Dr. JULIAN BOHAČEVŚKYJ (Stryj)

Transformation der Laplaces'chen Differentialgleichung im n-Dimensionalen auf generelle Koordinaten.

Es seien n zueinander ortogonale n-dimensionale Gebilde gegeben:

$$\begin{aligned} f_1(x_1 x_2 x_3 \ldots x_n) &= \varrho_1 \\ f_2(x_1 x_2 x_3 \ldots x_n) &= \varrho_2 \\ &\cdot \\ f_n(x_1 x_2 x_3 \ldots x_n) &= \varrho_n \end{aligned} \tag{1}$$

Nach Auflösung nach $x_1, x_2 \ldots x_n$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_n) \\ x_2 &= \varphi_2(\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_n) \\ &\cdot \\ x_n &= \varphi_n(\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_n) \end{aligned} \tag{2}$$

Die Ortogonalitätsbedingungen sind:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_1}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_2} + \ldots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_1}\frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_1}\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_2} = 0 \\ &\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_3} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_1}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_3} + \ldots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_1}\frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_3} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_1}\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_3} = 0 \\ &\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_{n-1}}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_n} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_{n-1}}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_n} + \ldots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_{n-1}}\frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_{n-1}}\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_n} = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

oder auch:

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial x_1}\frac{\partial \varrho_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial x_2}\frac{\partial \varrho_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial \varrho_1}{\partial x_n}\frac{\partial \varrho_2}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varrho_1}{\partial x_i}\frac{\partial \varrho_2}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial\varrho_1}{\partial x_1}\frac{\partial\varrho_3}{\partial x_1}+\frac{\partial\varrho_1}{\partial x_2}\frac{\partial\varrho_3}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial\varrho_1}{\partial x_n}\frac{\partial\varrho_3}{\partial x_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varrho_1}{\partial x_i}\frac{\partial\varrho_3}{\partial x_i}=0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial\varrho_{n-1}}{\partial x_1}\frac{\partial\varrho_n}{\partial x_1}+\frac{\partial\varrho_{n-1}}{\partial x_2}\frac{\partial\varrho_n}{\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial\varrho_{n-1}}{\partial x_n}\frac{\partial\varrho_n}{\partial x_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varrho_{n-1}}{\partial x_i}\frac{\partial\varrho_n}{\partial x_i}=0.$$

Es sei nun die Potentialgleichung gegeben:

$$\Delta_2 V=\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2 V}{\partial x_n^2}=0 \tag{5}$$

und diese Gleichung möge auf generalisierte n-dimensionale Koordinaten transformiert werden. Die neuen Koordinaten seien $\varrho_1\,\varrho_2\ldots\varrho_n$ und sie mögen mit den Koordinaten $x_1\,x_2\ldots x_n$ durch die Gleichungen (1) und (2) verknüpft sein. Wir haben nun infolge (2):

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}=\frac{\partial V}{\partial\varrho_1}\frac{\partial\varrho_1}{\partial x_i}+\frac{\partial V}{\partial\varrho_2}\frac{\partial\varrho_2}{\partial x_i}+\ldots+\frac{\partial V}{\partial\varrho_n}\frac{\partial\varrho_n}{\partial x_i}\quad(i=1,2,\ldots n) \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho_1^2}\left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial x_i}\right)^2+\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho_2^2}\left(\frac{\partial\varrho_2}{\partial x_i}\right)^2+\ldots+\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho_n}\left(\frac{\partial\varrho_n}{\partial x_i}\right)^2+$$

$$+2\sum_{\substack{k,l=1\\k<l}}^{n}\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho_k\partial\varrho_l}\frac{\partial\varrho_k}{\partial x_i}\frac{\partial\varrho_l}{\partial x_i}+\frac{\partial V}{\partial\varrho_1}\frac{\partial^2\varrho_1}{\partial x_i^2}+\frac{\partial V}{\partial\varrho_2}\frac{\partial^2\varrho_2}{\partial x_i^2}+\ldots+\frac{\partial V}{\partial\varrho_n}\frac{\partial\varrho_n}{\partial x_i^2} \tag{7}$$
$$(i=1,2,\ldots n)$$

Addieren wir die n Gleichungen (7) und berücksichtigen die Ortogonalitätsbedingungen (4), so erhalten wir:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2 V}{\partial x_n^2}=\Delta_2 V=$$
$$=\Delta_1(\varrho_1)\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho_1^2}+\Delta_1(\varrho_2)\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho_2^2}+\ldots+\Delta_1(\varrho_n)\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho_n^2}+\Delta_2(\varrho_1)\frac{\partial V}{\partial\varrho_1}+ \tag{8}$$
$$+\Delta_2(\varrho_2)\frac{\partial V}{\partial\varrho_2}+\ldots+\Delta_2(\varrho_n)\frac{\partial V}{\partial\varrho_n}$$

Dabei bedeuten $\Delta_1(\varrho_i)$ und $\Delta_2(\varrho_i)$ die verallgemeinerten Lamé-schen Differentialparameter:

$$\Delta_1(f)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \tag{9}$$

$$\Delta_2(f)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}. \tag{10}$$

Diese Differentialparameter berechnen wir wie folgt:

Durch Differentiation der Gleichungen (2) nach x_1 erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho_1}\frac{\partial\varrho_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho_2}\frac{\partial\varrho_2}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho_n}\frac{\partial\varrho_n}{\partial x_1}=1\\
&\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho_1}\frac{\partial\varrho_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho_2}\frac{\partial\varrho_2}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho_n}\frac{\partial\varrho_n}{\partial x_1}=0\\
&\qquad\cdots\\
&\frac{\partial\varphi_n}{\partial\varrho_1}\frac{\partial\varrho_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi_n}{\partial\varrho_2}\frac{\partial\varrho_2}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial\varphi_n}{\partial\varrho_n}\frac{\partial\varrho_n}{\partial x_1}=0
\end{aligned}\tag{11}$$

Multiplizieren wir nun die erhaltenen Gleichungen bzw. mit $\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho_1}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho_1}, \ldots \frac{\partial\varphi_n}{\partial\varrho_1}$ und addieren mit Berücksichtigung von (3), so ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial\varrho_1}\right)^2\right]\frac{\partial\varrho_1}{\partial x_1}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho_1} \text{ und analog}\\
&\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial\varrho_1}\right)^2\right]\frac{\partial\varrho_1}{\partial x_2}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho_1}\\
&\qquad\cdots\\
&\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial\varrho_1}\right)^2\right]\frac{\partial\varrho_1}{\partial x_n}=\frac{\partial\varphi_n}{\partial\varrho_1}.
\end{aligned}\tag{12}$$

Quadrieren wir und addieren diese Gleichungen, so ergibt sich

$$\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial\varrho_1}\right)^2\right]^2\Delta_1(\varrho_1)=$$
$$=\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial\varrho_1}\right)^2$$

und hieraus

$$\Delta_1(\varrho_1)=\frac{1}{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial\varrho_1}\right)^2}.$$

Analog

$$\begin{aligned}
&\Delta_1(\varrho_2)=\frac{1}{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho_2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial\varrho_2}\right)^2}\\
&\qquad\cdots\\
&\Delta_1(\varrho_n)=\frac{1}{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho_n}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho_n}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial\varrho_n}\right)^2}.
\end{aligned}\tag{13}$$

Führen wir noch die Bezeichnung ein:

$$\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varrho_i}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varrho_i}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial\varrho_i}\right)^2=H_i\,,$$

dann bekommen die Gleichungen (13) die Form:

$$\Delta_1(\varrho_1) = \frac{1}{H_1},\ \Delta_1(\varrho_2) = \frac{1}{H_2}, \ldots\ \Delta_1(\varrho_n) = \frac{1}{H_n} \tag{13a}$$

Die Parameter $\Delta_2(\varrho_i)$ berechnen wir nach Lamé wie folgt: mit Hilfe der Bezeichnungen (13a) erhält die Identität (8) die Form:

$$\Delta_2(V) = \frac{1}{H_1}\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho_1^2} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho_2^2} + \ldots + \frac{1}{H_n}\frac{\partial^2 V}{\partial \varrho_n^2} + \Delta_2(\varrho_1)\frac{\partial V}{\partial \varrho_1} + \tag{8a}$$

$$+ \Delta_2(\varrho_2)\frac{\partial V}{\partial \varrho_2} + \ldots + \Delta_2(\varrho_n)\frac{\partial V}{\partial \varrho_n}.$$

In dieser Identität setzen wir der Reihe nach: $V = \varphi_1,\ V = \varphi_2, \ldots\ V = \varphi_n$. Es ergibt sich

$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \varrho_1^2} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \varrho_2^2} + \ldots + \frac{1}{H_n}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \varrho_n^2} + \Delta_2(\varrho_1)\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_1} +$$

$$+ \Delta_2(\varrho_2)\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_2} + \ldots + \Delta_2(\varrho_n)\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_n} = 0$$

$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \varrho_1^2} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \varrho_2^2} + \ldots + \frac{1}{H_n}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \varrho_n^2} + \Delta_2(\varrho_1)\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_1} +$$

$$+ \Delta_2(\varrho_2)\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_2} + \ldots + \Delta_2(\varrho_n)\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_n} = 0 \tag{14}$$

$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial \varrho_1^2} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial \varrho_2^2} + \ldots + \frac{1}{H_n}\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial \varrho_n^2} + \Delta_2(\varrho_1)\frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_1} +$$

$$+ \Delta_2(\varrho_2)\frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_2} + \ldots + \Delta_2(\varrho_n)\frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_n} = 0.$$

Daraus können wir schon $\Delta_2(\varrho_i)$ berechnen. Multiplizieren wir nämlich (14) bzw. durch $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varrho_1}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varrho_1}, \ldots \frac{\partial \varphi_n}{\partial \varrho_1}$ und addieren, so ergibt sich mit Rücksicht auf (3)

$$\frac{1}{H_1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \varrho_1^2}\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_1} + \frac{1}{H_2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \varrho_2^2}\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_1} + \ldots + \tag{15}$$

$$+ \frac{1}{H_n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \varrho_3^2}\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_1} + \Delta_2(\varrho_1)\, H_1 = 0.$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_1}\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \varrho_1^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left[\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_1}\right)^2\right] \tag{16}$$

und
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_1} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \varrho_1^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial H_1}{\partial \varrho_1}. \tag{16a}$$

Differenzieren wir wieder die erste der Gleichungen (3) nach ϱ_2, so ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_1} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \varrho_2^2} = 0$$

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_1} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \varrho_2^2} = - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2} &= - \frac{1}{2} \frac{\partial H_2}{\partial \varrho_1} \\
\text{und analog} \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_1} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \varrho_3^2} &= - \frac{1}{2} \frac{\partial H_3}{\partial \varrho_1} \\
\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varrho_1} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \varrho_n^2} &= - \frac{1}{2} \frac{\partial H_n}{\partial \varrho_1}
\end{aligned}\right\} \tag{16b}$$

Hiemit ist:

$$\Delta_2(\varrho_1) = - \frac{1}{2H_1^2} \frac{\partial H_1}{\partial \varrho_1} + \frac{1}{2H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \varrho_1} + \\ + \frac{1}{2H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial \varrho_1} + \ldots + \frac{1}{2H_1 H_n} \frac{\partial H_n}{\partial \varrho_1} \tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned}
\text{oder} \qquad \Delta_2(\varrho_1) &= - \frac{1}{2H_1} \frac{\partial}{\partial \varrho_1} \left(lg \frac{H_1}{H_2 H_3 \ldots H_n} \right) \\
\text{Analog} \qquad \Delta_2(\varrho_2) &= - \frac{1}{2H_2} \frac{\partial}{\partial \varrho_2} \left(lg \frac{H_2}{H_1 H_3 \ldots H_n} \right) \\
\Delta_2(\varrho_n) &= - \frac{1}{2H_n} \frac{\partial}{\partial \varrho_n} \left(lg \frac{H_n}{H_1 H_2 \ldots H_{n-1}} \right)
\end{aligned}\right\}. \tag{18}$$

Um nun negative Vorzeichen durch positive zu ersetzen und den Nenner 2 fortzuheben, setzen wir noch

$$H_1 = \frac{1}{h_1^2},\ H_2 = \frac{1}{h_2^2}, \ldots H_n = \frac{1}{h_n^2};$$

dadurch erhalten die Gleichungen (18) die Form:

$$\begin{aligned}
\Delta_2(\varrho_1) &= h_1^{\,2}\frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left(lg\,\frac{h_1}{h_2 h_3\ldots h_n}\right)\\
\Delta_2(\varrho_2) &= h_2^{\,2}\frac{\partial}{\partial\varrho_2}\left(lg\,\frac{h_2}{h_1 h_3\ldots h_n}\right)\\
&\ \,\vdots\\
\Delta_2(\varrho_n) &= h_n^{\,2}\frac{\partial}{\partial\varrho_n}\left(lg\,\frac{h_n}{h_1 h_2\ldots h_{n-1}}\right)
\end{aligned}\tag{18a}$$

und die Gleichung (8) die Form:

$$\begin{aligned}
\Delta_2 V = {} & h_1^{\,2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho_1^{\,2}} + h_2^{\,2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho_2^{\,2}} + h_3^{\,2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho_3^{\,2}} + \ldots + h_n^{\,2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho_n^{\,2}} +\\
& + h_1^{\,2}\frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left(lg\,\frac{h_n}{h_2 h_3\ldots h_n}\right)\frac{\partial V}{\partial\varrho_1} + h_2^{\,2}\frac{\partial}{\partial\varrho_2}\left(lg\,\frac{h_2}{h_1 h_3\ldots h_n}\right)\frac{\partial V}{\partial\varrho_2} + \ldots +\\
& + h_n^{\,2}\frac{\partial}{\partial\varrho_n}\left(lg\,\frac{h_n}{h_1 h_2\ldots h_{n-1}}\right)\frac{\partial V}{\partial\varrho_n}
\end{aligned}\tag{8b}$$

oder kürzer

$$\begin{aligned}
\Delta_2 V = h_1 h_2\ldots h_n \Bigg[& \frac{h_1}{h_2 h_3\ldots h_n}\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho_1^{\,2}} + \frac{\partial V}{\partial\varrho_1}\frac{h_1}{h_2 h_3\ldots h_n}\frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left(lg\,\frac{h_1}{h_2 h_3\ldots h_n}\right) +\\
& + \frac{h_2}{h_1 h_3\ldots h_n}\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho_2^{\,2}} + \frac{\partial V}{\partial\varrho_2}\frac{h_2}{h_1 h_3\ldots h_n}\frac{\partial}{\partial\varrho_2}\left(lg\,\frac{h_2}{h_1 h_3\ldots h_n}\right) + \ldots +\\
& + \frac{h_n}{h_1 h_2\ldots h_{n-1}}\frac{\partial^2 V}{\partial\varrho_n^{\,2}} + \frac{\partial V}{\partial\varrho_n}\frac{h_n}{h_1 h_2\ldots h_{n-1}}\frac{\partial}{\partial\varrho_n}\left(lg\,\frac{h_n}{h_1 h_2\ldots h_{n-1}}\right)\Bigg].
\end{aligned}\tag{8c}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}
& \frac{h_1}{h_2 h_3\ldots h_n}\frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left(lg\,\frac{h_1}{h_2 h_3\ldots h_n}\right) =\\
& = \frac{h_2 h_3\ldots h_n\dfrac{\partial h_1}{\partial\varrho_1} - h_1 h_3\ldots h_n\dfrac{\partial h_2}{\partial\varrho_1} - \ldots - h_1 h_2\ldots h_{n-1}\dfrac{\partial h_n}{\partial\varrho_1}}{(h_2 h_3\ldots h_n)^2} =\\
& = \frac{h_2 h_3\ldots h_n\dfrac{\partial h_1}{\partial\varrho_1} - h_1\dfrac{\partial(h_2 h_3\ldots h_n)}{\partial\varrho_1}}{(h_2 h_3\ldots h_n)^2} = \frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left(\frac{h_1}{h_2 h_3\ldots h_n}\right)
\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}
\frac{h_2}{h_1 h_3\ldots h_n}\frac{\partial}{\partial\varrho_2}\left(lg\,\frac{h_2}{h_1 h_3\ldots h_n}\right) &= \frac{\partial}{\partial\varrho_2}\left(\frac{h_2}{h_1 h_3\ldots h_n}\right)\\
&\ \,\vdots\\
\frac{h_n}{h_1 h_2\ldots h_{n-1}}\frac{\partial}{\partial\varrho_n}\left(lg\,\frac{h_n}{h_1 h_2\ldots h_{n-1}}\right) &= \frac{\partial}{\partial\varrho_n}\left(\frac{h_n}{h_1 h_2\ldots h_{n-1}}\right)
\end{aligned}$$

Hiemit erhält die Gleichung (8) endlich die Form:

$$\Delta_2 V = h_1 h_2 \dots h_n \left[\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{h_1}{h_2 h_3 \dots h_n} \frac{\partial V}{\partial \varrho_1}\right) + \right. \tag{8d}$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{h_2}{h_1 h_3 \dots h_n} \frac{\partial V}{\partial \varrho_2}\right) + \dots + \frac{\partial}{\partial \varrho_n}\left(\frac{h_n}{h_1 h_2 \dots h_{n-1}} \frac{\partial V}{\partial \varrho_n}\right)\right]$$

Die Anwendung der letzterhaltenen Gleichung auf n-dimensionale Kugelkoordinaten und ihre Lösung bleibe einer besonderen Arbeit vorbehalten.