина є доказом, що таке їх становище це вислід еволюції їхніх поглядів, та приневолює ставитись до їхнього становища дуже серіозно та схилити голову перед їх самокритикою, гідною справді вченої людини.

Щоби як слід з'ясувати становище представників обидвох напрямків на прикладах, вибираю підстави ґеометрії, що на них найкраще можна з'ясувати становище формалістів, та теорію множин, на якій найперше почали показуватись риси і прогалини, що її довели опісля до крізи, чи радше розбудови підстав. Маючи на увазі читачів, не обізнаних із математичними поняттями, постараюсь пояснити поняття, які прийдеться заторкнути, по змозі ясно і докладно, пресумуючи тільки такі відомости з математики, що їх дає середньошкільне образування.

II. ОСНОВИ ҐЕОМЕТРІЇ.

Перші відомости про ґеометрію, трактовану формально, тобто не як практичне землемірство (як вказувала б сама назва), а як замкнену в собі систему правд, залежних одна від одної, маємо від греків. Менш-більш з VI. ст. пер. Хр. ґеометрія (а ґеометрією називали фільософи все те, що сьогодні називаємо математикою) вважалась ділянкою льоґіки, та й то чи не найважнішою, як на це вказує хочби висказ **Плятона** „*Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰςίτω μοῦ τὴν στέγην*“. Оці фільософи, в боротьбі з софістами, видосконалили ґеометрію, як абстракційну науку, так що через більш як 2000 літ підстави ґеометрії, виложені в **Евклідових** „*Στοιχεῖα*“ лишились ненарушені. Що більше, наука ґеометрії ще до недавна була майже однозначна з наукою Евклідових елементів. Щоби порівнати **Евклідову** аксіоматику з новітньою **Гільбертовою**, дозволю собі задержатись найперше на деяких дефініціях, постулятах та аксіомах Евкліда. Притім покликуватисьму на липське видання **Heiberg'a**: Euclidis Elementa Vol. I libros I—IV. continens. Lipsiae 1883, 333 S..

Отже перша книга зачинається 23-ма дефініціями, 5-ма постулятами і 5-ма аксіомами. З поміж усіх 118 дефініцій (*ὅροι*) пригляньмося н. пр. I „*Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν*“ (точка це щось, що не дається поділити) або до II „*Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές*“ (лінія це довжина без ширини) або до IV „*Εὐθεῖα γραμμή* *ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται*“ (проста лінія це така, що однаково [„в однаковий спосіб“] лежить поміж своїми точками). В оцих і декількох дальших таких самих дефініціях Евклід намагається викликати в читача наглядне зображення, уявління цих творів, про які говорить. Цілком інакше Д. Гільберт, у якого ґеометрія цілком сформалізована. Та над цим задержуся небавом.

Постуляти (*αἰτήματα*) і аксіоми (*κοιναὶ ἔννοιαι*) — це деякі правди, що відносяться до оцих основних понять, описаних дефініціями, та й то такі правди, що з них уже методами чистої льоґіки можна вивести усі твердження ґеометрії. Оця величня льоґічна будівля, що спочиває на фундаменті оцих постулятів та аксіомів, це ще й до сьогодні зразок математичної аксіоматики. Та оця будівля виказує одну хибу: система аксіом неповна. Так нпр. в XVII дефініції (поперечник кола — це якабудь проста, поведена через середину і з обидвох боків обмежена обводом кола, вона переполовлює коло) або в XXIII (рівнобіжні це такі лінії, що лежать на одній площі і, продовжені з обидвох боків в безконечність, не перетинаються з жадного боку) — приймається як самозрозумілий, ненаписаний, постулят, що кожна точка ділить просту на дві частини, в V. постуляті (якщо проста перетинає дві прості і творить з ними з одного боку середові кути менші від двох прямих кутів, то ті прості перетинаються з цього боку, по якім лежать ці середові кути, менші від двох прямих кутів) — принимається мовчки, що кожна проста ділить площу на два обшири, в IV. аксіомі (це, що накривається одне з одним, є одне одному рівне), говориться про накривання (*τὰ ἐφαρμόζοντα*), отже вводиться поняття руху і т. д. Деякого доповнення аксіоматики довершив у 1882 р. M. Pasch у своїх „Vorlesungen über neuere Geometrie„. Між ін. вводить він до ґеометрії т. зв. „Zwischen-Axiom“-и — слово, що його тяжко перекласти на якунебудь іншу мову.

Довгі досліди „Елементів“ Евкліда та спроби перебудови його аксіоматики, особливо невдачні зусилля, щоб доказати т. зв. V-ту аксіому Евкліда та відкинути її накінець як залежну від других, довели до відкриття т. зв. неевклідової ґеометрії.

Тут маленьке пояснення; говорю про неевклідову ґеометрію і так азиваю ґеометрію Лобачевського, що в ній побіч аксіомів т. зв. „абсолютної“ ґеометрії (тобто такої, що не робить ужитку з V. Евкл. ксіоми, а занимається тільки твердженнями, що дадуться вивести з усіх нших аксіом крім V-ої) важна замість V. аксіоми Евкліда аксіома Лоачевського: „Існує проста g і точка P поза простою g, така, що донайменше дві прості, поведені через P, не перетинають простої g, (Rich. Baldus: Nichteuklidische Geometrie стор. 70). Існує ще крім цього ґеометрія Riemann-а, що в ній важна замість Евклідової аксіоми аксіома Рімaнна, а саме, що з точки поза простою не дасться повести до простої жадна рівнобіжна. Та прийнявши цю аксіому, мусимо відкинути деякі аксіоми абсолютної ґеометрії. Так нпр. в абсолютній ґеометрії, так само в Евклідовій і Лобачевського, дві прості можуть перетинатись щонайбільше в одній точці (якщо не накриваються), а в ґеометрії Рімaнна дві прості перетинаються усе в двох точках. Або інший приклад: в абсолютній ґеометрії, так само в ґеометрії Лобачевського, важна м. ін. аксіома: з трьох точок на простій усе одна з них лежить поміж двома другими. Натомість в теорії Рімaнна маємо аксіому: Кожна з трьох точок на якійнебудь простій лежить поміж двома другими.

Вже на оцих прикладах видно, що аксіома Рімaнна, поставлена на місце V. Евклідової аксіоми (або однозначної з нею іншої) нарушує інші аксіоми абсолютної ґеометрії, натомість аксіома Лобачевського не нарушує їх. Тимсамим можна розбудовувати абсолютну ґеометрію або приймаючи додатково V. аксіому Евкліда або V. аксіому Лобачевського. В першому випадку маємо Евклідову, в другому неевклідову ґеометрію. Хоч дехто зачислює ще й ґеометрію Рімaнна до „неевклідових" ґеометрій.

Пізнання цієї неевклідової ґеометрії, та критика підстав ґеометрії довели до повстання новітньої аксіоматики, що найшла зразковий вислів в Гільбертових „Grundlagen der Geometrie", оцьому ще досі не перевисшеному творі, хоч сам Гільберт доповнював підстави ґеометрії, хоч дехто, як нпр. A. Rosenthal виказував, що деякі з аксіом зайві, хоч дехто (як нпр. M. Dehn) розбудовував їх дальше, інколи на зазив самого Гільберта. В цьому творі піддано Евклідові аксіоми основній критичній аналізі та перерібці. Різниці поміж постулятами та аксіомами там уже немає, говориться тільки про аксіоми.

Замість дефініцій виступають там уже тільки пояснення (Erklärungen).

У вступі каже Гільберт: „Die Geometrie bedarf — ebenso wie die Arithmetik — zu ihrem folgerichtigen Aufbau nur weniger und einfacher Grundsätze. Diese Grundsätze heißen Axiome der Geometrie... Die vorliegende Untersuchung ist ein neuer Versuch, für die Geometrie ein vollständiges und möglichst einfaches (підчеркнення самого автора) System von Axiomen aufzustellen und aus denselben die wichtigsten geometrischen Sätze in der Weise abzuleiten, daß dabei die Bedeutung der verschiedenen Axiomgruppen und die Tragweite der aus den einzelnen Axiomen zu ziehenden Folgerungen (підчеркнення моє) möglichst klar zutage tritt".

„Vollständiges System" значить, що усе там повинно бути ясно сказане, отже немає там місця для аксіомів, впроваджуваних „мовчки", як це діється у Евкліда. Тяжше вже приходиться сказати, що значить „möglichst einfaches System". Це відчувається радше інтуіційно. Натомість новим являється домагання далекосяглости (Tragweite) аксіом. У Евкліда всі аксіоми однаково важні; у Гільберта вони поділені на ґрупи і нова ґрупа виступає у нього щойно тоді, як вже з попередньої не дасться вивести більше тверджень.

На початок кладе Гільберт ось такі пояснення: Подумаймо собі три різні системи предметів (drei verschiedene Systeme von Dingen). Предмети першої системи (Dinge des ersten Systems) назвім точками і зазначім їх A, B, C,..., предмети другої системи простими і зазначім їх a, b, c,..., предмети третьої системи площами і зазначім їх $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Точки називаємо також елементами лінійної ґеометрії, точки і прості елементами ґеометрії на площі, а точки, прості і площі елементами просторової ґеометрії. Оці елементи хай стоять одні до одних у деяких відношеннях. Оці взаємовідношення елементів зазначуємо словами: „лежати", „поміж", „рівнобіжний", „приставати", „суцільний"; докладний опис оцих взаємовідношень дають аксіоми ґеометрії.

Свої аксіоми ділить Гільберт на 5 ґруп, а саме:

I. 1—8. Аксіоми злуки (Axiome der Verknüpfung).
II. 1—4. Аксіоми впорядкування (Axiome der Anordnung).
III. 1—5. Аксіоми приставання (Axiome der Kongruenz).
IV. Аксіома рівнобіжних (Axiom der Parallelen).
V. 1—2. Аксіоми суцільности (Axiome der Stetigkeit).

Якщо порівняємо Гільбертові дефініції з Евклідовими, то вдаряє нас тут чистий sit venia verbo — вербалізм. Для Гільберта цілком байдуже, що собі подумаємо під „точкою", „простою", чи „площею". Ніде не сказано, щоб це доконче були такі точки, як їх собі уявляємо звичайно. Важне тільки те, щоби оці твори уяви, які собі виберемо як інтерпретацію оцих назв, сповнювали вимоги, висказані в аксіомах і більш нічого! Ґеометрія таким чином вповні сформалізована. Висловлюючись приступно, а водночас досадно, можна сказати, що ґеометрія є не те, що нарисуємо, а те, що говоримо, чи навіть напишемо, навіть не те, про що говоримо, чи пишемо, а те, що ми говоримо, чи пишемо.

II. МОЖЛИВІСТЬ ІНТЕРПРЕТАЦІЇ ТА ПИТАННЯ ПОВНОТИ АКСІОМ.

Ще одна різниця виступає наявно поміж Евклідовими і Гільбертовими аксіомами: а саме, що Гільбертові поняття можна реалізувати. інтерпретувати в якийнебудь спосіб, аби тільки були сповнені аксіоми. Таку довільність інтерпретації можна показати на ось такому прикладі: в математиці дуже часто послуговуємось т. зв. стереоґрафічною проєкцією, а саме беремо під увагу кулю (ґльоб) Ґ, відзначуємо на ньому обидва бігуни і ведемо опісля через рівник площу π. Кожну точку тої площі лучимо простою з північним бігуном. Така проста перетинає кулю все в одній точці (крім того в північному бігуні). Кажемо, що відтворюємо площу π на кулю Ґ, а саме часть площі поза рівником на північну, внутрішню часть на полудневу півкулю. Значить, що кожній точці площі π відповідає (є припорядкована) одна і тільки одна точка на кулі Ґ і навідворот. Кожній простій на площі π відповідає на ґльобі Ґ коло, яке переходить через північний бігун, простим, що переходять через осередок рівника, відповідають на Ґ великі кола (полудненники). Двом рівнобіжним на площі π відповідають на Ґ два кола, що переходять через півн. бігун. Цей бігун є для них точкою стичности. Та притім треба памятати, що північний бігун як т. зв. „окремішну точку“ виключується з математичних розважань. Приймім тепер, що двох математиків говорять про ґеометрію, а саме про Гільбертові аксіоми та виводять з них відповідні твердження; один з них має на думці точку і прості на площі, другий натомість відповідні твори на відповідному ґльобі. Як довго вони нічого не рисують, так довго вони дійдуть до повного порозуміння. Їх обидві „ґеометрії“ будуть однаково важні, однаково „правдиві“, а саме тому, що вони погоджуються відносно своєї аксіоматики*).

Оцього зрозуміння, що під точкою, простою, чи площею можна розуміти щось інакше, чим ми звичайно розуміємо, у Евкліда ще не було. Ґеометрію Гільберта ціхує, в противенстві до Евкліда, льоґічний формалізм.

Тут іще насувається питання, чи така довільність інтерпретації не посунена занадто далеко; значить, що якщо придумаємо собі дві якінебудь інші інтерпретації ґеометричних понять, то щоби вони усе далися відтворити одна на одну в вищеописаному змислі, та й то однозначно. Система аксіом мусить бути повна. Чи система аксіом Гільберта повна, значить чи там не пропущено якої ще потрібної аксіоми, на це може дати відповідь щойно критика тверджень, виведених з оцих аксіом.

---

*) Rich. Baldus: Formalismus und Intuitionismus in der Mathematik. Karlsruhe in Baden 1924, стор. 11.

IV. ПИТАННЯ ЗГІДНОСТИ АКСІОМ ОДНИХ З ОДНИМИ ТА ЇХ ВЗАЇМНОЇ НЕЗАЛЕЖНОСТИ.

Згідність аксіом одних з одними доказує Гільберт так, що відтворює (також в поясненому попереду змислі) предмети першої системи на множину дійсних чисел, предмети третьої системи (площі) на множину лінійних рівнань з трьома змінними (з дійсними сучинниками), а предметів другої системи, простих, на множину пар таких рівнань.

Для не-матиматиків подам ось таке пояснення: відтворення множини точок на множину дійсних чисел (а радше трійки таких чисел) значить встановлення одно-однозначної відповідности поміж точками і трійками чисел, так щоб кожній трійці чисел відповідала одна і тільки одна точка і навідворот. Як це робиться на площі, знаємо із шкільної науки альґебри: рисуємо т. зв. систему сорядних Декарта і зазначуємо початок укладу парою чисел (0, 0), всі інші точки відповідними парами чисел. В просторовій ґеометрії мусимо вибрати систему Декарта з трьома осями, простопадними одна до одної, початкову точку зазначуємо трійкою (0, 0, 0), всі інші точки відповідними трійками чисел. Так само знаємо із шкільної альґебри, що кожній простій відповідає якесь рівнання з двома змінними

$$ux + vy + w = 0,$$

а що дві прості (нерівнобіжні) перетинаються в одній точці, то ми могли б також точки на площі означувати парами таких рівнань. В просторовій аналітичній ґеометрії площі зазначуються лінійними рівнаннями з трьома змінними

$$ux + vy + wz + t = 0,$$

а що дві площі нерівнобіжні перетинаються в простій, то прості лінії в просторовій ґеометрії зазначуються парами таких лінійних рівнань з трьома змінними.

Отож, якщо яканебудь суперечність мала б місце поміж аксіомами або висновками з цих аксіом, то така суперечність виступила б таки зараз в множині дійсних чисел. Таким чином Гільберт узалежнює згідність ґеометрії з собою від згідности аритметики з собою. Та саме оцю згідність аритметики з собою треба було таки доказати і це завдало Гільбертові згодом навіть чимало мороки.

Що ж торкається взаємонезалежности аксіом, то незалежність аксіоми рівнобіжних від других аксіом доказує Гільберт можливістю неевклідової ґеометрії, незалежність аксіом приставання від других аксіом можливістю інакшої ґеометрії, незалежність аксіом суцільности можливістю не-Архимедової ґеометрії. Та годі отрястися з подиву для ґеніяльної інтуїції Евкліда, що, не знаючи модерної аритметики та аналітично-ґеометричних метод, поставив свій V. постулят на належному місці.

V. НЕРОЗВЯЗАНІ ПРОБЛЄМИ.

Тому що для формалістів та інтуіціоністів — характеристичне м. ін. їхнє становище до нерозвязаних проблєм та до т. зв. доказів існування, представлю в оцьому уступі бодай декілька таких проблєм.

Теорія чисел знає т. зв. проблєму Fermat'-a, що лежить у тому, щоб найти доказ т. зв. великого твердження Fermat'-a, а саме, що неможливо найти такі три цілі числа $x, y, z,$ аби було сповнене рівнання

$$x^n + y^n = z^n$$

де n було б більше чим 2. Дотепер переведено докази тільки в поодиноких випадках для $n = 3, 4, 5$ і т. д. та доведено аж до числа 257, натомість не вдалось подати загального доказу для всіх натуральних чисел, підставлених за n.

До сьогодні немає відповіді на питання, чи маємо скінчену, чи нескінчену кількість пар первісних чисел з різницею 2, як н. пр. 5 і 7, 11 і 13, 41 і 43 і т. д.

До сьогодні ще не маємо доказу т. зв. твердження Ґольдбаха, а саме, що кожне паристе число дасться бодай в один спосіб представити як сума двох первісних чисел, н. пр.: $10 = 7 + 3$, $18 = 11 + 7$, $22 = 19 + 3$ і т. д.

До тепер ще не знаємо, чи т. зв. Ойлерівська (Euler) стала (Konstante)

$$C = \lim_{n \to \infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log(n+1)\right]$$

є алґебричним, чи трансцедентним числом. [Алґебричним називаємо число, що може бути коренем (розвязкою) алґебричного рівнання з цілочисловими сучинниками. Числа, що не можуть бути розвязкою таких рівнань, називаємо трансцедентними].

Таких нерозвязаних проблєм математика знає більше. Не від речі буде згадати, що ще до недавна, бо до 1871 р. не було доказу, що число π переступне.

VI. ДОКАЗИ ІСНУВАННЯ.

В математиці переводиться часто т. зв. докази існування деяких математичних понять, хоч самого поняття при тім не твориться, не показується ефективно. Так н. пр. в альґебрі зокрема доказується існування розвязок рівнань, а зокрема показується вираження, що їх представляють. Що більше, Абель доказав, що для рівнань V. і вищих ступінів неможливо (в загальному випадку) найти альґебричне вираження (себто при помочі чергового корінювання) на розвязки рівнання, а проте ці розвязки існують! Та й не тільки існують, а й маємо величню будівлю теорії альґебричних чисел, отже чогось такого, що ефективно маємо тільки в виняткових випадках, для виняткових рівнань.

Так само маємо докази існування інтеґралів диференціяльних рівнань, що їх треба відрізнити виразно від ефективного заподавання таких інтеґралів (розвязок)*).

Та бувають і ефективні докази існування. Щоби показати хоч на одному прикладі різницю між ефективним а неефективним доказом, наведу доказ існування трансцедентних чисел, так як його подає G. Cantor на підставі своєї теорії множин, а як доказують існування оцих чисел Liouville, Hermite і Lindemann. Доказ Cantor-а, що його він перевів на з'їзді природників в Галлє 1891 р., переповідаю за Кляйном. Цей доказ дещо відмінний від цього, що його Кантор оголосив 1873 р. (в 77-му томі Journal f. reine u. angew. Mathematik). Та передтим дам декілька необхідних пояснень з теорії множин.

Множиною називаємо (за Кантором) скінчений або й нескінчений збір (комплекс) предметів, різних один від одного. Ці предмети називаємо елементами множини.

Найбільш типовим прикладом множини в нескінченою кількістю елементів є множина натуральних чисел

$$\{1, 2, 3, \ldots\}$$

або множина усіх паристих чисел

$$\{2, 4, 6, \ldots\}$$

або усіх можливих дробів

$$\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}, \ldots\}.$$

В деяких випадках можна встановити одно-однозначну відповідність поміж поодинокими елементами двох множин, так щоб кожному елементові одної множини відповідав один, але тільки один елемент другої. Така відповідність існує н. пр. поміж множиною чисел природного ряду і множиною усіх паристих чисел

$$\begin{array}{cccccccc} \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & & \text{in inf.}\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \\ \{2, & 4, & 6, & 8, & 10, & & \text{in inf.}\} \end{array}$$

Такі дві множини називаємо рівноважними одна з одною.

---

*) Про значіння доказів існування див. Д-р В. Левицький: Докази існування інтеґралів ріжничкових рівнань. Збірник матем.-природн.-лік. Секції Н. Т. Ш. т. І. 1897 р.

Множину, рівноважну з множиною чисел природного ряду, звемо **п е р е л і ч и м о ю** (abzählbare Menge). Отож н. пр. множина паристих чисел перелічима.

Так само перелічима множина усіх дробів. Доказ переводиться при помочі т. зв. 1-го косинного процесу (erstes Diagonalverfahren). А саме виписується всі цілі числа й дроби (всі вимірні числа) в ось такому порядку

$$\begin{array}{cccc} 1, & 2, & 3, & 4, \\ \frac{1}{2}, & \frac{2}{2}, & \frac{3}{2}, & \frac{4}{2}, \\ \frac{1}{3}, & \frac{2}{3}, & \frac{3}{3}, & \frac{4}{3}, \\ \frac{1}{4}, & \frac{2}{4}, & \frac{3}{4}, & \frac{4}{4}, \end{array}$$

Кажемо, що таким способом „вичерпаємо“, тобто випишемо „всі“ вимірні числа, значить цілі числа і дроби. Тепер виймаємо їх по черзі ось так:

$$1,\ 2,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{2},\ 3,\ 4,\ \tfrac{3}{2},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{1}{4},$$

Зараз видно, що вони дадуться припорядкувати кожне по черзі одному і тільки одному з чисел природного ряду. (Можна б, як хто хоче, іще перекреслити числа, які повторюються):

$$\begin{array}{ccccccccc} 1, & 2, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & 3, & 4, & \frac{3}{2}, & \frac{2}{3}, & \frac{1}{4}, \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, \end{array}$$

З такого представлення видно рівноважність множин вимірних чисел з множиною чисел прир. ряду, значить перелічимість множини вимірних чисел.*)

Назва „Diagonalverfahren“ походить звідси, що за оцими числами слідкуємо по косинах.

Важний і інтересний приклад перелічимої множини маємо на множині альґебричних чисел. Її перелічимість доказуємо так, що доказуємо перелічимість усіх многочленів з цілочисловими сучинниками $a_n,\ a_{n-1},\ \ldots\ldots a_1,\ a_0$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

В тій ціли впроваджується поняття т. зв. „висоти“ многочлена

$$h = n + a_n + |a_{n-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0|;$$

це, як видно, сума абсолютних вартостей сучинників і ступня. Якщо за h прийматимемо по черзі числа 2, 3, 4, і т. д., то для означеного h маємо тільки закінчену кількість многочленів

---

*) E. K a m k e: Mengenlehre, Sammlung Göschen, ч. 999, 8-ма і сл. стор.

з висотою h. Так н. пр. для $h = 2$ маємо само x або рівняння $x = 0$, для $h = 3$ маємо многочлени x^2, $2x$, $x + 1$, $x - 1$, 3, або рівняння $x^2 = 0$, $2x = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 1 = 0$. Так можемо впорядкувати усі многочлени, чи відповідні рівнання, або, що на одно виходить, їх розвязки, отже альґебричні числа, і кожне з них припорядкувати одному з чисел природного ряду. Таким чином перелічимість множини альґебричних чисел буде доказана. (Kamke, op. cit.).

Що не всі множини перелічимі, що існують множини неперелічимі, а саме н. пр. множина чисел, що не є ані вимірні, ані альґебричні, доказує Cantor при помочі т. зв. 2-го косинного процесу (zweites Diagonalverfahren). Він бере під увагу всі альґебричні числа поміж 0 і 1. Кожне з них дасться виписати одним способом при помочі цифер як нескінчений (а хочби й скінчений) десятковий дріб, а їх „кількість“, множина є перелічима.

$$\begin{matrix} 0,\ a_{11}a_{12}a_{13} \\ 0,\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ 0,\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{matrix}$$

Виберім тепер цифри на косині, значить цифри 0, a_{11}, a_{22}, a_{33}, і т. д. і створім нове число 0, $b_1 b_3 b_3$, так щоб b_1 не було рівне a_{11}, дальше $b_2 \neq a_{22}$, $b_3 \neq a_{33}$ і т. д. Такого числа немає поміж вже виписаними (бо від кожного з них різниться бодай одною цифрою від якогонебудь іншого). З цього видно, що усі альґебричні числа ще не виповнюють цілого інтервалу поміж 0 і 1, отже що є, існують іще числа, які не є альґебричні.

В оцьому доказі не показується ефективно, як перевести конструкцію неальґебричного числа. Інакше поступає Liouville (Comptes rendus 1844 або Journal de Mathématiques vol. 16 з р. 1851). Він виводить одну характеристичну прикмету альґебричних чисел, та показує на прикладах, що є, існують числа, які не мають тої прикмети, отже не є альґебричними числами. Між іншим подає він ось таке число

$$\frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^{1.2}} + \frac{1}{10^{1.2.3}} + \frac{1}{10^{1.2.3.4}} + \cdot \quad \text{in inf.} = 0{,}11000100.$$

Подібним, хоч дещо відмінним способом доказує Hermite, що число $e = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1.2.3} +$ є перестy пне число, так само

Lindemann, що число $\pi = 3,14159\ldots$ це переступне число.*) Тут переводиться доказ, що немає такого альґебричного рівнання з цілочисловими сучинниками, якого коренем було б число e, чи π, а тим самим, що це переступні числа. Та годі тут переводити, а радше повторювати ці докази in extenso. Для не-математика вони за тяжкі і за довгі і ніякий популяризатор тут нічого не вдіє, а математик знає їх і без того. Те саме можна завважити, що торкається теорії Lindelöf-а, Fréchet-а, Лузіна та др. Математикові і так не скажу нічого нового, а не-математика тільки непотрібно задержу. (Це все виложено ясно і докладно в цитованому в списі літератури підручнику В. Серпінського).

VII. ОСНОВНІ ЗАКОНИ ЛЬОҐІКИ.

Їх згадую на оцьому місці тому, що саме інтуїціоністи заперечують важність 3-ої аксіоми льоґіки навіть в математичних розумуваннях. Підставовими законами льоґіки або „законами думання“ називаємо звичайно чотири аксіоми льоґіки, а саме:

1. Закон тотожности: Те, що є, є, або: $A = A$;
2. Закон суперечности: Жадна річ не може бути і не бути водночас, або: A не є non — A;
3. Закон виключеної середини (principium exclusii medii): кожна річ мусить або бути, або не бути, або інакше: A є або B, або не — B, третьої можливости немає (tertium non datur);
4. Закон достаточної причини: Нічо не діється без достаточної причини.

В льоґіці не приймається оцих законів думання так зовсім беззастережно. Друга і третя аксіома насуває зовсім поважні трудноші. Дехто не вважає третьої аксіоми самостійною аксіомою Sigwart**) є тої думки, що третя „аксіома“ виходить з другої і подвійного заперечення. Wundt***) підносить щодо неї поважні сумніви. Та за те в математиці приймається оці закони беззастережно, бодай математик-формаліст послуговується згаданими законами, як чимсь самозрозумілим.

VIII. СПРОБА ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕМАТИКІВ-ФОРМАЛІСТІВ.

На оцьому місці можна, думаю, подати характеристику математика-формаліста, а саме:

*) Див. Д-р Володимир Левицький: Про переступ чисел e і π, Збірник т. I. 1897. — **) Sigwart, Logik стор. 213. — ***) Wundt. Logik I. стор. 555.

Він є аксіоматиком в такому розумінні, як вище вияснено. Згідність ґеометрії з собою у нього залежна від згідности аритметики з собою.

В противенстві до математика-інтуїціоніста, чи як висловлюється H. Poincaré — прагматиста, він непохитно переконаний у можливості розвязання кожної математичної проблеми. Типовим висказом Гільберта, оцього формаліста par excellence, висказом, що його він ще до сьогодні не перестає повторювати трохи не на кожному конґресі, є слова: „Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus“.

В противенстві до інтуїціоніста послуговується формаліст залюбки згаданими трьома основними законами льоґіки. Він приймає їх як щось де як де, а в математиці самозрозумілого, без якихнебудь застережень.

В противенстві до інтуїціоніста займається формаліст залюбки описаними вже доказами існування та вважає їх чимсь високовартісним. Він приймає якесь поняття як існуюче, якщо в ньому тільки нема суперечностей. Натомість цілі числа „існують“ для нього щойно тоді, як вдасться доказати, що в їхніх законах немає суперечностей.

IX. ТЕОРІЯ МНОЖИН ТА ЇЇ ПАРАДОКСИ.

Одним з найбільш плідних умів поміж формалістами був Georg Cantor (1845–1918), творець згаданої вже теорії множин. Сьогодні маємо аксіоматику теорії множин, яку завдячуємо Zermelo. Кантор пробує іще дефініювати поняття множини і в цьому він нагадує трохи Евкліда. Він подає ось таку дефініцію: „Eine Menge ist eine Zusammenfassung wohlunterschiedener Objekte unseser Anschauung oder unseres Denkens — welche die Elemente der Menge genannt werden — zu einem Ganzen“. Аксіоматика Zermelo подає інакшу дефініцію, подібну до Гільбертових дефініцій. В Канторовій можна добачувати льоґічну похибку idem per idem. Не входячи в дальшу аналізу понять, зверну таки зараз увагу на недомагання оцієї теорії, які не мають аналоґії в жадній іншій ділянці математики. А саме вже з самого поняття множини виходять парадокси теорії множин, до яких ми в математиці не привикли. З тих парадоксів згадаю перш за все славнозвісний *парадокс Russell-a. Його* можна описати менш-більш ось так: Якась множина може містити в собі саму себе, *як елемент, або ні.* Так н. пр. множина усіх абстрактних понять є сама абстрактним поняттям і містить в собі саму себе як елемент. Знову н. пр. множина всіх чисел від 1 до 10 не містить в собі самої себе як елементу. Візьмім тепер під увагу якусь множину N, що не містить в собі самої себе як елементу і візьмім під увагу множину M усіх таких множин.

Чи M містить в собі саму себе як елемент, чи ні?

Отож з одного боку можна довести, що не містить, бо сказано, що це має бути множина тільки таких множин, що не містять себе в собі як елементу.

Та знову якщо вона не містить себе сама в собі, то таки є елементом множини M, отже таки містить себе сама в собі.

З чисто формального боку оця антиномія нагадує н. пр. процес софіста Протаґора з його учнем Еватльосом за заплату за перший виграний процес. Протаґор доказує, що Еватльос повинен йому заплатити, бо якщо програє, то на основі присуду, а якщо виграє, то на основі умови. Зновже ж тамтой з рівною силою арґументації доводить, що якщо виграє, то не заплатить на основі присуду, а якщо програє, то не заплатить на основі умови.

Або антиномію Епіменіда з Крети: „Усі Кретийці говорять неправду“.

Сьогодні можна навіть подати загальну рецепту, як творити такі парадокси, що з теорією множин, ані з математикою не мають нічого спільного. Russell подає н. пр. ось такий: Назвім якесь поняття присудимим (praedicable), якщо воно дасться прикласти до себе самого. Так н. пр. вираз „абстрактний“ є присудимий, бо поняття абстрактности є абстрактне, отже дасться до себе прикласти. Зновже ж н. пр. вислів „конкретний“ є абстрактний, не дається до себе прикласти, отже є неприсудимий. Роздивімся тепер, чи вислів „неприсудимий“ є присудимий, чи ні. Отже з одного боку він неприсудимий, бо не дасться прикласти до себе самого. Але ж знову з другого боку вже через те саме він сáме ось тут прикладається до себе самого, є він присудимий. Таким чином оце поняття суперечне в собі, так само як поняття множини всіх множин, що не містять себе самих в собі як елементу.

Теорія множин має ще й інші антиномії, так н. пр. антиномію Burali-Forti, Zermelo-König-a, Richarda, Berry та ін. Та суттєво вони поміж собою не різняться.

X. РІЗНІ СПРОБИ ЗВІЛЬНЕННЯ МАТЕМАТИКИ ВІД АНТИНОМІЙ.

Зрозуміло, що такі антиномії стають нестерпні в математиці, яка має бути зразком точности. Не диво, що були спроби усунути ці неточности. Одною з них була аксіоматизація теорії множин, що її довершив Zermelo. Його аксіоматика в багатьох детайлях нагадує Гільбертову аксіоматику ґеометрії. В оцій аксіоматиці обмежено поняття множини до таких множин, що не доводять до парадоксів. Та немає ніякої запоруки, що такі самі антиномії не виступлять десь на іншому місці. Інші спроби ратувати математику пішли в напрямі базування математики на льоґіці. Проти цього напрямку Frege і Russell-a були поважні застереження (див. н. пр. Bernays — гл. літературу). Ці спроби Frege і Russell-a також не давали запоруки, що оминуть раз на все парадоксів. Та їхня заслуга ця, що вони звернули увагу на це, чим, на ділі, є взагалі математична конклюзія.

XI. ІНТУЇЦІОНІСТИ, ГОЛОВНО BROUWER.

Та найбільш революційним показався в реформуванні математики напрямок, що веде свій початок від Kronecker-a, а репрезентований в останніх часах такими математиками як Poincaré, Borel, Brouwer, Weyl. Brouwer назвав свій напрямок інтуїціонізмом, Poincaré називає його приклонників праґматистами. Вони з цілою силою пари звертаються проти тих помічних понять, що їх математика запозичує від льоґіки, та доходять до цього, що відкидають цілу низку конклюзій, якими математика до тепер так пишалась. Щораз яркіще зарисовується різниця поміж новим інтуїціоністичним і формалістичним напрямком, що все ще не дає за виграну. Оця різниця показується вже в самих вихідних точках розважувань одних і других. Отож для інтуїціоністів є каноном, системою основних аксіом математики збір властивостей чисел природного ряду. Вони навязують до слів Кронекера: „Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk“. Тут видно також противенство до теорії згаданого вже Frege і Russell-a, що пробують подавати дефініцію цілих чисел. Та вже Гільберт закидує їм (Grundlagen VI-те вид. стор. 244.), що саме в цій дефініції вони попадають в небезпеку антиномій. Для інтуїціоніста немає ніякого змислу, шукати на оці основні закони цілих чисел якогонебудь доказу та розчленовувати їх так, як це робить формаліст. Тим самим всякі намагання, перевести для них т. зв.

„Widerspruchlosigkeitsbeweis", для інтуіціоніста зовсім безпредметові. Так само без доказу і дефініції приймає він іще деякі поняття з теорії множин.

В противенстві до математика-формаліста він не визнає чисто формальних доказів існування. Йому замало сказати, що якесь поняття існує, тому, що воно вільне від суперечностей. Він хоче, щоби йому це поняття показати, перевести його конструкцію. Він визнає тільки ефективні докази існування.

Інтуіціоніст не приймає беззастережно аксіоми „tertium non datur". Так н. пр. для формаліста якесь число є або альґебричне, або трансцедентне, — tertium non datur. Інтуіціоніст допускає ще третю можливість, що питання взагалі не дасться вирішити.

Так само приймає інтуіціоніст можливість, що є проблеми, що взагалі не дадуться розвязати.

Таке становище інтуіціоністів викликало доволі горячкову дискусію в 1900-их р.р. (Hilbert: Axiomatisches Denken, або Pasch: Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung 27. з р. 1918, 228—232.).

Ясно, що так далеко посунений критицизм мусів довести по просту до відкинення неодного гарного твердження математики. Між іншим для інтуіціоніста відпадає твердження, що кожна суцільна в якомусь обмеженому промежуткові функція має своє maximum, або що кожна суцільна монотонна функція дасться зріжничкувати в цілому промежуткові за виїмком скінченої множини точок. Інтеґрал Лебеґа (Lebesgue), тай взагалі багато тверджень теорії функцій дійсних змінних не існує. Вона ж опирається на осьтакі твердження: 1) Що точки суцілля (Punkte des Kontinuums) творять впорядковану множину, значить, що поміж якиминебудь двома точками має місце ось таке взаємовідношення $a \gtreqless b$. 2) Що кожна множина є або скінчена, або нескінчена. А інтуіціоніст відкидає саме оці закони.

Та інтуіціоніст вже найбільш безпощадний супроти теорії множин. Вона виходить сильно обкроєна та здеформована; особливо становище інтуіціоністів до питання суцілля дуже відмінне від становища формалістів (Brouwer: Intuitionistische Mengenlehre). Це вже виглядає на велике спустошення. Говориться про крізу основ математики. Прийшлося ратувати становище формалістів, та таки конче перевести згаданий вже доказ згідности аритметики зі собою. Таке завдання Гільберт поставив собі в своїх „гамбурських" працях. Останні роки принесли деяке злагіднення різниці становищ обидвох таборів. Останній з'їзд в Празі 1929 р.

показав, що можливо найти спільну мову. Інтуіціоністи визнають вже, що математика Гільберта таки вільна від суперечностей, з другого боку формалісти признають, що вихідні точки їхніх розважувань суттєво не різняться від Бравверових. Обидва напрямки погоджує льоґістика (математична льоґіка).

XII. ЗАКІНЧЕННЯ.

Чи полеміка поміж обидвома таборами колинебудь закінчиться, можна сумніватись. „Правдивими" можна визнати обидва напрямки в тому розумінні, що зі становища чистої льоґіки годі котрому з них щонебудь закинути. Сьогодні обидва напрямки заксіоматизовані, так що тільки інтуіційно можна приймати або одну або другу систему аксіом. Тут виразно виступило значіння аксіоматики взагалі. Гільберт каже н. пр.: „Alles, was Gegenstand des wissenschaftlichen Denkens überhaupt sein kann, verfällt, sobald es zur Bildung einer Theorie reif ist, der axiomatischen Methode und damit mittelbar der Mathematik. In dem Zeichen der axiomatischen Methode erscheint die Mathematik berufen zu einer führenden Rolle in der Wissenschaft überhaupt". Сьогодні вже ясно, що всяке думання залежне від аксіом і про „правду" приходиться говорити на стільки, на скільки правдиві аксіоми. І оця провідна роля математики лишилася її величнім завданням.

ЛІТЕРАТУРА.

H. Weyl.: Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik. — Mathematische Zeitschrift, Bd. 10, 1921, S. 39—79.

H. Weyl.: Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik. — Mathematische Zeitschrift, Bd. 20, 1924, S. 131—150.

D. Hilbert.: Mathematische Probleme. — Vortrag, gehalten auf dem internationalen mathematischen Kongresse zu Paris 1900. Abgedr. im Archiv für Mathem. und Physik, 3 Reihe, Bd. 1, 1901, S. 44—63 u. 213—237. — Пор. також Збірник мат.-прир.-лік. секції т. VII. вип. II. 1901. бібліогр. ст. 21.

D. Hilbert.: Axiomatisches Denken. — Züricher Vortrag 1917. Mathematische Annalen, Bd. 78, 1918, S. 404—415.

D. Hilbert.: Neubegründung der Mathematik. — Abhandlungen a. d. mathem. Seminar d. Hamburgischen Univ. Bd. 1, 1922, S. 157—177.

D. Hilbert.: Die logischen Grundlagen der Mathematik. — Mathem. Annalen, Bd. 88, 1922, S. 151—165.

A. Pringsheim.: Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik. Festrede 1904. München, K. B. Akademie der Wissenschaften, 44 S.

L. E. I. Brouwer.: Intuitionism and Formalism. — Bulletin of the American Mathematical Society, XX, 1913, S. 81—96

L. E. I. Brouwer.: Intuitionistische Mengenlehre. — Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 28, 1919, S. 203—208.

D. Hilbert.: Grundlagen der Geometrie. 6-te Aufl. — Wissenschaft und Hypothese, Berlin u. Leipzig, 1923.

H. Weyl.: Das Kontinuum. — Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis, 1932, 84 S.

F. Hausdorff.: Mengenlehre. 2-te Aufl., 285 S. 1927. — Göschens Lehrbücherei, Bd. 7.

W. Sierpiński.: Zarys teorji mnogości. 2 томи. Warszawa, MCMXXIII.

F. Klein.: Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Dritte Auflage, 1-ter Bd. Berlin, 1924.

B. Russell.: The principles of mathematics. — Cambridge 1903.

A. N. Whitehead and B. Russell.: Principia mathematica I—III. Cambridge, 1910—1913.

A. Fraenkel.: Einleitung in die Mengenlehre. 2-te Aufl. Berlin, 1923, 251 Seiten.

A. Fraenkel.: Die heutigen Gegensätze in der Grundlegung der Mathematik. — „Erkenntnis", Bd. 2/4.

Rudolf Carnap.: Bericht über Untersuchungen zur allgemeinen Axiomatik. — Diskussion über Grundfragen der Mathematik und Logik. — ibid.