ЗЕНОН ХРАПЛИВИЙ (Львів)

Основні поняття електродинаміки а унітарна теорія поля.*)

За останні десятки літ доводилося не один раз піддавати ревізії найбільш фундаментальні поняття фізики; зокрема поняття макрофізики показалися непридатні в мікрофізиці. Чинником, що спроваджував переворот у традиційному описі природи, була головно квантова теорія. Але тут буде мова про ревізію основ електродинаміки, переведену без зужитковування квантових ідей, такби сказати клясичними засобами. Цю ревізію переводить унітарна теорія поля, що її почин дав в 1933. р. Борн [1]), а розбудували Борн з Інфельдом.[2]) [3]) [4]) Вона приходить на зміну давнійшим теоріям Мексвеля та Льоренца.

Електронова теорія Льоренца є дуалістична, тобто відрізнює два окремі та до деякої міри протиставні фізичні чинники, а саме наснагу (заряд) та поле. Наснага, розміщена в просторі з густотою ϱ, є джерелом поля; вона поділена на окремі цілості — електрони. Мимо успіхів теорії два основні питання вона мусіла залишити без відповіді: 1) яка є структура електрону, тобто в який спосіб в ньому розміщена наснага, 2) які сили протидіють взаємному відштовхуванні одноіменних наснаг в електроні, та споюють його в одну цілість.

Цих труднощів не булоб в унітарній теорії, яка знає тільки поле, без ніяких простірних наснаг, для якої електрони це тільки точки, особливості поля. Тоді, очевидно, нема клопотів зі структурою електрону — просто тому, що точка ніякої структури не має. Такі пунктові наснаги подибуємо вже в Мексвеля — щож, коли у нього власна енерґія електрону-точки виходить нескінченою. Отож нова теорія Борна-Інфельда є унітарна, а всеж-таки дає скінчену енерґію електрону.

---

*) Реферат, виголошений на VI. З'їзді українських природників та лікарів 17. травня 1937. р.

Щоби порівняти нову й давню теорію, вийдемо з їх диференціяльних рівнань:

Мексвель-Льоренц	Борн-Інфельд
(I) $rot\,\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi\varrho\mathbf{v}$	(I') $rot\,\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$
(II) $rot\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$	(II') $rot\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
(III) $\partial iv\,\mathbf{E} = 4\pi\varrho$	(III') $\partial iv\,\mathbf{D} = 0$
(IV) $\partial iv\,\mathbf{H} = 0$	(IV' $\partial iv\,\mathbf{B} = 0.$

($\mathbf{v}$ це вектор скорості руху наснаги).

Коли давня теорія описувала поле за допомогою двох векторів **E**, **H**, то нова теорія уживає до цього аж чотирьох векторів: двох електричних **E**, **D** та двох магнетних **H**, **B**. Але тільки два з них є незалежні; два інші звязані з ними додатковими (альґебричними) рівнаннями:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \mathbf{B} &= k\,\mathbf{H} \\ \mathbf{E} &= k\,\mathbf{D} \end{aligned} \qquad k = k\,(\mathbf{D}^2, \mathbf{H}^2)$$

або

$$(2) \qquad \begin{aligned} \mathbf{D} &= l\,\mathbf{E} \\ \mathbf{H} &= l\,\mathbf{B} \end{aligned} \qquad l = l\,(\mathbf{B}^2, \mathbf{E}^2)$$

Користуючися цими звязками, можна р. (I') — (IV') переписати так, щоби в них виступала одна тільки пара векторів **E**, **B**, абож тільки пара **D**, **H**. Одначе тоді диференціяльні рівнання перестають бути лінійними; ця характеристична для нової теорії обставина є причиною великих аналітичних труднощів.

Треба додати, що існує декілька відгалужень теорії (які в головному ведуть до ідентичних вислідів), тому що запропоновано різні форми сучинників k, l.[5] Дискусія над добором тзв. Ляґранжової та Гамільтонової функцій, з яких їх випроваджують, тривала досить довго, щойно остання робота Гофмана та Інфельда[13] здається її закінчує. Після цих авторів повинно бути

$$(3) \qquad k = \frac{1}{1 + \frac{\mathbf{D}^2 - \mathbf{H}^2}{b^2}} \qquad (b \text{ стала, тзв. абсолютне поле, ряду } 10^{15} \text{ од. } cgs)$$

Всеж таки до тепер доводилося оперувати реляціями (1), (2) у їх загальному виді, без спеціялізації сучинників k, l.

Електронові в спочинку відповідає статична центрально-симетрична розвязка диференціяльних рівнань поля. Ці рівнання в електростатичному випадку зводяться до

$$(4)\qquad \begin{aligned} div\ \mathbf{D} &= 0 \\ rot\, k\, \mathbf{D} &= 0, \end{aligned}$$

якщо поле описуватимемо вектором $\mathbf{D}$; а якщо послужимося другим електричним вектором $\mathbf{E}$, то

$$(5)\qquad \begin{aligned} div\, l\, \mathbf{E} &= 0 \\ rot\ \mathbf{E} &= 0. \end{aligned}$$

Оба ці способи опису поля, очевидно, рівновартні. Після першого дістанемо розвязку

$$(6)\qquad \mathbf{D}_r = \frac{e}{r^2},$$

а що $div\ \mathbf{D} = 0$, то простірно розміщених джерел немає, а електрон є точкою. Після другого способу

$$(7)\qquad \mathbf{E} = \frac{e}{r^2}\,\frac{1}{1+\dfrac{e^2}{b^2\, r^4}} = \frac{e}{r^2}\,\frac{1}{1+\dfrac{r_0^4}{r^4}} \qquad \left(b = \frac{e}{r_0^2}\right);$$

тут $div\ \mathbf{E} \neq 0$, отже джерело поля не є пунктом, воно розміщене в просторі з густотою

$$(8)\qquad \varrho = \frac{1}{4\pi}\, div\ \mathbf{E} = \frac{e r r_0^4}{\pi\,(r^4+r_0^4)}.$$

Ця густота „свобідної наснаги“ практично рівна нулі поза кулею, якої промінь r_0 є ряду 10^{-13} cm. Так отже теорія має начеб два аспекти — електрон можна вважати або за точку („унітаристичне становище“), або за кульку наснаги („квазідуалістичне становище“), залежно від того, котрий з векторів приймемо за основний. Довго нерозвязане питання, чи електрон є твором пунктовим чи простірним, находить неждану відповідь: він є одним і другим. Справа тут стоїть подібно як з фотонами та хвилями в оптиці.

Але навіть, коли станемо на „квазідуалістичному“ становищі, то й так ще між новою а давньою теорією остане ось яка основна різниця: у Льоренца наснага була первинним самостійним фізичним чинником, тоді, як у Борна-Інфельда первинна річ це тільки поле, а „свобідна наснага“ є допомічним поняттям. У Льоренца проблеми формуловано математично так: знаючи розміщення та стан руху наснаг, найти з р. (I) — (IV) витворене ними поле; а в новій теорії проблема звучить: добираючи відповідні початкові та крайні умови з рівнань (I') — (IV') (в яких ϱ не виступає), найти поле, а тоді вже можна вичислити розміщення ϱ у просторі. З цього така консеквенція. В давній теорії до р. (I) — (IV) як необхідне доповнення додавали Льоренцове рівнання руху

$$(\mathrm{V}) \qquad \sigma \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \varrho \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]\right) \qquad (\sigma = \text{густота маси}),$$

яке править рухом електричності під впливом зовнішнього поля Це було окреме заложення, оперте на експерименті. В новій теорії, якщо такий звязок між наснагою а полем існує, він не може бути окремою гіпотезою, а хиба тільки висновком, який можна випровадити з рівнань поля (I') — (IV'), при допомозі якихсь простих, самозрозумілих умов. Дійсно зробили це Фінберґ[6]) та Прайс[7]), оперуючи вектором **D**, меніж[8])[9]) вдалося зробити те саме з „квазідуалістичного“ становища, при чому треба було тільки приняти, що особливість поля **D** є завжди ідентична з центром маси (енерґії) поля („постулят однозначності“). Це заложення насувається само собою, а в статичному випадку воно автоматично сповнене.

Таким чином таке основне поняття електродинаміки, як наснага, підпало ревізії і набрало зовсім нового значення. Виявилося опісля, що подібна мусить бути доля потенціялу.

Електростатичним потенціялом називали в давній теорії функцію φ, якої відємний градієнт рівний електричному векторові поля:

$$-grad\ \varphi = \mathbf{E};$$

В полі пунктового чи кулькового електрону виходило

$$\varphi = \frac{e}{r} \text{ (Кульонів потенціял).}$$

Якщо в даній точці цього поля находиться інша наснага e', то взаємна потенціяльна енерґія обох наснаг

$$V = \frac{ee'}{r} = e'\varphi.$$

Іншими словами, потенціял можна теж здефініювати як потенціяльну енерґію, що припадає на одиницю наснаги; обі дефініції потенціялу були в давній теорії згідні. Дехто з дослідників[11])[12]) приймав мовчки, що так воно є теж в новій унітарній теорії. На ділі ж ця згідність обох дефініцій є начеб припадкова; нема її в новій електродинаміці, де давньому поняттю потенціялу відповідають дві окремі величини φ і Φ, здефініовані так:

$$(9) \qquad -grad\ \varphi = \mathbf{E}$$

$$(10) \qquad e'\,\Phi = V.$$

Першу з них обчислюємо способом в прінціпі простим. Користуючися нпр. розвязкою (7), матимемо

$$(11)\quad \varphi(a) = \int_a^\infty \mathbf{E}_r\,dr = \frac{e}{r_0}\left\{\frac{\sqrt{2}}{8}\log\frac{a^2 + ar_0\sqrt{2} + r_0^2}{a^2 - ar_0\sqrt{2} + r_0^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{2}\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} arc\,tg\left(\frac{a\sqrt{2}}{r_0} - 1\right) - \frac{\sqrt{2}}{4} arc\,tg\left(\frac{a\sqrt{2}}{r_0} + 1\right)\right\}.$$

Дещо більш складна справа з функцією Φ. Правильна дорога для найдення V (а з тим і Φ) булаб ось яка. Сконструувавши поле з двома особливостями (нпр. $+e$ та $-e$) требаб обчислити його цілу енерґію; колиб від неї відіймити власну енерґію обох наснаг зокрема — осталаб власне потенціяльна енерґія V. Так робили у Мексвелевій теорії. Одначе ця дорога в новій теорії не веде до цілі, бо 1) рівнання поля не допускають статичної розвязки з двома особливостями, 2) наслідком нелінійності диференціяльних рівнань рахунки стають надто трудними. Остається друга дорога, теж часом стосована у давній теорії. Беремо під увагу одну пунктову особливість $+e$, а другу поверхневу, кулисту, з цілковитою наснагою $-e$ розміщеною на кулі з промінем a; дальше поступаємо як передше. Цей спосіб є дозволений принайменше, коли відступ a обох частинок значно більший від критичного проміння r_0.

Дійсно, статичні рівнання (4) допускають м. ін. розвязку

$$(11)\qquad \mathbf{D}r = \begin{cases} \dfrac{e}{r^2} & (r < a) \\ 0 & (r > a) \end{cases}$$

Таке поле можна вважати за зложене з поля пунктової наснаги $+e$

$$(12)\qquad \mathbf{D}r^{(p)} = \frac{e}{r^2}$$

та поля наснаги $-e$, розложеної на кулі з промінем a

$$(13)\qquad \mathbf{D}r^{(e)} = \begin{cases} 0 & (r < a) \\ -\dfrac{e}{r^2} & (r > a). \end{cases}$$

Відійнявши від енерґії цілого поля енерґію піль $\mathbf{D}^{(p)}$ та $\mathbf{D}^{(e)}$, взятих окремо, дістаємо

$$(14)\quad V(a) = \frac{e^2}{r_0}\left\{\frac{a^3}{3r_0^3}\log\left(1 + \frac{r_0^4}{a^4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{6}\log\frac{a^2 + ar_0\sqrt{2} + r_0^2}{a^2 - ar_0\sqrt{2} + r_0^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{2}}{3} arc\,tg\left(\frac{a\sqrt{2}}{r_0} - 1\right) + \frac{\sqrt{2}}{3} arc\,tg\left(\frac{a\sqrt{2}}{r_0} + 1\right) - \frac{\sqrt{2}}{3}\pi\right\}.$$

Обі наші потенціяльні функції, річ ясна, для великих віддалень a переходять у давній Кульонів потенціял:

$$-e\varphi \sim \frac{-e^2}{r_0}\left\{\frac{r_0}{a} - \frac{1}{5}\frac{r_0^5}{a^5} + \dots\right\} \tag{15}$$

$$V \sim \frac{-e^2}{r_0}\left\{\frac{r_0}{a} - \frac{1}{10}\frac{r_0^5}{a^5} + \quad\right\}.$$

Наприкінці треба ще додати, що ціла справа виникнула при нагоді розглядання квестії, на скільки зміняться енерґетичні рівні атому водня, коли в квантовому рівнанні хвилі заступимо давній (Кульонів) потенціял новим (Борновим). Досліди піднято в надії, що у висліді зникне дрібна різниця, яка ще існує між вартостями експериментальними а теоретичними (ця різниця відноситься до відступів центрів складових у дублетах спектру). Геллер і Моц [11]), а опісля Майкснер [12]) за потенціяльну енерґію протону з електроном приймають, як ми бачили, неслушно, $-e\varphi$; я пробував зробити це саме, послуговуючися функцією V. Вислід не виправдав покладаних надій; поправка для енерґетичних рівнів виходить у всякому випадку надто мала.

Література.

1) M. Born, Proc. Roy. Soc. A, **143**, 410 (1933).
2) M. Born and L. Infeld, Proc. Roy. Soc. A, **144**, 425 (1934).
3) „ „ Proc. Roy, Soc. A., **147**, 522 (1934).
4) M. Born, Papers and Discussions of the Intern. Conference of Physics London 1934, vol. I.
5) L. Infeld, Proc. Camb. Phil. Soc. **32**, 127 (1936).
6) E. Feenberg, Phys. Rev. **47**, 148 (1935)
7) M. H. L. Pryce, Proc. Roy. Soc. A, **155**, 597 (1936)
8) Z. Chrapływyj, Acta Phys. Pol. **4**, 395 (1935)
9) Acta Phys. Pol. (друкується)
10) „ C. R. **202**, 396 (1936)
11) G. Heller and L. Motz, Phys. Rev. **46**, 502 (1934)
12) J. Meixner, Ann. Phys. **23**, 371 (1935)
13) B. Hoffmann and L. Infeld, Phys. Rev. **51**, 765 (1937)