Die Grundformeln zur Integration der Gleichungen mit partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung mit mehreren abhängigen und unabhängigen Variablen.

Dritter Teil[1]).

von **M. K. Kurenskyj (Kourensky).**

XIII. In folgenden 4 Abschnitten XIII-XVI wurden ausführliche Formeln der vom Verfasser verallgemeinerten Jacobi'schen Integrationsmethode von nichtlinearen Gleichungen mit partiellen Ableitungen 1. Ordnung mit 2 unbekannten Funktionen von 3 und 4 Argumenten, sowie auch mit 3 unbekannten Funktionen von 2 und 3 Argumenten vorgeführt; die Aufgabe reduziert sich zur Integration eines Systemes von linearen Gleichungen mit nur einer unbekannten Funktion. Das erlaubt uns ohne prinzipielle Schwierigkeiten entsprechende Formeln in Falle von 3 und mehr unbekannten Funktionen mit 4 oder mehr Argumenten zu bekommen und die Konstruktion dieser Formeln kennen zu lernen. Wir bemerken dazu, dass der schwierigste von den Anwendungen der Theorie zur Lösung der Aufgaben z. B. der Differentialgeometrie und dazu auch der am meisten komplizierte Fall, welcher in dieser Geometrie vorkommt, der Fall der Gleichungen 1. Ordnung von 3 unbekannten Funktionen

---

[1]) Vgl. die Arbeiten des Verfassers in den Sitzungsberichten der math.-naturw.-ärztl. Sektion, Heft XI, 1929 (die Druckfehler: Heft XII, 1930), wo der Verfasser den I. Theil der Arbeit „Die Grundformeln...", und den Sitzungsberichten..., Heft XVIII, 1933, wo derselbe den II. Teil behandelt. Im II. Teile wurde auch die entsprechende Literatur zu den beiden Teilen angeführt.

Im vorliegenden III. Teil wurden die Formeln, welche sich auf die Arbeiten der Verfassers in folgenden Zeitschriften und besonderen Ausgaben: Bulletin de l'Académie de Belgique, XIX, 5, 7, 1933; XX, 7, 11, 1934; XXI, 12, 1935; XXII, 2, 1936; 1937 (sous presse); Comptes Rendus (Doklady) de l'Acad. des Sc. de l'URSS, X, 6, 1936; XIV, 4, 1937; Communications de la Soc. Math. de Kharkow, t. VI, 1933; t. XII, 1934; Verhandlungen des Intern. Math. Kongress, Zürich, Bd. II, 1932; M. Kourensky-Équations différentielles, livre 2, Ch. IX, § 77; Ch. X, §§ 78-90 (en russe) beziehen, zusammengestellt In diesen Arbeiten finden sich auch einige geometrische Anwendungen; dieselben wurden in allen Teilen von „den Grundformeln..." fortgelassen.

Weitere Teile (IV-V) erscheinen demnächts in folgenden Bänden der Sammelschrift der Ševčenko-Gesellschaft.

mit 3 unabhängigen Variablen ist. Im vorletzten XVII Abschnitt wurde die Verallgemeimerung der Charpit-Lagrange'schen Integrationsmethode der nichtlinearen Gleichungen, und im letzten XVIII Abschnitt zwei neue Integrationsmethoden der linearen Gleichungen von n unbekannten Funktionen mit m unabhängigen Variablen dargestellt. Die ganze Theorie des dritten Teiles wurde auf 5 Beispielen erläutert.

Im Falle der Integration eines Systems von 3 unabhängigen Gleichungen mit 3 Funktionen z, z', z'' von 2 unabhängigen Variablen x, y,

$$F_i(x, y, z, z', z'', p, q, p', q', p'', q'') = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1}$$

führt das Adiungeren einer neuen Gleichung

$$\Phi(x, y, z, z', z'', p, q, p', q', p'', q'') = 0 \tag{2}$$

zu den Involutionsbedingungen der Nullgleichheit aller Determinanten 8 Ordnung der Matrix:

$$\left\| \begin{array}{cccccccccc}
\frac{d\Phi}{dx} & \frac{\partial\Phi}{\partial p} & \frac{\partial\Phi}{\partial p'} & \frac{\partial\Phi}{\partial p''} & \frac{\partial\Phi}{\partial q} & \frac{\partial\Phi}{\partial q'} & \frac{\partial\Phi}{\partial q''} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{dF_1}{dx} & \frac{\partial F_1}{\partial p} & \frac{\partial F_1}{\partial p'} & \frac{\partial F_1}{\partial p''} & \frac{\partial F_1}{\partial q} & \frac{\partial F_1}{\partial q'} & \frac{\partial F_1}{\partial q''} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{dF_2}{dx} & \frac{\partial F_2}{\partial p} & \frac{\partial F_2}{\partial p'} & \frac{\partial F_2}{\partial p''} & \frac{\partial F_2}{\partial q} & \frac{\partial F_2}{\partial q'} & \frac{\partial F_2}{\partial q''} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{dF_3}{dx} & \frac{\partial F_3}{\partial p} & \frac{\partial F_3}{\partial p'} & \frac{\partial F_3}{\partial p''} & \frac{\partial F_3}{\partial q} & \frac{\partial F_3}{\partial q'} & \frac{\partial F_3}{\partial q''} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{dF_1}{dy} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial F_1}{\partial p} & \frac{\partial F_1}{\partial p'} & \frac{\partial F_1}{\partial p''} & \frac{\partial F_1}{\partial q} & \frac{\partial F_1}{\partial q'} & \frac{\partial F_1}{\partial q''} \\
\frac{dF_2}{dy} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial F_2}{\partial p} & \frac{\partial F_2}{\partial p'} & \frac{\partial F_2}{\partial p''} & \frac{\partial F_2}{\partial q} & \frac{\partial F_2}{\partial q'} & \frac{\partial F_2}{\partial q''} \\
\frac{dF_3}{dy} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial p} & \frac{\partial F_3}{\partial p'} & \frac{\partial F_3}{\partial p''} & \frac{\partial F_3}{\partial q} & \frac{\partial F_3}{\partial q'} & \frac{\partial F_3}{\partial q''} \\
\frac{d\Phi}{dy} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial p} & \frac{\partial\Phi}{\partial p'} & \frac{\partial\Phi}{\partial p''} & \frac{\partial\Phi}{\partial q} & \frac{\partial\Phi}{\partial q'} & \frac{\partial\Phi}{\partial q''}
\end{array} \right\|$$

wobei:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad p' = \frac{\partial z'}{\partial x}, \quad p'' = \frac{\partial z''}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad q' = \frac{\partial z'}{\partial y}, \quad q'' = \frac{\partial z''}{\partial y}.$$

Wir nehmen an, dass die in der Matrix umgerandete Determinante 7. Ordnung von Null verschieden ist. Das gibt:

$$D\left(\frac{F_1, F_2, F_3}{p, p', p''}\right) \neq 0; \quad D\left(\frac{F_1, F_2, F_3, \Phi}{p, p', p'', q}\right) \neq 0,$$

und wir bekommen die Involutionsbedingungen eines Systemes der Gleichungen (1), (2) in der Gestalt von 3 nichtlinearen Gleichungen 1. Ordnung mit einer unbekannten Funktion Φ:

$$(p'p''qq'')(pp'p''q) + (pp''q'q)(pp'p''q') + (pp'qq')(pp'p''q'') = 0$$

$$(p'p''qq'')(pp'p''q) + (pp''q''q)(pp'p''q') + (pp'qq'')(pp'p''q'') = 0$$

$$(pp'p''q)\,[xpp'p''] + (pp'p''q)\,[yp'p''q] + \tag{3}$$

$$+ (pp'p''q')\,[ypqp''] + (pp'p''q'')\,[ypp'q] = 0,$$

wo runde Klammern die Jacobi'schen Determinanten von F_1, F_2, F_3, Φ im Bezug auf die Variablen, die in Klammern stehen, und gerade Klammern die Jacobi'schen Determinanten mit totalen Ableitungen im Bezug auf Variablen x, y bedeuten.

Das Bestimmen von partiellen Integralen $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2, \ldots$ des Systems der nichtlinearen Gleichungen (3) reduziert sich zur Bestimmung der partiellen Integrale der linearen Gleichungen 1. Ordnung mit einer unbekannten Funktion Φ mit folgenden Formeln.

Indem wir bezeichnen:

$$\frac{(pp'p''q')}{(pp'p''q)} = \lambda; \qquad \frac{(pp'p''q'')}{(pp'p''q)} = \mu$$

$$P = (pp'p''); \; P_1 = (qp'p''); \; P_2 = (q'p'p''); \; P_3 = (q''p'p''); \; P_4 = (pqp'')$$

$$P_5 = (pq'p''); \; P_6 = (pq''p''); \; P_7 = (pp'q); \; P_8 = (pp'q'); \; P_9 = (pp'q'')$$

$$Q = (qq'q''); \; Q_1 = (pq'q''); \; Q_2 = (p'q'q''); \; Q_3 = (p''q'q'') \; Q_4 = (qpq'')$$

$$Q_5 = (qp'q''); \; Q_6 = (qp''q''); \; Q_7 = (qq'p); \; Q_8 = (qq'p'); \; Q_9 = (qq'p''),$$

und folgende Identitäten

$$PQ_1 = \begin{vmatrix} P_5 & P_6 \\ P_8 & P_9 \end{vmatrix}; \quad PQ_2 = \begin{vmatrix} P_3 & P_9 \\ P_2 & P_8 \end{vmatrix}; \quad PQ_3 = \begin{vmatrix} P_2 & P_5 \\ P_3 & P_6 \end{vmatrix}$$

$$PQ_4 = \begin{vmatrix} P_6 & P_9 \\ P_4 & P_7 \end{vmatrix}; \quad PQ_5 = \begin{vmatrix} P_1 & P_3 \\ P_7 & P_9 \end{vmatrix}; \quad PQ_6 = \begin{vmatrix} P_3 & P_1 \\ P_6 & P_4 \end{vmatrix}$$

$$PQ_7 = \begin{vmatrix} P_4 & P_5 \\ P_7 & P_8 \end{vmatrix}; \quad PQ_8 = \begin{vmatrix} P_2 & P_1 \\ P_8 & P_7 \end{vmatrix}; \quad PQ_9 = \begin{vmatrix} P_1 & P_2 \\ P_4 & P_5 \end{vmatrix}$$

$$QP_1 = \begin{vmatrix} Q_5 & Q_6 \\ Q_8 & Q_9 \end{vmatrix}; \quad QP_2 = \begin{vmatrix} Q_3 & Q_9 \\ Q_2 & Q_8 \end{vmatrix}; \quad QP_3 = \begin{vmatrix} Q_2 & Q_5 \\ Q_3 & Q_6 \end{vmatrix},$$

in Betracht nehmen, bekommen wir eine kubische Gleichung zur Bestimmung der Funktion $\lambda\,(x, y, z, z', z'', p, p',\ldots)$:

$$\begin{vmatrix} P_4 & P_7 \\ Q_4 & Q_7 \end{vmatrix} \lambda^3 + \left(\begin{vmatrix} P_1 & P_7 \\ Q_1 & Q_7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} P_7 & P_5 \\ Q_7 & Q_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} P_8 & P_4 \\ Q_8 & Q_4 \end{vmatrix} \right) \lambda^2 + \tag{4}$$

$$+ \left(\begin{vmatrix} P_5 & P_8 \\ Q_5 & Q_8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} P_7 & P_2 \\ Q_7 & Q_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} P_8 & P_1 \\ Q_8 & Q_1 \end{vmatrix} \right) \lambda + \begin{vmatrix} P_2 & P_8 \\ Q_2 & Q_8 \end{vmatrix} = 0,$$

sowie auch eine lineare algebraische Gleichung zur Bestimmung der Funktion $\mu\,(x, y, z, z', z'', p, p',\ldots)$:

$$\mu = \frac{P\lambda^2 + (P_1 - P_5)\,\lambda - P_2}{P_8 - P_7\,\lambda}, \tag{5}$$

und das System der nichtlinearen Gleichungen (3) geht in ein System von 3 linearen Gleichungen

$$P\frac{\partial \Phi}{\partial q'} = (P_2 - \lambda_i P_1)\frac{\partial \Phi}{\partial p} + (P_5 - \lambda_i P_4)\frac{\partial \Phi}{\partial p'} + (P_8 - \lambda_i P_7)\frac{\partial \Phi}{\partial p''} + \lambda_i P\frac{\partial \Phi}{\partial q}$$

$$P\frac{\partial \Phi}{\partial q''} = (P_3 - \mu_i P_1)\frac{\partial \Phi}{\partial p} + (P_6 - \mu_i P_4)\frac{\partial \Phi}{\partial p'} + (P_9 - \mu_i P_7)\frac{\partial \Phi}{\partial p''} + \mu_i P\frac{\partial \Phi}{\partial q}$$

$$P\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}p + \frac{\partial \Phi}{\partial z'}p' + \frac{\partial \Phi}{\partial z''}p''\right) + (P_1 + \lambda_i P_4 + \mu_i P_7)\times \tag{6}$$

$$\times\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}q + \frac{\partial \Phi}{\partial z'}q' + \frac{\partial \Phi}{\partial z''}q''\right) = ([xp'p''] + \lambda_i[yqp''] + \mu_i[yp'q])\frac{\partial \Phi}{\partial p} +$$

$$+ ([xp''p] + [yp''q] + \mu_i[yqp])\frac{\partial \Phi}{\partial p'} + ([xpp'] + \lambda_i[ypq] + [ypq'])\frac{\partial \Phi}{\partial p''} +$$

$$+ ([yp'p''] + \lambda_i[yp''p] + \mu_i[ypp'])\frac{\partial \Phi}{\partial q}$$

über, wo λ_i eine Lösung der Gleichung (4) und μ_i ein entsprechender Wert der Funktion μ im Bezug auf λ_i auf Grund der Formel (5) bedeutet.

Wenn wir 2 Integrale $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2$, die in der Involution unter einander und mit der Gleichung $F_i = 0$ stehen, bestimmen, dann führt die Elimination der Variablen z'', p'', q'', zur Integration eines Gleichungsystems mit 2 unbekannten Funktionen z, z' von der Form

$$f_1\,(x, y, z, z', p, q, p', q') = 0; \qquad f_2\,(x, y, z, z', p, q, p'\,q') = 0,$$

auf Grund der Formeln in den Abschnitten III-IV des I. Teiles. Finden wir 3 ähnliche Integrale $\Phi_1=C_1$, $\Phi_2=C_2$, $\Phi_3=C_3$, dann bekommen wir unbekannte Funktionen z, z', z'' mittelst der Quadraturen von Gleichheiten:

$$dz=p\,dx+q\,dy; \quad dz'=p'\,dx+q'\,dy; \quad dz''=p''\,dx+q''\,dy.$$

XIV. Die Formeln werden bedeutend einfacher für diese speziellen Fälle der Systeme (1), wo die Gleichungen nur 5, 4, 3, 2 oder 1 von allen 6 Ableitungen p, q, p', q', p'', q'' enthalten.

Enthalten gegebene Gleichungen eine Ableitung

$$1)\ q''; \quad 2)\ p''; \quad 3)\ q'; \quad 4)\ p'; \quad 5)\ q; \quad 6)\ p,$$

nicht, dann haben lineare Gleichungen 1. Ordnung mit der unbekannten Funktion Φ und algebraische Gleichungen zur Bestimmung der Funktion λ die Gestalt:

$$1)\quad P\frac{\partial\Phi}{\partial q'}=(P_2-\lambda_1 P_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p}+(P_5-\lambda_1 P_4)\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+(P_8-\lambda_1 P_7)\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+\lambda_1 P\frac{\partial\Phi}{\partial q}$$

$$F\frac{d\Phi}{dy}+(P_1+\lambda_1 P_4)\frac{d\Phi}{dy}=([xp'p'']+\lambda_1[yqp''])\frac{\partial\Phi}{\partial p}+$$

$$+([xp''p]+[yp''q])\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+([xpp']+[yqp'']+\lambda_1[ypq])\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+$$

$$+([yp'p'']+\lambda_1[ypp''])\frac{\partial\Phi}{\partial q}$$

$$P_4\lambda^2+(P_1-P_5)\lambda-P_2=0;$$

$$2)\quad Q\frac{\partial\Phi}{\partial p'}=(Q_2-\lambda_1 P_1)\frac{\partial\Phi}{\partial q}+(Q_5-\lambda_1 Q_4)\frac{\partial\Phi}{\partial q'}+(Q_8-\lambda_1 Q_7)\frac{\partial\Phi}{\partial q''}+\lambda_1 Q\frac{\partial\Phi}{\partial p}$$

$$P\frac{d\Phi}{dx}+(Q_5-\lambda_1 Q_4)\frac{d\Phi}{dy}=([xp'q'']-\lambda_1[yq''q])\frac{\partial\Phi}{\partial p}+$$

$$+([xq''p]+[yq''q)]\frac{\partial\Phi}{\partial q'}+([xpp']+[yqp']+\lambda_1[ypq])\frac{\partial\Phi}{\partial q''}+$$

$$+([yp'q'']+[yq''p])\frac{\partial\Phi}{\partial q}$$

$$Q_4\lambda^2+(Q_1-Q_5)\lambda-Q_2=0;$$

$$3)\quad P\frac{\partial\Phi}{\partial q''}=(P_3-\lambda_1 P_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p}+(P_6-\lambda_1 P_4)\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+(P_9-\lambda_1 P_7)\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+\lambda_1 P\frac{\partial\Phi}{\partial q}$$

$$P\frac{d\Phi}{dx}+(P_1+\lambda_1 P_7)\frac{d\Phi}{dy}=([xp'p'']+\lambda_1[yp'q])\frac{\partial\Phi}{\partial p}+$$

$$+([xpp']+[yqp'])\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+([yp'p'']+\lambda_1[ypp'])\frac{\partial\Phi}{\partial q}+$$

$$+([xp''p]+[yp''q]+\lambda_1[yqp])\frac{\partial\Phi}{\partial p'},$$

$$P_7\lambda^2+(P_1-P_9)\lambda-P_3=0;$$

4) Buchstaben p und P wechseln mit q und Q unter einander und umgekehrt.

5) $$P\frac{\partial\Phi}{\partial q''}=(P_3-\lambda_1 P_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p}+(P_6-\lambda_1 P_5)\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+(P_9-\lambda_1 P_8)\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+\lambda_1 P\frac{\partial\Phi}{\partial q'}$$

$$P\frac{d\Phi}{dx}+(P_5+\lambda_1 P_8)\frac{d\Phi}{dy}=([xp'p'']+[yq'p'']+\lambda_1[yp'q'])\frac{\partial\Phi}{\partial p}+$$

$$+([xp''p]+[yq'p])\frac{\partial\Phi}{\partial p'}++([xpp']+[ypq'])\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+$$

$$+([yp''p]+\lambda_1[ypp'])\frac{\partial\Phi}{\partial q'}$$

$$P_8\lambda^2+(P_5-P_9)\lambda-P_6=0;$$

6) Buchstaben p und P wechseln mit q und Q unter einander und umgekehrt.

Im Falle von 1), 2),... 6) muss man partielle Integrale $\Phi_1=C_1$, $\Phi_2=C_2$,... die entsprechend die Variablen 1) q'', 2) p'',... 6) nicht enthalten, zu finden trachten.

Enthalten 3 Gleichungen keine 2 Ableitungen, dann bekommen wir 15 Fälle. Falls in den Gleichungen Ableitungen

1) p'', q''; 2) p', q'; 3) p, q

nicht vorkommen, dann führen sie zur Integration eines Systems von 2 Gleichungen 1. Ordnung mit zwei unbekannten Funktionen, falls wir entsprechend: 1) z''; 2) z'; 3) z eliminieren.

Andere 12 Fälle, d. h. wenn die Gleichungen die Ableitungen

4) q',q''; 5) p',q''; 6) q,q''; 7) p,q''; 8) q',p''; 9) p',p''
10) q,p''; 11) p,p''; 12) q,q'; 13) p,q'; 14) q,p'; 15) p,p',

nicht enthalten, führen zur Bestimmung von partiellen Integralen $\Phi_1=C_1$... welche entsprechende Abteilungen 4),... 15), nicht enthalten, irgend einer linearen Gleichung erster Ordnung (oder anders — Integralen eines Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen), von der Gestalt:

$$4)\ P\frac{\partial\Phi}{\partial q}=P_1\frac{\partial\Phi}{\partial p}+P_4\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+P_7\frac{\partial\Phi}{\partial p''}$$

$$5)\ Q_9\frac{\partial\Phi}{\partial p}+P_4\frac{\partial\Phi}{\partial q'}=Q_7\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+P_5\frac{\partial\Phi}{\partial q}$$

$$6)\ P\frac{\partial\Phi}{\partial q'}=P_2\frac{\partial\Phi}{\partial p}+P_5\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+P_8\frac{\partial\Phi}{\partial p''}$$

$$7)\ P_1\frac{\partial\Phi}{\partial q'}+Q_8\frac{\partial\Phi}{\partial p''}=P_2\frac{\partial\Phi}{\partial q}+Q_9\frac{\partial\Phi}{\partial p'}$$

$$8)\ P_7\frac{\partial\Phi}{\partial q''}+P_5\frac{\partial\Phi}{\partial p}=P_9\frac{\partial\Phi}{\partial q}+Q_5\frac{\partial\Phi}{\partial p'}$$

$$9)\ Q\frac{\partial\Phi}{\partial p}=Q_1\frac{\partial\Phi}{\partial q}+Q_4\frac{\partial\Phi}{\partial q'}+Q_7\frac{\partial\Phi}{\partial q''}$$

$$10)\ Q_2\frac{\partial\Phi}{\partial p}+P_9\frac{\partial\Phi}{\partial q'}=Q_1\frac{\partial\Phi}{\partial q''}+P_8\frac{\partial\Phi}{\partial q''}$$

$$11)\ Q\frac{\partial\Phi}{\partial p'}=Q_2\frac{\partial\Phi}{\partial q}+Q_5\frac{\partial\Phi}{\partial q'}+Q_8\frac{\partial\Phi}{\partial q''}$$

$$12)\ P\frac{\partial\Phi}{\partial q''}=P_3\frac{\partial\Phi}{\partial p}+P_6\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+P_9\frac{\partial\Phi}{\partial p''}$$

$$13)\ Q_6\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+P_1\frac{\partial\Phi}{\partial q''}=Q_5\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+P_3\frac{\partial\Phi}{\partial q}$$

$$14)\ Q_3\frac{\partial\Phi}{\partial p}+P_5\frac{\partial\Phi}{\partial q''}=Q_1\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+P_6\frac{\partial\Phi}{\partial q'}$$

$$15)\ Q\frac{\partial\Phi}{\partial p''}=Q_3\frac{\partial\Phi}{\partial q}+Q_6\frac{\partial\Phi}{\partial q'}+Q_9\frac{\partial\Phi}{\partial q''},$$

oder einer linearen Gleichung entsprechend folgender Gestalt:

$$4)\ P\frac{d\Phi}{dx}+P_1\frac{d\Phi}{dy}+[xp''p']\frac{\partial\Phi}{\partial p}+([xpp'']+[yqp''])\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+$$
$$+[yp''p']\frac{\partial\Phi}{\partial q}+[(xp'p]+[yp'q])\frac{\partial\Phi}{\partial p''}=0$$

$$5)\ P_5\frac{d\Phi}{dx}+Q_9\frac{d\Phi}{dy}+[xp''q']\frac{\partial\Phi}{\partial p}+([xpp'']+[yqp''])\frac{\partial\Phi}{\partial q'}+$$
$$+[yp''q']\frac{\partial\Phi}{\partial q}+([xq'p]+[yq'q])\frac{\partial\Phi}{\partial p''}=0$$

$$6)\ P\frac{d\Phi}{dx} + P_5\frac{d\Phi}{dy} + [xpp'']\frac{\partial\Phi}{\partial p'} + ([xp''p'] + [yq'p''])\frac{\partial\Phi}{\partial p} +$$

$$+ [yp''q]\frac{\partial\Phi}{\partial q'} + ([xp'p] + [ypq'])\frac{\partial\Phi}{\partial p''} = 0$$

$$7)\ P_1\frac{d\Phi}{dy} + Q_9\frac{d\Phi}{dy} + [xqp'']\frac{\partial\Phi}{\partial p'} + ([xp'q] + [yq'q])\frac{\partial\Phi}{\partial p''} +$$

$$+ [yqp'']\frac{\partial\Phi}{\partial q'} + ([xp''p'] + [yp''q'])\frac{\partial\Phi}{\partial q} = 0$$

$$8)\ P_9\frac{d\Phi}{dx} + Q_5\frac{d\Phi}{dy} + [xq''p']\frac{\partial\Phi}{\partial p} + ([xpq''] + [yqq''])\frac{\partial\Phi}{\partial p'} +$$

$$+ [yq''p']\frac{\partial\Phi}{\partial q} + ([xp'p] + [yp'q])\frac{\partial\Phi}{\partial q''} = 0$$

$$9)\ Q_1\frac{d\Phi}{dx} + Q\frac{d\Phi}{dy} + [xq''q']\frac{\partial\Phi}{\partial p} + ([xpq''] + [yqq'']\frac{\partial\Phi}{\partial q'} +$$

$$+ [yq''q']\frac{\partial\Phi}{\partial q} + ([xq'p] + [yq'q])\frac{\partial\Phi}{\partial q''} = 0$$

$$10)\ P_9\frac{d\Phi}{dx} + Q_1\frac{d\Phi}{dy} + [xpq'']\frac{\partial\Phi}{\partial p'} + ([xq''p'] + [yq''q'])\frac{\partial\Phi}{\partial p} +$$

$$+ [ypq'']\frac{\partial\Phi}{\partial q'} + ([xp'p] + [yq'q])\frac{\partial\Phi}{\partial q''} = 0$$

$$11)\ Q_5\frac{d\Phi}{dx} + Q\frac{d\Phi}{dy} + [xqq'']\frac{\partial\Phi}{\partial p'} + ([xq''p'] + [yq''q'])\frac{\partial\Phi}{\partial q} +$$

$$+ [yqq'']\frac{\partial\Phi}{\partial q'} + ([xp'q] + [yq'q])\frac{\partial\Phi}{\partial q''} = 0$$

$$12)\ P\frac{d\Phi}{dx} + P_9\frac{d\Phi}{dy} + [xpp']\frac{\partial\Phi}{\partial p''} + ([xp''p'] + [yq''p'])\frac{\partial\Phi}{\partial p} +$$

$$+ [yp'p]\frac{\partial\Phi}{\partial q''} + ([xpp''] + [ypq''])\frac{\partial\Phi}{\partial p'} + 0$$

$$13)\ P_1\frac{d\Phi}{dx} + Q_5\frac{d\Phi}{dy} + [xp'q]\frac{\partial\Phi}{\partial p''} + ([xqp''] + [yqq''])\frac{\partial\Phi}{\partial q'} +$$

$$+ [yp'q]\frac{\partial\Phi}{\partial q''} + ([xp''p'] + [yq''p'])\frac{\partial\Phi}{\partial q} = 0$$

$$14)\ P_5\frac{d\Phi}{dx}+Q_1\frac{d\Phi}{dy}+[xq'p]\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+([xp''q']+[yq''q'])\frac{\partial\Phi}{\partial p}+$$

$$+[yq'p]\frac{\partial\Phi}{\partial q''}+([xpp'']+[ypq''])\frac{\partial\Phi}{\partial q''}=0$$

$$15)\ Q_9\frac{d\Phi}{dx}+Q\frac{d\Phi}{dy}+[xq'q]\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+([xp''q']+[yq''q'])\frac{\partial\Phi}{\partial q}+$$

$$+[yq'q]\frac{\partial\Phi}{\partial q''}+([xqp'']+[yqq''])\frac{\partial\Phi}{\partial q'}=0.$$

Enthält das System 3 Ableitungen, dann gelangen wir in 12 Fällen zur Elimination der Funktion z, oder z', oder z'' und zur Integrationen eines Systems von zwei Gleichungen mit zwei unbekannten Funktionen. Die übrigen 8 Fälle sind diejenigen, wo das System folgende Ableitungen:

1) $q,\ q',\ q''$; 2) $p,\ q',\ q''$; 3) $q,\ p',\ q''$; 4) $p,\ p',\ q''$
5) $q,\ q',\ p''$; 6) $p,\ q',\ q''$; 7) $q,\ p',\ p''$; 8) $p,\ p',\ p''$

nicht enthält.

Im Falle 1) muss man partielle Integrale, die q, aber nicht q', q'' enthalten, von der folgenden linearen Gleichung:

$$1)\ P\frac{d\Phi}{dx}+[xp''p']\frac{\partial\Phi}{\partial p}+[xpp'']\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+[xp'p]\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+[yp''p']\frac{\partial\Phi}{\partial q}=0,$$

oder Integrale, die q', aber q, q'', nicht enthalten, von der linearen Gleichung

$$P\frac{d\Phi}{dx}+[xp''p']\frac{\partial\Phi}{\partial p}+[xpp'']\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+[xp'p]\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+[ypp'']\frac{\partial\Phi}{\partial q'}=0,$$

oder endlich Integrale mit q'', aber ohne q, q' von der Gleichung

$$P\frac{d\Phi}{dx}+[xp''p']\frac{\partial\Phi}{\partial p}+[xpp'']\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+[xp'p]\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+[yp'p]\frac{\partial\Phi}{\partial q''}=0$$

bestimmen.

Für andere 7 Fälle haben die Gleichungen folgende Form:

$$2)\ P_1\frac{d\Phi}{dy}+[xp''p']\frac{\partial\Phi}{\partial p}+[yqp']\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+[yp'q]\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+[yp''p']\frac{\partial\Phi}{\partial q}=0$$

$$P_1\frac{d\Phi}{dx}+[yqp'']\frac{\partial\Phi}{\partial q'}+[xqp'']\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+[xp'q]\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+[xp''p]\frac{\partial\Phi}{\partial q}=0$$

$$P_1\frac{d\Phi}{dx}+[yp'q]\frac{\partial\Phi}{\partial q''}+[xqp'']\frac{\partial\Phi}{\partial p'}+[xp'q]\frac{\partial\Phi}{\partial p''}+[xp''p']\frac{\partial\Phi}{\partial q}=0$$

3) $$P_5 \frac{d\Phi}{dx} + [yq'p] \frac{\partial \Phi}{\partial q''} + [xq'p] \frac{\partial \Phi}{\partial p''} + [xp''q'] \frac{\partial \Phi}{\partial p} + [xpq''] \frac{\partial \Phi}{\partial q'} = 0$$

$$P_5 \frac{d\Phi}{dx} + [yp''q'] \frac{\partial \Phi}{\partial q} + [xp''q'] \frac{\partial \Phi}{\partial p} + [xq'p] \frac{\partial \Phi}{\partial p''} + [xpp''] \frac{\partial \Phi}{\partial q'} = 0$$

$$P_5 \frac{d\Phi}{dy} + [xpp''] \frac{\partial \Phi}{\partial p'} + [yp''q'] \frac{\partial \Phi}{\partial p} + [yq'p] \frac{\partial \Phi}{\partial p''} + [ypp''] \frac{\partial \Phi}{\partial q'} = 0$$

4) $$P_9 \frac{d\Phi}{dx} + [yq'q] \frac{\partial \Phi}{\partial q''} + [xq'q] \frac{\partial \Phi}{\partial p''} + [xp''q'] \frac{\partial \Phi}{\partial q} + [xqp''] \frac{\partial \Phi}{\partial q'} = 0$$

$$P_9 \frac{d\Phi}{dy} + [xp''q'] \frac{\partial \Phi}{\partial p} + [yq'q] \frac{\partial \Phi}{\partial p''} + [yp''q'] \frac{\partial \Phi}{\partial q} + [yqp''] \frac{\partial \Phi}{\partial q'} = 0$$

$$P_9 \frac{d\Phi}{dy} + [xqp''] \frac{\partial \Phi}{\partial p'} + [yq'q] \frac{\partial \Phi}{\partial p''} + [yp''q'] \frac{\partial \Phi}{\partial q} + [yqp''] \frac{\partial \Phi}{\partial q'} = 0$$

5) $$P_9 \frac{d\Phi}{dy} + [xp'p] \frac{\partial \Phi}{\partial p''} + [yq''p'] \frac{\partial \Phi}{\partial p} + [ypq''] \frac{\partial \Phi}{\partial p'} + [yp'p] \frac{\partial \Phi}{\partial q''} = 0$$

$$P_9 \frac{d\Phi}{dx} + [yq''p'] \frac{\partial \Phi}{\partial q} + [xq''p'] \frac{\partial \Phi}{\partial p} + [xpq''] \frac{\partial \Phi}{\partial p'} + [xp'p] \frac{\partial \Phi}{\partial q''} = 0$$

$$P_9 \frac{d\Phi}{dx} + [ypq''] \frac{\partial \Phi}{\partial q'} + [xq''p'] \frac{\partial \Phi}{\partial p} + [xpq''] \frac{\partial \Phi}{\partial p'} + [xp'p] \frac{\partial \Phi}{\partial q''} = 0$$

6) $$Q_5 \frac{d\Phi}{dx} + [yqq''] \frac{\partial \Phi}{\partial q'} + [xqq''] \frac{\partial \Phi}{\partial p'} + [xq''p'] \frac{\partial \Phi}{\partial q} + [xp'q] \frac{\partial \Phi}{\partial q''} = 0$$

$$Q_5 \frac{d\Phi}{dy} + [xq''p'] \frac{\partial \Phi}{\partial p} + [yqp''] \frac{\partial \Phi}{\partial p'} + [yq''p'] \frac{\partial \Phi}{\partial q'} + [yp'q] \frac{\partial \Phi}{\partial q''} = 0$$

$$Q_5 \frac{d\Phi}{dy} + [xp'q] \frac{\partial \Phi}{\partial p''} + [yqp''] \frac{\partial \Phi}{\partial p'} + [yq''p'] \frac{\partial \Phi}{\partial q} + [yp'q] \frac{\partial \Phi}{\partial q''} = 0$$

7) $$Q_1 \frac{d\Phi}{dx} + [yq''q'] \frac{\partial \Phi}{\partial q} + [xpq''] \frac{\partial \Phi}{\partial q'} + [xq'p] \frac{\partial \Phi}{\partial q''} + [xq''q'] \frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0$$

$$Q_1 \frac{d\Phi}{dy} + [xpq''] \frac{\partial \Phi}{\partial p'} + [ypq''] \frac{\partial \Phi}{\partial q'} + [yq'p] \frac{\partial \Phi}{\partial q''} + [yq''q'] \frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0$$

$$Q_1 \frac{d\Phi}{dy} + [xq'p] \frac{\partial \Phi}{\partial p''} + [ypq''] \frac{\partial \Phi}{\partial q'} + [yqp] \frac{\partial \Phi}{\partial q''} + [yq''q'] \frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0$$

$$8)\quad Q\frac{d\Phi}{dy} + [yq''q']\frac{\partial\Phi}{\partial q} + [yqq'']\frac{\partial\Phi}{\partial q'} + [yq'q]\frac{\partial\Phi}{\partial q''} + [xq''q']\frac{\partial\Phi}{\partial p} = 0$$

$$Q\frac{d\Phi}{dy} + [yq''q']\frac{\partial\Phi}{\partial q} + [yqq'']\frac{\partial\Phi}{\partial q'} + [yq'q]\frac{\partial\Phi}{\partial q''} + [xqq'']\frac{\partial\Phi}{\partial p'} = 0$$

$$Q\frac{d\Phi}{dy} + [yq''q']\frac{\partial\Phi}{\partial q} + [yqq'']\frac{\partial\Phi}{\partial q'} + [yq'q]\frac{\partial\Phi}{\partial q''} + [xq'q]\frac{\partial\Phi}{\partial p''} = 0.$$

Enthält das gegebene System von Gleichungen 2 oder 1 Ableitung, dann führt die Elimination der Ableitungen zu 1 oder 2 Relationen zwischen x, y, z, z', z'', und das führt zu der Aufgabe der Integration von linearen Gleichungen mit einer kleineren Zahl der unbekanten Funktionen.

XV. Für ein System von Gleichungen mit 2 unbekannten Funktionen z, z' mit 3 Argumenten x_1, x_2, x_3,

$$F_i\,(x_1, x_2, x_3, z, z', p_1, p_2, p_3, p'_1, p'_2, p'_3) = 0, \quad (i = 1, 2)$$

wo

$$p_\kappa = \frac{\partial z}{\partial x_\kappa}, \quad p'_\kappa = \frac{\partial z'}{\partial x_\kappa}, \qquad (k = 1, 2, 3)$$

hat die entsprechende Matrix folgende Gestalt:

$$\left\| \begin{array}{ccccccccccccc}
\frac{d\Phi}{dx_1} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_1} & \frac{\partial\Phi}{\partial p'_1} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_2} & \frac{\partial\Phi}{\partial p'_2} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_3} & \frac{\partial\Phi}{\partial p'_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
{}_1X_1 & {}_1P_1 & {}_1P'_1 & {}_1P_2 & {}_1P'_2 & {}_1P_3 & {}_1P'_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
{}_2X_1 & {}_2P_1 & {}_2P'_1 & {}_2P_2 & {}_2P'_2 & {}_2P_3 & {}_2P'_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
{}_1X_2 & 0 & 0 & {}_1P_1 & {}_1P'_1 & 0 & 0 & {}_1P_2 & {}_1P_3 & {}_1P'_2 & {}_1P'_3 & 0 & 0 \\
{}_2X_2 & 0 & 0 & {}_2P_1 & {}_2P'_1 & 0 & 0 & {}_2P_2 & {}_2P_3 & {}_2P'_2 & {}_2P'_3 & 0 & 0 \\
\frac{d\Phi}{dx_2} & 0 & 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial p_1} & \frac{\partial\Phi}{\partial p'_1} & 0 & 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial p_2} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_3} & \frac{\partial\Phi}{\partial p'_2} & \frac{\partial\Phi}{\partial p'_3} & 0 & 0 \\
{}_1X_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}_1P_1 & {}_1P'_1 & 0 & {}_1P_2 & 0 & {}_1P'_2 & {}_1P_3 & {}_1P'_3 \\
{}_2X_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}_2P_1 & {}_2P'_1 & 0 & {}_2P_2 & 0 & {}_2P'_2 & {}_2P_3 & {}_2P'_3 \\
\frac{d\Phi}{dx_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial p_1} & \frac{\partial\Phi}{\partial p'_1} & 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial p_2} & 0 & \frac{\partial\Phi}{\partial p'_2} & \frac{\partial\Phi}{\partial p_3} & \frac{\partial\Phi}{\partial p'_3}
\end{array} \right\| , \qquad (7)$$

wobei

$${}_iX_\kappa = \frac{\partial F_i}{\partial x_\kappa} + \frac{\partial F_i}{\partial z}\,p_\kappa + \frac{\partial F_i}{\partial z'}\,p'_\kappa$$

$${}_iP_\kappa = \frac{\partial F_i}{\partial p_\kappa}; \qquad {}_iP'_\kappa = \frac{\partial F_i}{\partial p'_\kappa}.$$

Für die in der Matrix umrandete von Null verschiedene Determinante 8. Ordnung schreiben wir die Ungleichheiten:

$$1)\ D\left(\frac{F_1, F_2}{p_1, p'_1}\right) \neq 0\,;\quad 2)\ D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_1, p'_2, p_2}\right) \neq 0$$

und indem wir die Bezeichnungen:

$A = (p_1 p'_1 p_2)$; $B = (p_1 p'_1 p'_2)$; $C = (p_1 p_2 p'_2)$; $D = (p'_1 p_2 p'_2)$;
$E = (p_1 p'_1 p'_3)$; $F = (p_3 p_1 p'_1)$; $G = (p_2 p'_1 p_3)$; $H = (p'_3 p'_1 p_2)$;
$I = (p_1 p_2 p_3)$; $J = (p_1 p'_3 p_2)$; $K = [p_1 p'_1 x_1]$; $L = [p_2 p'_1 x_2]$;
$M = [p_1 p_2 x_2]$; $N = [p_2 p'_1 x_3]$; $P = [p_1 p_2 x_3]$; $Q = [p_1 p'_1 {}^3x]$;

wobei gerade Klammern die Jacobischen Determinanten mit totalen Ableitungen bezüglich x_1, x_2, x_3 einführen, bedeuten, bekommen wir 5 Involutionsbedingungen des gegebenen Systems in der Gestalt:

$$AD = BC;\ IAE = BFI;\ A(EG + FH) + (BI + AJ)E = 0$$
$$A(DF + HA) + B(IB + AJ + AG) = CFA$$
$$A(AK + AL + BM + FN + EP) = (AG + BJ)Q.$$

Der zweiten Gleichung wird in folgenden Fällen:

1) entweder $AE = BF$; 2) oder $I = 0$; 3) oder $I = 0$; $AE = BF$

genüge geleistet.

Untersuchen wir genau den ersten Fall. Andere Fälle führen zu einer grösseren Zahl der linearen Hilfsgleichungen 1. Ordnung, damit man partielle Integrale $\Phi_1 = C_1, \ldots$, die in der Involution zu den gegebenen Gleichungen $F_i = 0$ stehen, finden könnte.

Indem wir in Betracht nehmen, dass

$$A \neq 0, \text{ wenn } I \neq 0, \text{ oder } I = 0,$$

wobei:

$$\frac{B}{A} = \frac{D}{C} = \frac{E}{F} = \lambda$$

$$\frac{F}{A} = \mu;\quad \frac{G + \lambda I}{A} = -\nu.$$

und indem wir die Identität

$$(p_1 p'_1)(p_3 p_2) + (p_1 p_3)(p_2 p'_1) + (p_1 p_2)(p'_1 p_3) \equiv 0$$

erwägen, denn gelangen wir zur Integration eines Systems von 5 linearen Gleichungen 1. Ordnung:

$$(p_2 p'_2)\lambda_i \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} + [(p'_1 p'_2) + (p'_2 p_1)\lambda_i] \frac{\partial \Phi}{\partial p_2} = (p_2 p'_2) \frac{\partial \Phi}{\partial p'_1} + \\ + [(p'_1 p_2) + (p_2 p_1)\lambda_i] \frac{\partial \Phi}{\partial p'_2}$$

$$(p_1 p'_1)\lambda_i \frac{\partial \Phi}{\partial p_3} + [(p'_3 p_1') + (p'_1 p_3)\lambda_i] \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} = (p_1 p'_1) \frac{\partial \Phi}{\partial p'_3} + \\ + [(p'_3 p_1) + (p_1 p_3)\lambda_i] \frac{\partial \Phi}{\partial p'_1}$$

$$[(p'_3 p_2) + (p_2 p_3)\lambda_i]\lambda_i \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} + \Big\{ (p'_3 p'_1) - [(p_3 p'_1) + (p'_3 p_1)]\lambda_i + \\ + (p_3 p_1)\lambda_i^2 \Big\} \frac{\partial \Phi}{\partial p_2} + [(p_2 p'_1) + (p_1 p_2)\lambda_i]\lambda_i \frac{\partial \Phi}{\partial p_3} = \tag{9} \\ = [(p'_3 p_2) + (p_2 p_3)\lambda_i] \frac{\partial \Phi}{\partial p'_1} + [(p_2 p'_1) + (p_1 p_2)\lambda_i] \frac{\partial \Phi}{\partial p'_3}$$

$$[(p'_1 p_3) + (p_2 p'_1)\mu_i] \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} + [(p_3 p_1) + (p_1 p_2)\mu_i] \frac{\partial \Phi}{\partial p'_1} + \\ + (p'_1 p_1)\mu_i \frac{\partial \Phi}{\partial p_2} + (p_1 p'_1) \frac{\partial \Phi}{\partial p_3} = 0$$

$$(p_1 p'_1) \frac{d\Phi}{dx_1} + [(p_2 p'_1) + (p_1 p_2)\lambda_i] \frac{d\Phi}{dx_2} + [(p_2 p'_1) + (p_1 p_2)\lambda_i]\mu_i \frac{d\Phi}{dx_3} + \\ + ([p'_1 x_1] + [p_2 x_2]\lambda_i + [p_2 x_3]\lambda_i \mu_i) \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} + \\ + ([x_1 p_1] + [x_2 p_2] + [p'_1 x_3]\mu_i) \frac{\partial \Phi}{\partial p'_1} + \\ + ([p'_1 x_2] + [x_2 p_1]\lambda_i + [p'_1 x_3]\mu_i + [x_3 p_1]\lambda_i \mu_i) \frac{\partial \Phi}{\partial p_2} = 0,$$

wobei λ_i eine Wurzel der quadratischen Gleichung

$$(p_1 p_2)\lambda^2 - [(p_1 p'_2) + (p'_1 p_2)]\lambda + (p'_1 p'_2) = 0 \tag{10}$$

bedeutet, und μ_i mittelst λ_i auf Grund von der Formel:

$$[(p'_1 p_2) + (p_2 p_1)\lambda_i]\mu_i + (p'_1 p_1)\nu + [(p_3 p'_1) + (p_1 p_3)\lambda_i] = 0,$$

wo ν eine beliebige Funktion bedeutet, bestimmt werden. Die Willkürlichkeit der Funktion ν kann man benützen, um die linearen Gleichungen zum Bestimmen von Integralen $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2, \ldots$ abzukürzen. Indem wir z. B. $\nu = 0$ setzen, bekommen wir Term μ_i mittelst Lösung λ_i auf Grund von der Formel:

$$\mu_i = \frac{(p'_1 p_3) + (p_3 p_1) \lambda_i}{(p'_1 p_2) + (p_2 p_1) \lambda_i}.$$

Die dritte Gleichung (9) kann man auf Grund von der Elimination der Ableitung $\frac{\partial \Phi}{\partial p_2}$ von der dritten und vierten Gleichung (9) ändern. Auf Grund von Identitäten

$$(p_2 p_3)(p_1 p'_1) + (p_3 p_1)(p_2 p'_1) + (p_2 p_1)(p'_1 p_3) \equiv 0$$
$$(p'_3 p_2)(p_1 p'_1) + (p_2 p'_1)(p_1 p'_3) + (p_2 p_1)(p'_3 p'_1) \equiv 0$$

bemerkt man, dass das Resultat der Elimination gleichbedeutend mit der zweiten Gleichung (9) wird, falls λ_i eine gemeinsame Lösung der quadratischen Gleichung (10) und der Gleichung

$$(p_1 p_3) \lambda^2 - [(p_1 p'_3) + (p'_1 p_3)] \lambda + (p'_1 p'_3) = 0 \tag{11}$$

ist. Dann reduziert sich das Integrieren zur Bestimmung der partiellen Integrale des Systemes von lediglich 4 linearen Gleichungen (9) und zwar 1-en, 2-ten, 4-ten und 5-ten. Indem wir die Resultante der Gleichungen (10), (11), gleich Null setzen, bekommen wir als Bedingung für die Gleichungen des gegebenen Systemes

$$\begin{vmatrix} (p_1 p_2), & (p_2 p'_1) + (p'_2 p_1), & (p'_1 p'_2), & 0 \\ 0, & (p_1 p_2), & (p_2 p'_1) + (p'_2 p_1), & (p'_1 p'_2) \\ (p_1 p_3), & (p_3 p'_1) + (p'_3 p_1), & (p'_1 p'_3), & 0 \\ 0, & (p_1 p_3), & (p_3 p'_1) + (p'_3 p_1), & (p'_1 p'_3) \end{vmatrix} = 0,$$

und die Formel zur Bestimmung der Funktion λ_i in der Form:

$$\lambda_i = \frac{\begin{vmatrix} (p_1 p_2), (p'_1 p'_2) \\ (p_1 p_3), (p'_1 p'_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (p_1 p_2, (p_2 p'_1) + (p'_2 p_1) \\ (p_1 p_3, (p_3 p'_1) + (p'_3 p_1) \end{vmatrix}}.$$

Beispiel.

$$F_1 \equiv p_1 - p'_2 \equiv 0; \qquad F_2 \equiv p'_1 - p_3 = 0.$$

Nehmen wir die von Null verschiedene Determinante 8 Ordnung der Matrix (7); dann bekommen wir die Ungleichheit

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial p'_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial p_3}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial p_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial p'_2}\right) \neq 0.$$

Wir haben ein System von 5 nichtlinearen Gleichungen, die den Gleichungen (8) entsprechen:

$$\frac{d\Phi}{dx_1} = 0; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial p_2} = 0; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial p'_3} = 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial p_1}\frac{\partial\Phi}{\partial p_3} + \frac{\partial\Phi}{\partial p'_2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p_3} + \frac{\partial\Phi}{\partial p'_1}\right) = 0; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial p'_2}\frac{\partial\Phi}{\partial p_3} + \frac{\partial\Phi}{\partial p_1}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p_3} + \frac{\partial\Phi}{\partial p'_1}\right) = 0.$$

Die zwei letzten Gleichungen:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial p_1} - \frac{\partial\Phi}{\partial p'_2} = 0; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial p'_1} + 2\frac{\partial\Phi}{\partial p_3} = 0,$$

führen mit den 3 vorgehenden zu den Integralen

$$\Phi_1 \equiv p_1 + p'_2 = \varphi(x_2, x_3); \qquad \Phi_2 \equiv 2p'_1 - p_3 = \psi(x_2, x_3).$$

Auf Grund der gegebenen Gleichungen und der Bedingungen

$$\frac{dp_1}{dx_3} = \frac{dp_3}{dx_1}; \quad \frac{dp'_2}{dx_1} = \frac{dp'_1}{dx_2}$$

bestimmen wir die Funktionen φ und ψ und bekommen:

$$z = x_1\,\Omega'(x_2) + \Psi(x_3); \qquad z'_1 = x_1\,\Psi'(x_3) + \Omega(x_2),$$

wobei $\Psi(x_3)$ und $\Omega(x_2)$ wie auch ihre Ableitungen $\Psi'(x_3)$ und $\Omega'(x_2)$ beliebige Funktionen bedeuten.

XVI. Die Gestalt der Systeme der nichtlinearen Gleichungen (8) und im Zusammenhange damit der linearen Gleichungen (9) hängt davon ab, welche von den Determinanten 8 Ordnung der Matrix (7) wir als von Null verschieden annehmen werden.

Wenn wir z. B. die Determinante aus den Vertikalreihen 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13 und allen Horizontalreihen, die 3. ausgeschlossen, bilden, bekommen wir für das gegebene System eine Beschränkung in der Gestalt:

$$D\left(\frac{F_1, F_2}{p_3, p'_3}\right) \neq 0; \qquad D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_2, p_3, p'_2}\right) \neq 0,$$

und indem wir noch neue Bezeichnungen

$$\begin{array}{llll} A_1 = (p_2 p_3 p'_2); & B_1 = (p_3 p'_2 p'_3); & C_1 = (p_2 p'_2 p'_3); & D_1 = (p_2 p_3 p'_3) \\ E_1 = (p_1 p_3 p'_3); & F_1 = (p_3 p'_2 p_1); & G_1 = (p_3 p'_2 p'_1); & H_1 = (p_3 p'_3 p'_1) \\ I_1 = [p_3 p'_3 x_3]; & J_1 = [p_2 p'_2 x_2]; & K_1 = [p_2 p_3 x_1]; & L_1 = [p_2 p'_2 x_1] \end{array}$$

$$M_1 = [p_3 p'_2 x_1]$$

einführen, bekommen wir statt eines Systems von 5 nichtlinearen Gleichungen (8) ein folgendes System:

$$A_1 B_1 = C_1 D_1; \quad A_1 C E_1 = (I D + F_1 C) D_1; \quad G_1 C D = (G D_1 + A_1 E_1) D$$
$$A_1 (A_1 H + C_1 E_1) = D_1 (D D_1 + B_1 C); \tag{8'}$$
$$A_1 (A_1 I_1 + J_1 D_1 + M_1 E_1) = D_1 (K_1 D + M_1 C);$$

desgleichen bekommen wir für eine Determinante, welche zu den Beschränkungen

$$D\left(\frac{F_1, F_2}{p_3, p'_3}\right) \neq 0; \quad D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_2, p_3, p'_2}\right) \neq 0; \quad D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_1, p_2, p_3}\right) \neq 0$$

führt, indem wir noch die Bezeichnung

$$A_2 = [p_1 p_2 x_1]$$

einführen, folgende 5 nichtlineare Gleichungen:

$$\begin{aligned} &A_1 B_1 = C_1 D_1; \quad A A_1 E_1 = D C F; \quad D_1 (D I + C F_1) = A_1 E_1 C \\ &A_1 (I H_1 + J E_1) + C E_1 D_1 = 0; \quad I (A_1 I_1 + J_1 D_1) = A_1 A_2 E_1. \end{aligned} \tag{8''}$$

Dementsprechend ändert sich die Form des Systems der linearen Gleichungen zur Bestimmung $\Phi_1 = C_1, \ldots$ Lineare Gleichungen 1. Ordnung zur Bestimmung der Gleichungen $\Phi_1 = C_1, \ldots$ kann man auch unmittelbar aus der Matrix (7) bekommen, indem wir entsprechend eine von Null verschiedene Determinante 8. Ordnung wählen, oder anders, indem wir die Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $\Phi = C$ mittelst anderer Ungleichheiten beschränken. Man muss in Betracht nehmen, dass man verschiedene Systeme von linearen Gleichungen für verschiedene der Null nichtgleiche Determinanten 8. Ordnung schreiben kann. Ausserdem kann man selbstverständlich die Involutionsbedingungen nicht schreiben auf Grund von Determinanten 9. Ordnung, die wir bekommen, indem wir zum Minor 8. Ordnung, der Null identisch ist. Horizontalreihen und je eine Vertikalreihe zuschreiben. Als Beispiel einer ähnlichen Determinante 8. Ordnung kann eine Determinante aller Horizontalreihen, die erste ausgenommen, und der Vertikalreihen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10. dienen. Endlich muss man auch bemerken, dass die Nullgleichheit der Involutionsbedingungen der Nullungleichheit eines entsprechend gewählten Minors nicht widersprechen darf. Z. B. führt die Nullungleichheit jeder Determinante 8. Ordnung von den Elementen aller Horizontalreihen, eine von drei letzten ausgenommen, und der Vertikalreihen Nr. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10 zu den drei verschiedenen Gestalten der Systeme von 5 linearen Gleichungen 1. Ordnung, von denen je zwei der Nullungleichheit des entsprechenden Minors 8. Ordnung widersprechen werden. Diese Gesetzmässigkeiten kann man für die Systeme von nichtlinearen Gleichungen mit zwei und mehr unbekannten Funktionen von drei und mehr unabhängigen Variabeln benützen.

Eine von Null verschiedene Determinante 8. Ordnung der Elemente aller Horizontalreihen der Matrix (7), die letzte ausgenommen, und der Vertikalreihen Nr. 2, 3, 4, 5, 8, 10, 12, 13 führt zu den folgenden Beschränkungen für die Gleichungen $F_1=0$, $F_2=0$, $\Phi=C$:

$$1)\ D\left(\frac{F_1, F_2}{p_3, p'_3}\right) \neq 0;\quad 2) \begin{vmatrix} D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_1, p_2, p'_2}\right), & D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p'_2, p_1, p'_1}\right) \\ D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_1, p_2, p'_2}\right), & D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_2, p_1, p'_1}\right) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (12)$$

und erlaubt folgende 5 lineare Gleichungen 1. Ordnung zur Bestimmung der partiellen Integrale $\Phi_1=C_1,\ldots$ aufzuschreiben:

$$\begin{aligned}
&(p_3 p'_3)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2} + (p'_3 p'_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p_3} + (p'_2 p_3)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_3} = 0 \\
&(p_3 p'_3)\frac{\partial\Phi}{\partial p_2} + (p'_3 p_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p_3} + (p_2 p_3)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_3} = 0 \\
&(p_3 p'_3)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_1} + (p'_3 p'_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p_3} + (p'_1 p_3)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_3} = 0 \qquad (13) \\
&(p_3 p'_3)\frac{\partial\Phi}{\partial p_1} + (p'_3 p_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p_3} + (p_1 p_3)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_3} = 0 \\
&(p_3 p'_3)\frac{d\Phi}{dx_3} + [p'_3 x_3]\frac{\partial\Phi}{\partial p_3} + [x_3 p_3]\frac{\partial\Phi}{\partial p'_3} = 0
\end{aligned}$$

wobei:
$$\frac{d\Phi}{dx_3} = \frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}p_3 + \frac{\partial\Phi}{\partial z'}p'_3,$$

so dass das letzte System nur 4 untereinander unabhängige Integrale $\Phi_1=C_1,\ldots\ \Phi_4=C_4$ geben kann.

Indem wir in den Ungleichheiten (12) p_3 und p'_3 mit p_2 und p'_2 und umgekehrt vertauschen, und p_1 und p'_1 unverändert lassen, oder indem wir in dieser neuen Vertauschung p_2 und p'_2 mit p_1 und p'_1 und umgekehrt tauschen und p_3 und p'_3 unverändert lassen, kann man statt (13) folgende 2 Systeme von 5 linearen Gleichungen niederschreiben.

$$\left.\begin{aligned}
&(p_2 p'_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p_1} + (p'_2 p_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p_2} + (p_1 p_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2} = 0 \\
&(p_2 p'_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_1} + (p'_2 p'_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p_2} + (p'_1 p_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2} = 0 \\
&(p_2 p'_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p_3} + (p'_2 p_3)\frac{\partial\Phi}{\partial p_2} + (p_3 p_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2} = 0 \\
&(p_2 p'_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_3} + (p'_2 p'_3)\frac{\partial\Phi}{\partial p_2} + (p'_3 p_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2} = 0 \\
&(p_2 p'_2)\frac{d\Phi}{dx_2} + [p'_2 x_2]\frac{\partial\Phi}{\partial p_2} + [x_2 p_2]\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2} = 0
\end{aligned}\right\}$$

oder

$$\left.\begin{aligned}
&(p_1\,p'_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p_2}+(p'_1\,p_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p_1}+(p_2\,p_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_1}=0\\
&(p_1\,p'_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2}+(p'_1\,p'_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p_1}+(p'_2\,p_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_1}=0\\
&(p_1\,p'_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p_3}+(p'_1\,p_3)\frac{\partial\Phi}{\partial p_1}+(p_3\,p_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_1}=0\\
&(p_1\,p'_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_3}+(p'_1\,p'_3)\frac{\partial\Phi}{\partial p_1}+(p'_3\,p_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_1}=0\\
&(p_1\,p'_1)\frac{d\Phi}{dx_3}+[p'_1\,x_1]\frac{\partial\Phi}{\partial p_1}+[x_1\,p_1]\frac{\partial\Phi}{\partial p'_1}=0
\end{aligned}\right\}.$$

Das System von linearen Gleichungen zur Bestimmung von partiellen Integralen $\Phi_1=C_1,\ldots$ so wie auch die Beschränkungen für die Gleichungen $F_1=0$, $F_2=0$, $\Phi=C$ werden bedeutend einfacher, wenn das gegebene System eine oder mehrere Ableitungen $p_1, p_2,\ldots p_3$ nicht enthält.

Z. B. enthält das gegebene System die Ableitung p'_3 nicht, so bekommen wir die Bestimmung der partiellen Integrale, welche die Variable p'_3 nicht enthalten, bei folgenden Ungleichheiten:

$$1)\ D\left(\frac{F_1,F_2}{p'_2,p_3}\right)\neq 0,\quad 2)\begin{vmatrix}(p_1\,p'_1\,p_2), & (p_1\,p_2\,p'_2)\\ (p_1\,p'_1\,p'_2), & (p'_1\,p_2\,p'_2)\end{vmatrix}\neq 0,$$

vom System von nur 4 linearen Gleichungen

$$\begin{aligned}
&(p'_2\,p_3)\frac{\partial\Phi}{\partial p_2}+(p_3\,p_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2}+(p_2\,p'_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p_3}=0\\
&(p'_2\,p_3)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_1}+(p_3\,p'_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2}+(p'_1\,p'_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p_3}=0\\
&(p'_2\,p_3)\frac{\partial\Phi}{\partial p_1}+(p_3\,p_1)\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2}+(p_1\,p'_2)\frac{\partial\Phi}{\partial p_3}=0\\
&(p'_2\,p_3)\frac{d\Phi}{dx_3}+[p_3\,x_3]\frac{\partial\Phi}{\partial p'_2}+[x_3\,p'_2]\frac{\partial\Phi}{\partial p_3}=0,
\end{aligned}$$

und bei den Ungleichheiten:

$$1)\ D\left(\frac{F_1,F_2}{p_2,p'_2}\right)\neq 0;\quad 2)\ (p_1\,p'_1\,p_3)\neq 0;\quad 3)\ (p'_1\,p'_2\,p_3)\neq 0,$$

oder

$$1)\ D\left(\frac{F_1,F_2}{p_1,p'_1}\right)\neq 0;\quad 2)\ (p_2\,p'_2\,p_3)\neq 0;\quad 3)\ (p'_2\,p_3\,p'_1)\neq 0,$$

vom System

$$\left.\begin{aligned}
&(p_2\, p'_2)\frac{\partial \Phi}{\partial p_3} + (p'_2\, p_3)\frac{\partial \Phi}{\partial p_2} + (p_3\, p_2)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p'_2} = 0\\
&(p_2\, p'_2)\frac{\partial \Phi}{\partial p'_1} + (p'_2\, p'_1)\frac{\partial \Phi}{\partial p_2} + (p'_2\, p_2)\frac{\partial \Phi}{\partial p'_2} = 0\\
&(p_2\, p'_2)\frac{\partial \Phi}{\partial p_1} + (p'_2 p_1)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p_2} + (p_1\, p_2)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p'_2} = 0\\
&(p_2\, p'_2)\,\frac{d\Phi}{dx_1} + [p'_2\, x_2]\frac{\partial \Phi}{\partial p_2} + [x_2\, p_2]\,\frac{\partial \Phi}{\partial p'_2} = 0
\end{aligned}\right\}$$

oder

$$\left.\begin{aligned}
&(p_1\, p'_1)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p_2} + (p'_1\, p_2)\frac{\partial \Phi}{\partial p_1} + (p_2\, p_1)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p'_1} = 0\\
&(p_1\, p'_1)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p'_2} + (p'_1 p'_2)\frac{\partial \Phi}{\partial p_1} + (p'_2\, p_1)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p'_1} = 0\\
&(p_1\, p'_1)\frac{\partial \Phi}{\partial p_3} + (p'_1 p_3)\frac{\partial \Phi}{\partial p_1} + (p_3\, p_1)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p'_1} = 0\\
&(p_1\, p'_1)\,\frac{d\Phi}{dx_1} + [p_1\, x_1]\,\frac{\partial \Phi}{\partial p_1} + [x_1\, p_1]\,\frac{\partial \Phi}{\partial p'_1} = 0
\end{aligned}\right\}.$$

Um das System von 2 nichtlinearen Gleichungen mit 2 unbekannten Funktionen z, z' mit 4 unabhängigen Variablen $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$

$$F_i\,(x_1,\ldots x_4,\ z,\ z',\ p_1,\ldots p_4\cdot\ p'_1 \quad p'_4) = 0 \quad (i = 1, 2)$$

zu integrieren, bilden wir eine entsprechende Matrix mit 12 horizontalen und 21 vertikalen Reihen und nehmen die der Null gleiche Determinante 12 Ordnung. Indem wir eine von Null verschiedene Determinante 11. Ordnung, die zu den Beschränkungen vom Typus:

$$1)\ D\left(\frac{F_1,\ F_2}{p_4,\ p'_4}\right) \neq 0; \qquad 2)\ D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_2, p'_2, p_3}\right) \neq 0; \tag{14}$$

$$3)\ \begin{vmatrix} (p_2\, p'_2\, p_3), & (p'_2\, p_2\, p'_3) \\ (p_2\, p'_3\, p_3), & (p'_2\, p_3\, p'_3) \end{vmatrix} \neq 0$$

führt, bilden, bekommen wir das folgende System von nur 7 linearen Gleichungen zur Bestimmung von $\Phi_1 = C_1, \ldots$

$$\begin{aligned}
&(p_4\, p'_4)\frac{\partial \Phi}{\partial p'_3} + (p'_4\, p'_3)\frac{\partial \Phi}{\partial p_4} + (p'_3\, p_4)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p'_4} = 0\\
&(p_4\, p'_4)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p_3} + (p'_4\, p_3)\frac{\partial \Phi}{\partial p_4} + (p_3\, p_4)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p'_4} = 0
\end{aligned} \tag{15}$$

$$(p_4\, p'_4)\frac{\partial \Phi}{\partial p'_2} + (p'_4\, p'_2)\frac{\partial \Phi}{\partial p_4} + (p'_2\, p_4)\frac{\partial \Phi}{\partial p'_4} = 0$$

$$(p_4\, p'_4)\frac{\partial \Phi}{\partial p_2} + (p'_4\, p_2)\frac{\partial \Phi}{\partial p_4} + (p_2\, p_4)\frac{\partial \Phi}{\partial p'_4} = 0$$

$$(p_4\, p'_4)\frac{\partial \Phi}{\partial p'_1} + (p'_4\, p'_1)\frac{\partial \Phi}{\partial p_4} + (p'_1\, p_4)\frac{\partial \Phi}{\partial p'_4} = 0$$

$$(p_4\, p'_4)\frac{\partial \Phi}{\partial p_1} + (p'_4\, p_1)\frac{\partial \Phi}{\partial p_4} + (p_1\, p_4)\frac{\partial \Phi}{\partial p'_4} = 0$$

$$(p_4\, p'_4)\frac{d \Phi}{d x_1} + [p'_4\, x_1]\frac{\partial \Phi}{\partial p_4} + [x_1\, p_4]\frac{\partial \Phi}{\partial p'_4} = 0.$$

Man kann analog Systeme bilden, in welchen die letzte Gleichung totale Ableitungen in x_2, x_3, x_4 enthalten wird. Die Ungleichheiten (14) kann man durch andere nur 2 Ungleichheiten, z. B. von der Form:

$$1)\ D\left(\frac{F_1, F_2}{p_1, p'_1}\right) \neq 0;\quad 2)\ D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p_1\ p'_1\ p_2}\right) \neq 0,$$

tauschen; dann bekommen wir ein System von 10 nichtlinearen Gleichungen, von denen 3 von anderen 7 abhängig werden; es erübrigt dann diese nichtlineare Gleichungen auf ein System von linearen Gleichungen mittelst algebraischer Gleichungen zu überführen, so wie es schon früher für den Fall der Systeme von zwei Funktionen mit 2 und 3 Argumenten gewesen.

Um das System der Gleichungen mit 3 unbekannten Funktionen z, z, z'' der 3 unabhängigen Variablen x_1, x_2, x_3

$$F_i(x_1, x_2, x_3, z, z', z'', p_1, p_2\ p_3, p'_1, p'_2, p'_3, p''_1, p''_2, p''_3) = 0 \quad (i=1,2,3)$$

zu integrieren, nehmen wir 8 nullgleiche Determinanten 12 Ordnung von einer Matrix mit 12 horizontalen und 19 vertikalen Reihen. Indem wir eine von Null verschiedene Determinante 11. Ordnung wählen, welche z. B. zur Ungleichheit

$$1)\ D\left(\frac{F_1, F_2, F_3}{p_3, p'_3, p''_3}\right) \neq 0;$$

$$2)\ (p_2\, p'_2\, p_3\, p'_3)(p_2\, p'_2\, p''_2\, p''_3) + \begin{vmatrix} (p'_2\, p''_2\, p_3\, p'_3), & (p_2\, p'_2\, p''_2\, p'_3) \\ (p_2\, p''_2\, p_3\, p'_3), & (p_2\, p'_2\, p''_2\, p_3) \end{vmatrix} \neq 0$$

führt, so sind wir dann sicher, dass eine von 8 entsprechenden Determinanten der Null identisch gleich ist, während die anderen zur Berechnung von partiellen Integralen $\Phi_1 = C_1, \ldots$ eines folgenden Systems von 7 linearen Gleichungen mit einer unbekannten Funktion Φ:

$$(p'_3\, p''_3\, p''_2)\frac{\partial \Phi}{\partial p_3} + (p_3\, p''_2\, p''_3)\frac{\partial \Phi}{\partial p'_3} +$$
$$+ (p_3\, p'_3\, p''_2)\frac{\partial \Phi}{\partial p''_3} + (p_3\, p''_3\, p'_3)\frac{\partial \Phi}{\partial p''_2} = 0$$

$$(p'_3\, p''_3\, p'_2)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p_3} + (p_3\, p'_2\, p''_3)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p'_3} +$$
$$+ (p_3\, p'_3\, p'_2)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p''_3} + (p_3\, p''_3\, p'_3)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p'_2} = 0$$

$$(p'_3\, p''_3\, p_2)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p_3} + (p_3\, p_2\, p''_3)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p'_3} +$$
$$+ (p_3\, p'_3\, p_2)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p''_3} + (p_3\, p''_3\, p'_3)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p_2} = 0$$

$$(p'_3\, p''_3\, p''_1)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p_3} + (p_3\, p''_1\, p''_3)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p'_3} +$$
$$+ (p_3\, p'_3\, p''_1)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p''_3} + (p_3\, p''_3\, p'_3)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p''_1} = 0$$

$$(p'_3\, p''_3\, p'_1)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p_3} + (p_3\, p'_1\, p''_3)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p'_3} +$$
$$+ (p_3\, p'_3\, p'_1)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p''_3} + (p_3\, p''_3\, p'_3)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p'_1} = 0$$

$$(p'_3\, p''_3\, p_1)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p_3} + (p_3\, p_1\, p''_3)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p'_3} +$$
$$+ (p_3\, p'_3\, p_1)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p''_3} + (p_3\, p''_3\, p'_3)\,\frac{\partial \Phi}{\partial p_1} = 0$$

$$[p'_3\, p''_3\, x_1]\,\frac{\partial \Phi}{\partial p_3} + [p''_3\, p_3\, x_1]\,\frac{\partial \Phi}{\partial p'_3} +$$
$$+ [p_3\, p'_3\, x_1]\,\frac{\partial \Phi}{\partial p''_3} + (p_3\, p''_3\, p'_3)\,\frac{d \Phi}{d x_1} = 0$$

führen.

Analog bekommt man Systeme, vo die letzte Gleichung totale Ableitungen in x_2 oder x_3 enthalten wird.

Wählen wir eine andere von Null verschiedene Determinante II Ordnung, z. B. gleich dem Produkt:

$$(p_1\, p'_1\, p''_1) \cdot (p_1\, p'_1\, p''_1\, p_2)^2,$$

wobei es:

$$1)\ (p_1, p'_1, p''_1) \neq 0; \quad 2)\ (p_1\, p'_1\, p''_1\, p_2) \neq 0,$$

sein muss, dann bekommen wir ein System von 8 nichtlinearen Gleichungen von der Form:

$$\alpha_1\, A + \beta_1\, B + \gamma_1\, C = 0$$
$$\alpha_2\, A + \beta_2\, B + \gamma_2\, C = 0$$

$$
\begin{array}{ll}
\varphi_1 M + \psi_1 N + \chi_1 F + \omega_1 Q = 0 & a_1 M + b_1 N + c_1 P + d_1 Q + e_1 R = 0 \\
\varphi_2 M + \psi_2 N + \chi_2 P + \omega_2 Q = 0 & a_2 M + b_2 N + c_2 P + d_2 Q + e_2 S = 0 \\
\varphi_3 M + \psi_3 N + \chi_3 P + \omega_3 Q = 0 & a_3 M + b_3 N + c_3 P + d_3 Q + e_3 T = 0
\end{array}
$$

wo $\alpha_1, \ldots \varphi_1, \ldots a_1, \ldots A, \ldots T$ die funktionellen Determinanten 4. Ordnung bedeuten. Diese Gleichungen muss man auf das System von 7 linearen Gleichungen mit partiellen Ableitungen 1. Ordnung einer unbekannten Funktion Φ reduzieren.

Das Gleichungssystem:

$$f_i\,(x, y, z, p, q;\; x', y', z', p', q') = 0, \quad (i = 1, 2) \tag{16}$$

wo die unbekannte Funktion z von zwei Argumenten x, y abhängt und die andere unbekannte z' eine Funktion der zwei anderen unbekannten variablen x', y' ist, kann man analog betrachten wie jenen Teilfall des Systems:

$$F_i\,(x, y, x', y', z, \zeta, p, q, p', q', \pi, \varkappa, \pi', \varkappa') = 0 \tag{17}$$

mit zwei unbekannten Funktionen z und ζ, jede von 4 unabhängigen variablen x, y, x', y' abhängig, wenn wir

$$\frac{\partial z}{\partial x'} = \frac{\partial z}{\partial y'} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial F_i}{\partial p'} = \frac{\partial F_i}{\partial q'} = \frac{\partial F_i}{\partial \pi} = \frac{\partial F_i}{\partial \varkappa} = 0,$$

wo:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots\; q' = \frac{\partial z}{\partial y'}; \qquad \pi = \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \ldots\; \varkappa' = \frac{\partial \zeta}{\partial y'} \text{ bedeuten.}$$

Die Matrix des Systems (16) bildet jenen speziellen Fall der Matrix für das schon behandelte System (17), wenn wir entsprechende Elemente gleich Null setzen.

Als Resultat, wenn wir z. B.

$$1)\; D\left(\frac{f_1, f_2}{p_1, p'}\right) \neq 0; \quad 2)\; D\left(\frac{f_1, f_2, \varphi}{p, p', q'}\right) \neq 0, \text{ setzen,}$$

bekommen wir zur Integration der Gleichungen (16) folgendes System von 3 linearen Gleichungen mit einer unbekannten Funktion φ, indem wir zum System (16) die Gleichungen zurechnen:

$$\varphi\;(x, y, z, p, q;\; x', y', z', p', q') = \text{Const.}$$

$$(p'\, q)\,\frac{\partial \varphi}{\partial p} + (p\, p')\,\frac{\partial \varphi}{\partial q} + (q\, p)\,\frac{\partial \varphi}{\partial p'} = 0$$

$$(q'\, q)\,\frac{\partial \varphi}{\partial p} + (p\, q')\,\frac{\partial \varphi}{\partial q} + (q\, p)\,\frac{\partial \varphi}{\partial q'} = 0$$

$$([p'\, x'] + [q'\, y'])\,\frac{\partial \varphi}{\partial p} + [x'\, p]\,\frac{\partial \varphi}{\partial p'} + [y'\, p]\,\frac{\partial \varphi}{\partial q'} + (p\, p')\,\frac{d\varphi}{dx} + (p\, q')\,\frac{d\varphi}{dy} = 0$$

Für die Beschränkungen

$$1)\ D\left(\frac{f_1, f_2}{q_1\ q'}\right) \neq 0; \quad 2)\ D\left(\frac{f_1, f_2, \varphi}{p, q, q'}\right) \neq 0$$

bekommen wir:

$$(q'p)\frac{\partial\varphi}{\partial p'} + (pp')\frac{\partial\varphi}{\partial q'} + (p'q')\frac{\partial\varphi}{\partial p} = 0$$

$$(q'q)\frac{\partial\varphi}{\partial p'} + (qp')\frac{\partial\varphi}{\partial q'} + (p'q')\frac{\partial\varphi}{\partial q} = 0$$

$$([px] = [qy])\frac{\partial\varphi}{\partial q'} + [xq']\frac{\partial\varphi}{\partial p} + [yq']\frac{\partial\varphi}{\partial q} + (q'p)\frac{d\varphi}{dx} + (q'q)\frac{d\varphi}{dy} = 0.$$

Analog können wir andere Systeme von Gleichungen mit unbekannten Funktionen z, z', u. s. w. mit verschiedenen unbekannten Funktionen: $x_1, x_2, x_3, \ldots;\ x'_1, x'_2, x'_3$, u. s. w. betrachten.

XVII. Die ersten Arbeiten über das Integrieren der Gleichungen mit partiellen Ableitungen 1. Ordnung einer unbekannten Funktion z stammen von Euler, welcher die Bedingung:

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} q = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z} p \tag{18}$$

aufgestellt hat, damit der Ausdruck:

$$dz = p\,dx + q\,dy \tag{19}$$

ein totales Differentiale sei, wenn p und q als Funktionen von $x, y, z,$ durch die zum Integrieren gegebene Gleichung

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \tag{20}$$

gebunden sind, und stellte die Aufgabe auf, die Integration einer Gleichung mit partiellen Ableitungen (20) auf die Integration eines Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen zu überführen. Lagrange hat das umgekehrte Theorem bewiesen, dass die Formel (19) eine Gleichung mit totalen Differentialen bestimmt, falls die Variable $q(x, y, z)$ die Eulersche Bedingung (18) erfüllt. Charpit hat als erster die Methode zur Bestimmung einer zweiten Gleichung

$$\Phi(x, y, z\ p, q) = 0 \text{ angegeben,} \tag{21}$$

um aus dem System (20), (21), zwei Funktionen $p(x,y,z)$ und $q(x,y,z)$ zu bestimmen, und zwar: man muss ein partielles Integral $\Phi_1 = C_1$ einer linearen Gleichung mit partiellen Ableitungen erster Ordnung

$$P\frac{\partial\Phi}{dx} + Q\frac{\partial\Phi}{\partial y} + (Pp + Qq)\frac{\partial\Phi}{\partial z} - (X + pZ)\frac{\partial\Phi}{\partial p} - (Y + qZ)\frac{\partial\Phi}{\partial q} = 0 \tag{22}$$

bekommen, oder anders — ein Integral des Systemes von entsprechenden gewöhnlichen Differentialgleichungen finden, wobei $X, Y,\dots Q$ partielle Ableitungen der gegebenen Funktion F in $x, y,\dots q$ bedeuten. Die Charpit'sche Methode, die Gleichung (22) zu bekommen, erfordert die Ungleichheit:

$$D\left(\frac{F, \Phi}{p, q}\right) \neq 0.$$

Jacobi hat zwei, für die Strenge der Charpit'schen Methode nötige Umkehrungstheoreme bewiesen. Lagrange hat dann spezielle Fälle der Gleichung (20) untersucht, die Resultate der noch nichtgedruckten Charpit'schen Arbeit wiederholt uud ist mittelst einer mehr komplizierten Weise zum Auffinden der Charpit'schen Gleichung (22) gelangt. Diese Gleichung (22) bleibt auch in allen späteren Integrationsmethoden der nichtlinearen Gleichungen (20): in der Cauchy'schen, Jacobi'schen u. a. Methoden dieselbe. Die Charpit'sche Methode kann auch für das System von nichtlinearen Gleichungen mit zwei und mehreren unbekannten Funktionen $z, z',\dots$ verallgemeinert werden, falls die gegebenen Gleichungen nicht alle Ableitungen der unbekannten Funktionen $z, z',\dots$ in unabhängigen Variablen x, y besitzen. Schliesslich bekommt man eine Verallgemeinerung der Charpit'schen Gleichung (22) für einige unbekannte Funktionen; diese verallgemeinerten Gleichungen werden eben die Gleichungen, welche wir in früheren Abschnitten als Resultat der Verallgemeinerung der Jacobi'schen Methode für die Gleichungen mit mehreren unbekannten Funktionen bekommen haben.

Es genügt, wenn wir das System von nichtlinearen Gleichungen

$$F_i\,(x, y, z, z', p, q, p', q') = 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{23}$$

untersuchen. Um 4 Funktionen

$$p\,(x, y, z, z'),\ q\,(x, y, z, z'),\ p'\,(x, y, z, z'),\ q'\,(x, y, z\ z'), \text{ zu finden,} \tag{24}$$

welche das Bestimmen der unbekannten Funktionen z, z' mittelst der Quadratur von 3 Gleichheiten

$$dz = p\,dx + q\,dy;\ dz' = p'\,d\,x + q'\,d\,y, \text{ gestatten werden,} \tag{25}$$

indem wir die Verallgemeinerung der Eulerschen Bedingungen

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}q + \frac{\partial p}{\partial z'}q' = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z}p + \frac{\partial q}{\partial z'}p' \tag{26}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial y} + \frac{\partial p'}{\partial z}q + \frac{\partial p'}{\partial z'}q' = \frac{\partial q'}{\partial x} + \frac{\partial q'}{\partial z}p + \frac{\partial q'}{\partial z'}q',$$

oder anders:

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx};\ \frac{dp'}{dy} = \frac{dq'}{dx} \text{ erfüllen,} \tag{26'}$$

zu finden,

muss man zwei neue Gleichungen von der Form:

$$\Phi\ (x, y, z, z', p, q, p', q') = 0 \text{ finden,} \tag{27}$$

welche zusammen mit den Gleichungen (23) die Funktionen (24), die die Bedingungen (26) erfüllen, bestimmen.

Bei Behaltung unserer gewöhnlichen Bezeichnungen gibt das Differenzieren der Gleichungen (23), (27) in Bezug auf (26):

$$\begin{gathered}
X_1 + Z_1 p + Z_1' p' + P_1 \frac{dp}{dx} + Q_1 \frac{dp}{dy} + P_1' \frac{dp'}{dx} + Q_1' \frac{dp'}{dy} = 0 \\
\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} p + \frac{\partial \Phi}{\partial z'} p' + \frac{\partial \Phi}{\partial p} \frac{dp}{dx} + \frac{\partial \Phi}{\partial q} \frac{dp}{dy} + \frac{\partial \Phi}{\partial p'} \frac{dp'}{dx} + \frac{\partial \Phi}{\partial q'} \frac{dp'}{dy} = 0 \\
Y_1 + Z_1 q + Z_1' q' + P_1 \frac{dp}{dy} + Q_1 \frac{dq}{dy} + P_1' \frac{dp'}{dy} + Q_1' \frac{dq'}{dy} = 0 \\
\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} q + \frac{\partial \Phi}{\partial z'} q' + \frac{\partial \Phi}{\partial p} \frac{dp}{dy} + \frac{\partial \Phi}{\partial q} \frac{dp}{dy} + \frac{\partial \Phi}{\partial p'} \frac{dp'}{dy} + \frac{\partial \Phi}{\partial q'} \frac{dq'}{dy} = 0.
\end{gathered} \tag{28}$$

Enthält das System (23) z. B. die Ableitung q' nicht, dann müssen wir auch die Gleichung (27) suchen, welche diese Ableitung q', $\frac{\partial \Phi}{\partial q'} = 0$ nicht enthält, um einer von den ersten verallgemeinerten Euler'schen Bedingungen (25) genüge zu leisten und mittelst der Quadratur die unbekannte Funktion z von der ersten Gleichheit (25) zu bestimmen. Wird die Ungleichheit

$$D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{p, q, p'}\right) \neq 0 \text{ erfüllt,}$$

welche die Charpit'sche Ungleichheit verallgemeinert, dann bekommt man auf Grund von Elimination von 5 unbekannten $\frac{dp}{dx}, \frac{dp}{dy}, \frac{dp'}{dx}, \frac{dp'}{dy}, \frac{dq}{dy}$ in 6 linearen Gleichungen eine solche lineare Gleichung 1. Ordnung zur Bestimmung der Funktion Φ, welche die lineare Charpit'sche Gleichung (22):

$$\begin{gathered}
(p'p) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + (p'q) \frac{\partial \Phi}{\partial y} \{p(p'p) + q(p'q)\} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \{p'(p'p) + q'(p'q)\} \frac{\partial \Phi}{\partial z'} + \\
+ [xp'] \frac{\partial \Phi}{\partial p} + \{[px] + [qy]\} \frac{\partial \Phi}{\partial p'} + [yp'] \frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0 \text{ verallgemeinert.}
\end{gathered} \tag{29}$$

Es ist eben die Gleichung, welche wir im Abschnitt III des Teiles I durch die Verallgemeinerung der Jacobi'schen Integrationsmethode bekommen haben. Analog bekommen wir auch andere, im angeführten

Abschnitte erhaltene lineare Gleichungen, wenn das System (23) eine von anderen Ableitungen p', q, p[1]) nicht enthält.

Nachdem wir ein partielles Integral $\Phi_1 = C_1$ gefunden und auf Grund des gegebenen Systems $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ die Variable p' eliminiert haben, finden wir $p\,(x, y, z, z')$ und $q'\,(x, y, z, z')$ und gelangen mittelst einer Quadratur zur Relation

$$z = \varphi\,(x, y, z', C_1, C_2);$$

dann führt die Substitution des Gliedes für z in eine von den Gleichungen $F_1 = 0$; $F_2 = 0$ zur Integration der Gleichung 1. Ordnung mit einer unbekannten Funktion z'. Nachdem wir zwei Integrale $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2$ gefunden und die Ableitungen p, q, p' mit der Hilfe der Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, eliminiert haben, bekommen wir

$$\varphi\,(x, y, z, z', C_1, C_2) = 0.$$

Man könnte die Gleichung (29) und analoge andere Gleichungen auch auf einem anderen Wege bekommen, indem wir p, q, p', q' als Funktionen von 4 von einander unabhängigen Variablen x, y, z, z' betrachten. Dann bekommen wir mittelst der Differentiation in x, y, z, z' statt des Systemes (28):

$$\begin{aligned}
&X_i + P_i\frac{\partial p}{\partial x} + Q_i\frac{\partial q}{\partial x} + P_i'\frac{\partial p'}{\partial x} + Q_i'\frac{\partial q'}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial q'}\frac{\partial q'}{\partial x} = 0\\
&Y_i + P_i\frac{\partial p}{\partial y} + Q_i\frac{\partial q}{\partial y} + P_i'\frac{\partial p'}{\partial y} + Q_i'\frac{\partial q'}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial q'}\frac{\partial q'}{\partial y} = 0\\
&Z_i + P_i\frac{\partial p}{\partial z} + Q_i\frac{\partial q}{\partial z} + P_i'\frac{\partial p'}{\partial z} + Q_i'\frac{\partial q'}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial q'}\frac{\partial q'}{\partial z} = 0\\
&Z_i' + P_i\frac{\partial p}{\partial z'} + Q_i\frac{\partial q}{\partial z'} + P_i'\frac{\partial p'}{\partial z'} + Q_i'\frac{\partial q'}{\partial z'} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z'} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial q'}\frac{\partial q'}{\partial z'} = 0.
\end{aligned} \tag{30}$$

Ist $Q_1' = Q_2' = \dfrac{\partial \Phi}{\partial q'} = 0$, dann führt die Substitution der Ausdrücke für $\dfrac{\partial q}{\partial x}, \dots \dfrac{\partial p}{\partial z'}$, die vom System (30) gefunden wurden, in die erste von den Bedingungen (26) zur linearen Gleichung (29).

Man kann das System von linearen Gleichungen

$$a_i p + b_i q + a_i' p' + b_i' q' + c_i = 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{31}$$

wo $a_i, \dots c_i$ die Funktionen von x, y, z, z' sind, manchmal auf das System von linearen Gleichungen überführen, welche eine von den Ableitungen p, q, p', q' nicht ent-

[1]) Die Bezeichnungen x, y, z, z' statt x_1, x_2, z_1 z_2 habe ich in den Abschnitten III, IV des I. Teiles eingeführt, sowie auch entsprechende Gleichungen in § 81 Ch. X meines Buches „Équations différentielles, livre 2, Leningrad, 1934 aufgeschrieben.

halten, und auf eine in diesem Abschnitte dargestellte Weise integrieren. Zu diesem Zwecke führen wir neue Funktionen ζ und ζ' ein, welche mit den früheren durch die Transformationsformeln

$$z = f(x, y, \zeta, \zeta'); \quad z' = f'(x, y, \zeta, \zeta') \text{ gebunden sind.}$$

Dann ist: $$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\pi + \frac{\partial f}{\partial \zeta'}\pi'; \ldots q' = \frac{\partial f'}{\partial y} + \frac{\partial f'}{\partial \zeta}\varkappa + \frac{\partial f'}{\partial \zeta'}\varkappa',$$

wobei: $$\pi = \frac{\partial \zeta}{\partial x}; \ \varkappa = \frac{\partial \zeta}{\partial y}; \pi' = \frac{\partial \zeta'}{\partial x}; \ \varkappa' = \frac{\partial \zeta'}{\partial y}.$$

Dann bekommt die Gleichung (31) die Gestalt:

$$\left(a_i\frac{\partial f}{\partial \zeta} + a_i'\frac{\partial f'}{\partial \zeta}\right)\pi + \left(a_i\frac{\partial f}{\partial \zeta'} + a_i'\frac{\partial f'}{\partial \zeta'}\right)\pi' + \left(b_i\frac{\partial f}{\partial \zeta} + b_i'\frac{\partial f'}{\partial \zeta}\right)\varkappa +$$
$$+ \left(b_i\frac{\partial f}{\partial \zeta'} + b_i'\frac{\partial f'}{\partial \zeta'}\right)\varkappa' + a_i\frac{\partial f}{\partial x} + b_i\frac{\partial f}{\partial y} + a_i'\frac{\partial f'}{\partial x} + b_i'\frac{\partial f'}{\partial y} + c_i = 0.$$

Sollte die Gleichung z. B. die Ableitung $\varkappa'$ nicht enthalten, so muss

$$b_i\frac{\partial f}{\partial \zeta'} + b_i'\frac{\partial f'}{\partial \zeta'} = 0 \text{ sein,} \tag{32}$$

und das gibt

$$b_1' b_2 = b_2' b_1; \tag{33}$$

das führt zur algebraischen Relation, welche die Transformationsformeln f und f' mit einander verbindet:

$$\Omega\,[x, y, f(x, y, \zeta, \zeta'), f'(x, y, \zeta, \zeta')] = 0. \tag{34}$$

Eine Funktion f' drückt sich durch die andere f mittelst von (34) aus, und die zweite wird mittelst der Integration der homogenen Gleichung (32) mit einer unbekannten f gefunden.

Beispiel.

$$F_1 \equiv xq + xp' - z' = 0; \quad F_2 = xp + 2yq - z = 0.$$

Die Gleichung (29) hat die Gestalt:

$$x^2\frac{\partial \Phi}{\partial x} + 2xy\frac{\partial \Phi}{\partial y} + (x^2p + 2xyq)\frac{\partial \Phi}{\partial z} +$$
$$+ (x^2p' + 2xyq')\frac{\partial \Phi}{\partial z'} - xq\frac{\partial \Phi}{\partial q} + 2yq'\frac{\partial \Phi}{\partial p'} = 0.$$

Wir haben zwei partielle Integrale, die die Ableitung q' nicht enthalten:

$$\Phi_1 \equiv xq = C_1; \quad \Phi_2 \equiv \frac{z}{2x} + \frac{p}{2} = C_2.$$

Mit Hilfe der Gleichung $F_2 = 0$ finden wir $xz = C_1 y + C_2 x^2$, und die Gleichung $F_1 = 0$ gibt mit Hilfe von $\Phi_1 = C_1$, $z' = xp' + C_1$; dann bekommen wir das totale Integral:

$$xz = C_1 y + C_2 x^2; \; z' = C_1 + C_3 x + C_4 xy.$$

Man könnte die zweite gegebene Gleichung abgesondert integrieren und auf diese Weise dieses totale Integral bekommen.

XVIII. In früheren Abschnitten wurde die Verallgemeinerung der Jacobi'schen Integrationsmethode der nichtlinearen Gleichungen 1. Ordnung, der Darboux'schen Methode für die nichtlinearen Gleichungen 2. Ordnung, und zuletzt der Charpit-Lagrange'schen Methode für die nichtlinearen Gleichungen 1. Ordnung dargestellt. Wir gehen nun zur Integration der linearen Gleichungen 1. Ordnung über.

Die einzige Integrationsmethode solcher Gleichungen ist die Hamburger'sche Methode. Im Abschnitt I. des I. Teiles wurde das System der linearen Gleichungen 1. Ordnung mit einer unbekannten Funktion für den Fall, wenn gegebene Gleichungen homogen sind und wenn die Hamburger'schen Formeln nicht angewandt werden können, vorgeführt. Im Abschnitt I. des I. Teiles meiner Arbeit: „Die Grundformeln der Integrationsmethode..." Kyjiv, 1931 habe ich die algebraischen Bedingungen, die die Hamburger'schen Bedingungen für homogene Gleichungen vertraten, angeführt und eine Methode dargestellt zum Finden von partiellen und totalen Integralen für die in Jacobi'schen Determinanten linearen Gleichungen mit 2 und 3 Funktionen und einer beliebigen Zahl unabhängiger Variablen, wenn die algebraischen Hamburger'schen Bedingungen keinen Platz finden.

Die Hamburger'sche Methode beschränkt die gegebenen Gleichungen mittelst einer Reihe von algebraischen und differentiellen Bedingungen für die Koeffizienten, so wie auch die Gestalt des Integrales, welches die Form:

$$\varphi(u_1, u_2 \ldots u_m) = 0; \quad \psi(v_1, v_2, \ldots v_m) = 0; \ldots,$$

haben muss,

wo φ, ψ,... beliebige Funktionen von $u_1, \ldots u_m$; $v_1, \ldots v_m$, welche ausgerechnete Funktionen der abhängigen Variablen z_1, z_2,.. und unabhängigen x_1, $x_2, \ldots x_m$ sind, bedeuten. Die Hamburger'sche Methode gründet sich auf das Erlernen von Relationen zwischen den Gleichungskoeffizienten, welche bei der Differentiation der Gleichungen (34) in $x_1, \ldots x_m$ auftreten. Wir behandeln weiter eine Methode der Integration von linearen Gleichungen, für welche die Form des Integrales lediglich durch die Möglichkeit der Auflösung im Bezug auf die unbekannten Funktionen $z, z', \ldots$ beschränkt wird. Diese Methode erfordert dieselbe Zahl $(n-1)(m-2)$ der algebraischen Bedingungen für n unbekannte Funktionen der m Argumente, wie die Hamburger'sche Methode, doch sind jene Bedingungen andere als die Hamburger'schen und werden dann angewendet, wenn die Hamburger'sche Methode zur Integration untauglich ist Diese Methode erlaubt allgemeine totale und partielle Integrale aufzufinden, ist ebenso gültig für homogene, wie auch für nichthomogene Gleichungen, anders wie bei der Hamburger'schen Methode, welche für die homogenen Gleichungen versagt. Diese Methode ist auch dann gültig, wenn eine Gleichung solche Ableitungen, die in der anderen Gleichung vorkommen, nicht enthält d. h. auch für solche Gleichungen, für welche unmöglich ist, die charakteristische Hamburger'sche Gleichung zu bilden und seine Integrationsmethode zu gebrauchen. Diese Methode erheischt keine algebraischen Bedingungen für die Koëffizienten der Gleichungen mit n unbekannten Funktionen von nur zwei Argumenten wie in der Hamburger'schen Methode.

Für ein System von Gleichungen mit 2 Funktionen z, z' von 2 Argumenten x, y:

$$a_i p + b_i q + a_i' p' + b_i' q' + c_i = 0, \quad (i = 1, 2) \tag{35}$$

muss man das Integral in der Gestalt von endlichen Gleichungen

$$F_1(x, y, z, z') = 0; \quad F_2(x, y, z, z') = 0, \tag{36}$$

welche die unbekannten Funktionen $z(x, y)$ und $z'(x, y)$ bestimmen, finden. Wird eine von den Gleichungen (36) z. B. in z' aufgelöst, dann schreiben wir:

$$z' = \omega(x, y, z) \tag{37}$$

und die Einführung des Ausdruckes (37) in die Gleichung (36) gibt $f_1(x, y, z) = 0$ und $f_2(x, y, z) = 0$ zur Berechnung von $z = \varphi_1(x, y)$, $z' = \varphi_2(x, y)$. Nehmen wir an, dass die Funktion $\omega(x, y, z)$ bekannt ist, so bekommen wir:

$$p' = \omega_1 + \omega_3 p; \; q' = \omega_2 + \omega_3 q,$$

wo

$$\omega_1 = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \; \omega_2 = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \; \omega_3 = \frac{\partial \omega}{\partial z}.$$

Die Substitution in die gegebenen Gleichungen (35) gibt:

$$\begin{aligned} (a_1 + a'_1 \omega_3) p + (b_1 + b'_1 \omega_3) q + (a'_1 \omega_1 + b'_1 \omega_2 + c_1) &= 0 \\ (a_2 + a'_2 \omega_3) p + (b_2 + b'_2 \omega_3) q + (a'_2 \omega_1 + b'_2 \omega_2 + c_2) &= 0 \end{aligned} \tag{38}$$

Die Gleichungen (38) müssen äquivalent unter einander sein und sie bestimmen die Funktion $z(x, y)$ mit Hilfe der Integrierung einer linearen Gleichung mit einer unbekannten Funktion z. Wir bekommen:

$$\frac{a_1 + a'_1 \omega_3}{a_2 + a'_2 \omega_3} = \frac{b_1 + b'_1 \omega_3}{b_2 + b'_2 \omega_3} = \frac{a'_1 \omega_1 + b'_1 \omega_2 + c_1}{a'_2 \omega_1 + b'_2 \omega_2 + c_2}. \tag{39}$$

Indem wir die Bezeichungen

$$(a' b') = \begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 \\ a'_2 & b'_2 \end{vmatrix}; \quad (a' b) = \begin{vmatrix} a'_1 & b_1 \\ a'_2 & b_2 \end{vmatrix}; \ldots, \text{ einführen,}$$

bekommen wir aus der Gleichheit der ersten zwei Beziehungen (39):

$$(a' b')\left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)^2 + [(a' b) + (a b')]\frac{\partial \omega}{\partial z} + (a b) = 0, \tag{40}$$

und aus der Gleichheit der letzten und ersten Beziehung, oder der letzten und der zweiten:

$$(aa')\frac{\partial \omega}{\partial x} + [(a b') + (a' b') \alpha]\frac{\partial \omega}{\partial y} + [(a c) + (a' c) \alpha] = 0 \tag{41'}$$

$$[(ba') + (b'a')\alpha]\frac{\partial \omega}{\partial x} + \qquad (b b')\frac{\partial \omega}{\partial y} + [(b c) + (b' c) \alpha] = 0, \tag{41''}$$

wobei α eine von den Auflösungen der Gleichung (40):

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = \alpha(x, y, z, \omega) \text{ darstellt.} \tag{40'}$$

Ist das System der linearen Gleichung (40′) und einer der Gleichungen (41′), (41″) integrierbar, dann können wir die Funktion ω finden. Die Substitution der Ausdrücke ω, ω_1, ω_2, ω_3 in die Gleichung (38) führt zur linearen Gleichung 1. Ordnung von der Form:

$$A\frac{\partial z}{\partial x} + B\frac{\partial z}{\partial y} + C = 0$$

zur Bestimmung der Funktion $z(x, y)$.

Beispiel:

$$x q - q' = 0; \; (x y + 1) p - y p' + y z = 0.$$

Die Hamburger'sche Methode findet hier keine Anwendung. Die quadratische Gleichung (40) ist:

$$\left(x - \frac{\partial \omega}{\partial z}\right)\left(x y + 1 - y\frac{\partial \omega}{\partial z}\right) = 0.$$

Die erste Auflösung gibt mit den Gleichungen (41′), (41″):

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = x; \; \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0; \quad \omega = x z + \varphi(x),$$

wobei $\varphi(x)$ eine beliebige Funktion ist. Die Einführung der Funktion $z' = \omega(x, y, z)$ in die Gleichungen des gegebenen Systems gibt $\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{d\varphi}{dx} = 0$ und führt zum allgemeinen Integral des gegebenen Systems:

$$z = y\varphi(x) + \psi(y); \; z' = (x y + 1)\varphi(x) + x\psi(y),$$

wo $\psi(y)$ auch eine beliebige Funktion ist. Die zweite Auflösung gibt mit den Gleichungen (41′), (41″)

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = x + \frac{1}{y}; \ \frac{\partial \omega}{\partial x} = z; \ \ \omega = xz + \frac{z}{y} + \Psi(y)$$

und führt zu einer anderen Gestalt des allgemeinen Integrales:

$$z = y\,[\varphi(x) + \Psi(y)]; \ z' = (xy + 1)\,\varphi(x) - xy\,\Psi(y),$$

welches in die erste Gestalt übergeht, wenn wir die beliebige Funktion des y mittelst der Formel

$$\psi(y) = -y\,\Psi(y) \text{ bestimmen.}$$

Für das System der Gleichungen mit zwei Funktionen z, z' der 3 unabhängigen Variablen x_1, x_2, x_3,

$$a_{1i}\,p_1 + a_{2i}\,p_2 + a_{3i}\,p_3 + a'_{1i}\,p'_1 + a'_{2i}\,p'_2 + a'_{3i}\,p'_3 + b_i = 0, \qquad (i=1,2)$$

bei der Bezeichnung

$$\omega_k = \frac{\partial \omega}{\partial x_k}, \ \ \omega_4 = \frac{\partial \omega}{\partial z} \qquad (k=1, 2, 3),$$

bekommen wir analog

$$\frac{a_{11} + a'_{11}\,\omega_4}{a_{12} + a'_{12}\,\omega_4} = \frac{a_{21} + a'_{21}\,\omega_4}{a_{22} + a'_{22}\,\omega_4} = \frac{a_{31} + a'_{31}\,\omega_4}{a_{32} + a'_{32}\,\omega_4} = \\ = \frac{a'_{11}\,\omega_1 + a'_{21}\,\omega_1 + a'_{31}\,\omega_3 + b_1}{a'_{12}\,\omega_1 + a'_{22}\,\omega_2 + a'_{32}\,\omega_3 + b_2} \tag{42}$$

Auf Grund von Bezeichnungen

$$(a'_1\, a'_2) = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{21} \\ a'_{12} & a'_{22} \end{vmatrix}; \ (a_1\, a'_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{21} \\ a_{12} & a'_{22} \end{vmatrix}; \ldots,$$

bekommen wir aus ersten zwei Beziehungen (42):

$$(a'_1\, a'_2)\,\omega_4^{\,2} + [(a_1\, a'_2) + (a'_1\, a_2)]\,\omega_4 + (a_1\, a_2) = 0$$
$$(a'_1\, a'_3)\,\omega_4^{\,2} + [(a_1\, a'_3) + (a'_1\, a_3)]\,\omega_4 + (a_1\, a_3) = 0,$$

und das führt zur algebraischen Bedingung für die Koëffizienten

$$\begin{vmatrix} (a'_1\, a'_2), & (a_1\, a'_2) + (a'_1 a_2), & (a_1\, a_2), & 0 \\ 0\ , & (a'_1\, a'_2), & (a_1\, a'_2), + (a'_1 a_2), & (a_1\, a_2) \\ (a'_1\, a'_3), & (a_1\, a'_3) + (a'_1 a_3), & (a_1\, a_3), & 0 \\ 0 & (a'_1\, a'_3), & (a_1\, a'_3) + (a'_1\, a_3), & (a_1\, a_3) \end{vmatrix} = 0 \tag{43}$$

und zur ersten linearen Gleichung zur Bestimmung der Funktion $\omega\,(x_1, x_2, x_3, z)$

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = \alpha\,(x_1, x_2, x_3, z, \omega), \tag{44}$$

wo:

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} (a_1 a_2), & (a'_1 a'_2) \\ (a_1 a_3), & (a'_1 a'_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a'_1 a'_2), & (a_1 a'_2) + (a'_1 a_2) \\ (a'_1 a'_3), & (a_1 a'_3) + (a'_1 a_3) \end{vmatrix}}.$$

Die Gleichheit der letzten Beziehung (42) mit einer vorangehenden führt zur zweiten linearen Gleichung zur Bestimmung der Funktion ω:

$$(a_1 a'_1)\frac{\partial\omega}{\partial x_1} + [(a_1 a'_2) + a'_1 a'_2)\,\alpha]\frac{\partial\omega}{\partial x_2} + \tag{45'}$$

$$+ [(a_1 a'_3) + (a'_1 a'_3)\,\alpha]\frac{\partial\omega}{\partial x_3} + (a_1 b) + (a'_1 b)\,\alpha = 0$$

$$[(a_2 a'_1) + (a'_2 a'_1)\,\alpha]\frac{\partial\omega}{\partial x_1} + (a_2 a'_2)\frac{\partial\omega}{\partial x_2} + \tag{45''}$$

$$+ [(a_2 a'_3) + (a'_2 a'_3)\,\alpha]\frac{\partial\omega}{\partial x_3} + (a_2 b) + (a'_2 b)\,\alpha = 0$$

$$[(a_3 a'_1) + (a'_3 a'_1)\,\alpha]\frac{\partial\omega}{\partial x_1} + [(a_3 a'_2) + (a'_3 a'_2)\,\alpha]\frac{\partial\omega}{\partial x_2} + \tag{45'''}$$

$$+ (a_3 a'_3)\frac{\partial\omega}{\partial x_3} + (a_3 b) + (a'_3 b)\,\alpha = 0.$$

Auf Grund der Bestimmung der Funktion ω aus der Gleichung (44) und einer von den Gleichungen (45'), (45''), (45'''), kommen wir nach der Durchführung der Substitution $z = \omega$ in eine beliebige von den gegebenen Gleichungen zur Integration der Gleichung von der Form

$$A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial z}{\partial x_3} + A = 0$$

zwecks Bestimmung der Funktion $z\ (x_1, x_2, x_3)$.

Beispiel:

$$\left.\begin{aligned} x_1 x_2 p_1 + x_2 x_3 p_3 - x_1 p'_1 - x_1 x_2 p'_3 = 0 \\ x_2 (x_3 - x_1 x_2) p_1 - (x_3 - x_1 x_2) p'_1 + x_2 (x_2 z - z') = 0 \end{aligned}\right\}$$

Die erste der quadratischen Gleichungen für ω_4 wird identisch erfüllt; es gibt also auch die algebraische Bedingung für die Koëffizienten. Die zweite Gleichung wird:

$$x_1 \omega_4^2 - (x_1 x_2 + x_3)\,\omega_4 + x_2 x_3 = 0.$$

Für die Lösung $\omega_4 = x_2$ aus den Gleichungen (45') — (45'''), von welchen die ersten zwei identisch erfüllt werden, haben wir:

$$\frac{\partial\omega}{\partial z} = x_2\,; \quad (x_1 x_2 - x_3)\frac{\partial\omega}{\partial x_1} = x_2\,(\omega - x_2 z)$$

$$\omega = x_2 z + (x_3 - x_1 x_2)\,\varphi(x_2, x_3),$$

wo φ eine beliebige Funktion ist. Das Einführen von $z' = \omega$ in die erste gegebene Gleichung gibt

$$\frac{\partial z}{\partial x_3} = x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3},$$

und — indem wir mit ψ die zweite beliebige Funktion bezeichnen — bekommen wir das allgemeine Integral:

$$z = x_1\,\varphi(x_2, x_3) + \psi(x_1, x_2);\; z' = x_2\,\psi(x_1, x_2) + x_3\,\varphi(x_2, x_3).$$

Für das System von zwei unbekannten Funktionen mit m Argumenten

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i1} p_i + \sum_{i=1}^{m} a'_{i1} p'_i + b_1 = 0;\; \sum_{i=1}^{m} a_{i2} p_i + \sum_{i=1}^{m} a'_{i2} p'_i + b_2 = 0,$$

bekommen wir nach der Elimination von ω_{m+1} aus $m-1$ quadratischen Gleichheiten $m-2$ algebraische Bedingungen für die Koëffizienten:

$$(a_1 a_j)\begin{vmatrix}(a'_1 a'_2), & (a_1 a'_2) + (a'_1 a_2)\\ (a'_1 a'_j), & (a_1 a'_j) + (a'_1 a_j)\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}(a_1 a_2), & (a'_1 a'_2)\\ (a_1 a_j), & (a'_1 a'_j)\end{vmatrix}^2 (a'_1 a'_j) +$$

$$+ \begin{vmatrix}(a'_1 a'_2), & (a_1 a'_2) + (a'_1 a_2)\\ (a'_1 a'_j), & (a_1 a'_j) + (a'_1 a_j)\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}(a_1 a_2), & (a'_1 a'_2)\\ (a_1 a_j), & (a'_1 a'_j)\end{vmatrix} [(a_1 a'_j) + (a'_1 a_j)] = 0,$$

$$(j = 3, 4, \ldots m)$$

so wie auch ein System von zwei linearen Gleichungen 1. Ordnung für die Bestimmung der Funktion ω:

$$\begin{vmatrix}(a'_1 a'_2), & (a_1 a'_2) + (a'_1 a_2)\\ (a'_1 a'_k), & (a_1 a'_k) + (a'_1 a_k)\end{vmatrix} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} = \begin{vmatrix}(a_1 a_2), & (a'_1 a'_2)\\ (a_1 a_k), & (a'_1 a'_k)\end{vmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \left\{ (a_1 a'_i) \begin{vmatrix}(a'_1 a'_2), & (a_1 a'_2) + (a'_1 a_2)\\ (a'_1 a'_k), & (a_1 a'_k) + (a'_1 a_k)\end{vmatrix} + (a'_1 a'_i \begin{vmatrix}(a_1 a_2), & (a'_1 a'_2)\\ (a_1 a_k), & (a'_1 a'_k)\end{vmatrix} \right\} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} +$$

$$+ (a_1 l) \begin{vmatrix}(a'_1 a'_2), & (a_1 a'_2) + (a'_1 a_2)\\ (a'_1 a'_k), & (a_1 a'_k) + (a'_1 a_k)\end{vmatrix} + (a'_1 b) \begin{vmatrix}(a_1 a_2), & (a'_1 a'_2)\\ (a_1 a_k), & (a'_1 a'_k)\end{vmatrix} = 0,$$

wo k eine von den Zahlen $j = 3, 4, \ldots m$ bedeutet. Die Funktion $z(x_1, \ldots x_m)$ finden wir durch das Integrieren der linearen Gleichung 1. Ordnung, indem wir die gefundene Funktion $z' = \omega$ in eine von gegebenen Gleichungen einsetzen.

Das System von n Gleichungen mit n unbekannten Funktionen $z_1, \ldots z_n$ der m unabhängigen $x_1, \ldots x_m$ reduziert sich zum System von $n - 1$ linearen Gleichungen mit $n - 1$ unbekannten Funktionen $z_1, \ldots z_{n-1}$ der m unabhängigen, falls entsprechende $m - 2$ Bedingungen für die Koëffizienten erfüllt werden. Wir gehen nun zum System $n - 2$

unbekannten Funktionen $z_1, \dots z_{n-2}$ bei neuen $m-2$ Bedingungen für die Koëffizienten über und haben im allen

$$(n-1)(m-2)$$

Bedingungen für die Koëffizienten, um zur Integration einer linearen Gleichung mit einer unbekannten Funktion z_1 zu gelangen. Die Integrationsmethode erfordert keine algebraischen Bedingungen im Falle von n Funktionen und 2 unabhängigen Variablen x, y.

Es genügt die Detailformeln für das System von 3 Gleichungen mit 3 Funktionen z, z', z'' der zwei Argumente x, y:

$$a_i p + b_i q + a_i' p' + b_i' q' + a_i'' p'' + b_i'' q'' + c_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

anzuführen.

Hätten wir eine von den notwendigen Gleichungen des totalen oder allgemeinen Integrals $F_i(x, y, z, z', z'') = 0$ z. B. auf Bezug von z'' aufgelöst, so dass

$$z'' = \omega\ (x, y, z, z'),$$

dann hätten wir

$$p'' = \omega_1 + \omega_3 p + \omega_4 p'; \ q'' = \omega_2 + \omega_3 q + \omega_4 q',$$

wobei:

$$\omega_1 = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \ \omega_2 = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \ \omega_3 = \frac{\partial \omega}{\partial z}, \ \omega_4 = \frac{\partial \omega}{\partial z'}.$$

Das Einsetzen der Funktion ω und der Ableitungen p'', q'' in das gegebene System führt dann zu den linearen Gleichungen mit zwei unbekannten Funktionen z, z':

$$(a_i + a_i'' \omega_3)\ p + (b_i + b_i'' \omega_3)\ q + (a_i' + a_i'' \omega_4)\ p' +$$
$$+ (b_i' + b_i'' \omega_4)\ q' + a_i'' \omega_1 + b_i'' \omega_2 + c_i = 0.$$

Eine von diesen Gleichungen muss aus zwei anderen Gleichungen folgen, und das führt zur Nullgleichheit aller Determinanten 3. Ordnung der Matrix:

$$\left\| \begin{matrix} a'_1 + a''_1 \omega_4, & b'_1 + b''_1 \omega_4, & a_1 + a''_1 \omega_3, & b_1 + b''_1 \omega_3, & a''_1 \omega_1 + b''_1 \omega_2 + c_1 \\ a'_2 + a''_2 \omega_4, & b'_2 + b''_2 \omega_4, & a_2 + a''_2 \omega_3, & b_2 + b''_2 \omega_3, & a''_2 \omega_1 + b_2'' \omega_2 + c_2 \\ a'_3 + a''_3 \omega_4, & b'_3 + b''_3 \omega_4, & a_3 + a''_3 \omega_3, & b_3 + b''_3 \omega_3, & a''_3 \omega_1 + b''_3 \omega_2 + c_3 \end{matrix} \right\|.$$

Für die Nullgleichheit aller Determinanten 3. Ordnung ist es notwendig und genügend, dass nur 3 Determinanten, der Unterdeterminante 2. Ordnung zugeschrieben, null seien. Z. B wir bekommen aus den Elementen der ersten zwei Vertikalreiben — bei der Bezeichnung:

$$(a' b' a) = \begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 & a_1 \\ a'_2 & b'_2 & a_2 \\ a'_3 & b'_3 & a_3 \end{vmatrix}; \ (a' b'' a) = \begin{vmatrix} a'_1 & b''_1 & a_1 \\ a'_2 & b''_2 & a_2 \\ a'_3 & b''_3 & a_3 \end{vmatrix}; \dots, \ -$$

zuerst

$$(a'b'a) + [(a'b''a) + (a''b'a)]\,\omega_4 + (a''b''a)\,\omega^2_4 + [(a'b'a'') + (a'b''a'')\,\omega_4]\,\omega_3 = 0$$

$$(a'b'b) + [(a'b''b) + (a''b'b)]\,\omega_4 + (a''b''b)\,\omega^2_4 + [(a'b'b'') + (b'b''a'')\,\omega_4]\,\omega_3 = 0,$$

was eine Gleichung 3. Grades für ω_4:

$$\begin{vmatrix} (a''b''a), & (a''b''b) \\ (a''b''a'), & (a''b''b') \end{vmatrix}\omega^3_4 + \tag{46}$$
$$+\left\{\begin{vmatrix} (a''b''a), & (a''b''b) \\ (a'a''b'), & (a'b''b') \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (a'b''a) + (a''b'a), & (a''b''a') \\ (a'b''b) + (a''b'b), & (a''b''b') \end{vmatrix}\right\}\omega^2_4 +$$
$$+\left\{\begin{vmatrix} (a'b'a), & (a'b'b) \\ (a''b''a'), & (a''b''b') \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (a'b''a) + (a''b'a), & (a'a''b') \\ (a'b''b) + (a''b'b), & (a'b''b') \end{vmatrix}\right\}\omega_4 +$$
$$+\begin{vmatrix} (a'b'a), & (a'b'b) \\ (a'a''b'), & (a'b''b') \end{vmatrix} = 0,$$

und eine lineare Gleichung 1. Ordnung

$$[(a'b'a'') + (a'b''a'')\,\alpha]\frac{\partial\omega}{\partial z} + (a'b'a) + [(a'b''a) + (a''b'a)]\,\alpha + (a''b''a)\,\alpha^2 = 0 \tag{47}$$

gibt, wo α eine Lösung der kubischen Gleichung (46):

$$\frac{\partial\omega}{\partial z'} = \alpha\,(x, y, z, z', \omega) \text{ ist,} \tag{48}$$

und zweitens wir bekommen noch eine folgende lineare Gleichung zur Bestimmung der Funktion ω:

$$[(a'b'a'') + (a'b''a'')\,\alpha]\frac{\partial\omega}{\partial x} + [(a'b'b'') + (b'b''a'')\,\alpha]\frac{\partial\omega}{\partial y} + (a'b'c) + [(a'b''c) + (a''b'c)]\,\alpha + (a''b''c)\,\alpha^2 = 0. \tag{49}$$

Ist für eine von den Lösungen der Gleichung (46) das System von 3 linearen Gleichungen (47), (48), (49) integrierbar, dann führt das Einsetzen der gefundenen Funktion ω in das gegebene System zur Integration von zwei linearen Gleichungen mit zwei unbekannten Funktionen z, z', von der Form:

$$A_i p + B_i q + A'_i p' + B'_i q' + C_i = 0. \quad (i = 1, 2) \tag{50}$$

B e i s p i e l:

$$-yp' + yq' + p'' - q'' + z' = 0;\; 2xzp - (1+y)p' + p'' + z^2 = 0;$$
$$(2xz + 3z^2)\,q - 2yp' - q' + 2p'' = 0.$$

Die kubische Gleichung (46) wird dann:

$$2\,\omega^3_4 - 3\,(2y+1)\,\omega^2_4 + (6y^2 + 6y + 1)\,\omega_4 - y\,(2y^2 + 3y + 1) = 0.$$

Für die Auflösung $\alpha = y$ haben wir lineare Gleichungen (47), (48), (49):

$$\frac{\partial\omega}{\partial z} = 0\,;\ \frac{\partial\omega}{\partial z'} = y\,;\ \frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{\partial\omega}{\partial y} + z' = 0$$

und finden $\omega = yz + \chi(x+y)$, wo χ eine beliebige Funktion von $u = x + y$ ist. Das Einsetzen der Ausdrücke für z'', p'', q'' in das gegebene System gibt zwei lineare Gleichungen (50) mit 2 unbekannten Funktionen z, z':

$$2xzp - p' + z^2 + \frac{d\chi}{du} = 0\,;\ \ (2xz + 3z^2)\,q - q' + 2\,\frac{d\chi}{du} = 0.$$

Indem wir $z' = \Omega\,(x, y, z)$ bezeichnen, bekommen wir quadratische Gleichung (40):

$$\Omega^2_3 - z\,(4x + 3z)\,\Omega_3 + 2xz^2\,(2x + 3z) = 0.$$

Für die Auflösung $\alpha = 2xz$ geben die Gleichungen (40') und (41'), (41'')

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z} = 2\,xz;\ \frac{\partial\Omega}{\partial x} = z^2 + \frac{d\chi}{du}\,;\ \ \Omega = xz^2 + \chi\,(x+y) + \psi\,(y),$$

wo ψ eine neue beliebige Funktion ist. Das Einsetzen der Ausdrücke z', p', q' in das System (50) gibt eine lineare Gleichung zum Bestimmen der Funktion z u. z. $3\,z^2\,\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{d\psi}{dy} - \frac{d\chi}{du}$, und wir bekommen

$$z^3 = \varphi\,(x) + \psi\,(y) - \chi\,(x+y)\,;\ \ z' = x\,z^2 + \psi\,(y) + \chi\,(x+y)\,;$$
$$z'' = xyz^2 + y\,\psi\,(y) + (1 + y)\,\chi\,(x+y),$$

wo φ die dritte beliebige Funktion ist.

Leningrad, 2. X. 1935.

Nachtrag.

Die Integrationsmethode der linearen Gleichungen, wie sie im letzten Abschnitte dargestellt wurde, bleibt richtig auch für die in Jacobi'schen Determinanten linearen Gleichungen; die Koëffizienten der algebraischen und Differential-hilfsgleichungen werden lediglich mit neuen Koëffizienten, die leicht zu bestimmen sind, vertauscht.

Der Verfasser hat heuer in „Comptes Rendus de l'Academie des Sc. de l'URSS" eine zweite Methode der Integrierung der in Jacobi'schen Determinanten linearen Gleichungen entwickelt, wobei es nicht nötig ist, ein System der linearen Hilfsgleichungen mit einer unbekannten Funktion zu integrieren, sondern es genüge eine spezielle lineare Gleichung 1. Ordnung mit einer Funktion zu integrieren. Folgend, man kann der Reihe nach jede von n Gleichungen des gegebenen Systems mit den n unbekannten Funktionen $z_1 .. z_n$ integrieren. Zuletzt es ist nicht nötig die algebraischen Hilfsgleichungen n. Grades bei n unbekannten Funktionen, wie in der letzten Methode und auch in der Methode von Hamburger, aufzulösen.

Um die Gleichung:

$$Ap + Bq + C + A'p' + B'q' + D(pq' - qp') = 0, \tag{I}$$

welche bei der Bedingung $AB' - BA' = CD$ ein allgemeines Integral von der Form

$$u_1(x, y, z, z') = \varphi\,[u_2(x. y, z, z')] \tag{II}$$

wo φ eine beliebige Funktion ist, besitzt, zu integrieren, führen wir die Bezeichnungen

$$\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(x, y)} = (xy),\ \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(x, z)} = (xz), \ldots\ \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(z, z')} = (zz')$$

ein. Dann bekommt man durch die Differentiation der Gleichheiten

$$u_1(x, y, z, z') = c_1, \quad u_2(x, y, z, z') = c_2$$

$$(zz')p + (xz') = 0, \quad (zz')q + (yz') = 0, \ldots \quad (zz')(pq' - qp') - (xy) = 0$$

und statt (I) die Gleichung:

$$(xz')A + (yz')B - (zz')C + (zx)A' + (zy)B' - (xy)D = 0. \tag{III}$$

Andererseits bekommen wir durch die Elimination dz' aus den totalen Differentialen

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}dx + \frac{\partial u_i}{\partial y}dy + \frac{\partial u_i}{\partial z}dz + \frac{\partial u_i}{\partial z'}dz' = 0 \quad (i = 1, 2)$$

$$(xz')dx + (yz')dy + (zz')dz = 0. \tag{IV}$$

Wenn wir also eine solche Funktion $u_1(x, y, z, z')$ finden, dass:

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{dz}{-C}$$

ist, dann ist für jede Funktion $u_2(x, y, z, z')$ die Gleichheit (IV) der Gleichheit:

$$(xz')\,A + (yz')\,B - (zz')\,C = 0$$

äquivalent und statt (III) bekommt man:

$$(zx)\,A' + (zy)\,B' - (xy)\,D = 0.$$

Wenn wir also die Funktion u_1 als ein partielles Integral einer folgenden linearen Gleichung 1. Ordnung mit einer ubekannten Funktion

$$A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y} - C\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \tag{V}$$

bestimmen, so bekommen wir u_2 als ein partielles Integral der linearen Gleichung mit einer Funktion:

$$(A'u_{13} + Du_{12})\frac{\partial u}{\partial x} + (B'u_{13} - Du_{11})\frac{\partial u}{\partial y} - (A'u_{11} + B'u_{12})\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \tag{VI}$$

wobei:

$$u_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x},\ u_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial y},\ u_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial z} \text{ bedeuten.}$$

Die Variable z' wird in den Gleichungen (V) und (VI) parametrisch.

Man könnte auch u'_1 aus einer analogen Gleichung (V) bestimmen, wobei A und B mit A', B' vertauscht werden, und z in der Ableitung bei C in z' übergeht; dann wird Glg. (VI) zur Bestimmung von u'_2 entsprechend umgearbeitet.

Für die Gleichung mit zwei Funktionen z, z' von drei Argumenten x_1, x_2, x_3:

$$\begin{aligned} A_1p_1 + A_2p_2 + A_3p_3 + C + A'_1p'_1 + A'_2p'_2 + A'_3p'_3 + \\ + D_1(p_2p'_3 - p_3p'_2) + D_2(p_3p'_1 - p_1p'_3) + D_3(p_1p'_2 - p_2p'_1) = 0 \end{aligned} \tag{VII}$$

geht die Gleichung (V), wenn wir das allgemeine Integral von der Form:

$$u_1(x_1, x_2, x_3, z, z') = \varphi[u_2(x_1, \ldots z');\ u_3(x_1, \ldots z')]$$

suchen, in die Gleichung:

$$A_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + A_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + A_3\frac{\partial f}{\partial x_3} - C\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \tag{VIII}$$

über, und wir bekommen statt (VI):

$$\begin{aligned} (A'_1u_{14} - D_2u_{13} + D_3u_{12})\frac{\partial u}{\partial x_1} + (A'_2u_{14} - D_3u_{11} + D_1u_{13})\frac{\partial u}{\partial x_2} + \\ + (A'_3u_{14} - D_1u_{12} + D_2u_{11})\frac{\partial u}{\partial x_3} - A'_1u_{11} + A'_2u_{12} + A'_3u_{13})\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \end{aligned} \tag{IX}$$

wobei

$$u_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \ldots\ u_{14} = \frac{\partial u_1}{\partial z} \text{ bedeuten.}$$

Analog schreibt man lineare Hilfsgleichungen für zwei unbekannte Funktionen mit beliebigen Argumenten $x_1 \dots x_m$.

Für 3 unbekannte Funktionen $z\, z'\, z''$ — für z. B. zwei Argumente x, y — wenn wir

$$u_k\,(x\,y\,z\,z'\,z'') = c_k \qquad (k = 1, 2, 3)$$

betrachten und die Jacobi'schen Determinanten 3. Ordnung einführen, geht die Gleichung:

$$Ap + Bq + C + A'p' + B'q' + A''p'' + B''q'' + \\ + D_1\,(p'q'' - p''q') + D_2\,(p''q - pq'') + D_3\,(pq' - p'q) = 0$$

in die Gleichung:

$$(xz'z'')\,A + (yz'z'')\,B + (zxz'')\,A' + (zyz')\,B' + (zz'x)\,A'' + \\ + (zz'y)\,B'' - (zz'z'')\,C - (zxy)\,D_1 - (yz'x)\,D_2 - (xyz'')\,D_3 = 0$$

über.

Drei totale Differentiale $du_1 = 0$, $du_2 = 0$, $du_3 = 0$ führen zur Bestimmung eines partiellen Integrals u_1 der Gleichung von der Form (V) mit den Parametern $z'\, z''$, so wie auch zur Bestimmung eines partiellen Integrals v_1 einer in den Jacobi'schen Determinanten linearen Gleichung mit zwei unbekannten Funktionen $u_2\, u_3$ der Argumente x, y, z, z', z''. Analog werden die Gleichungen mit 3 Funktionen der $3, \dots m$ Argumente integriert u. s. w.

Spezielle Fälle: 1) Sind die Koëffizienten D gleich Null, dann hat man den Fall der Integration der linearen Gleichungen 1. Ordnung einer unbekannten Funktion z.

Beispiele. Für das im letzten Abschnitt untersuchte System

$$xq - q' = 0, \quad (xy + 1)\,p - yp' + yz = 0,$$

wenn man die Hamburger'sche Methode nicht antwenden kann, gibt die Glg. (V) $u_1 = z' - xz$, und die Glg. (VI) $u_2 = x$ und wir bekommen:

$$z' - xz = \varphi\,(x).$$

Die zweite Gleichung führt zu den Integralen

$$u_3 = (xy + 1)\,z - yz', \quad u_4 = y$$

und gibt die zweite Abhängigkeit des allgemeinen Integrals des Systemes:

$$(xy + 1)\,z - yz' = \psi\,(y).$$

Für das zweite Beispiel:

$$-x_1 x_2 p_2 + x_1 x_3 p_3 + x_2 z p'_2 - x_3 z p'_3 + x_1 x_2\,(p_1 p'_2 - p_2 p'_1) + \\ + x_1 x_3\,(p_3 p'_1 - p_1 p'_3) = 0$$

gibt die Gleichung (VIII): $u_1 = x_1 + z'$, und die Glg. (IX) $u_2 = x_2 x_3$. Ausserdem gibt noch die Glg. (VIII) $u_2 = x_2 x_3$, $u_3 = x_1 z$; diese Integrale genügen der Glg. (IX). Das allgemeine Integral ist:

$$x_1 z = \varphi\,(x_1 + z'\,;\; x_2 x_3).$$

Leningrad, am 25. März 1937.