ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ДЕЯКИХ ОПЕРАТОРІВ УЗАГАЛЬНЕНОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ В ПРОСТОРАХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

©2009 р. *Тарас ЗВОЗДЕЦЬКИЙ*

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
вул. Коцюбинського, 2, Чернівці, 58012

Редакція отримала статтю 30 листопада 2009 р.

Отримано необхідні й достатні умови еквівалентності деяких операторів узагальненого диференціювання першого порядку в просторах функцій, аналітичних у кругових областях.

1. Нехай $\mathcal{A}_R$ – це простір усіх аналітичних у крузі $|z| < R$ функцій, що наділений топологією компактної збіжності $(0 < R \leq +\infty)$. Для послідовності відмінних від нуля комплексних чисел $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$ через $\mathcal{D}_\alpha$ позначимо оператор узагальненого диференціювання, який на довільну функцію $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k\, z^k \in \mathcal{A}_R$ діє за правилом

$$(\mathcal{D}_\alpha f)(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\, z^{k-1}.$$

Якщо $\alpha_k = \frac{1}{k!}$, $k \in \{0, 1, 2, ...\}$, то відповідний оператор $\mathcal{D}_\alpha$ збігається з оператором звичайного диференціювання $\mathcal{D}$ в $\mathcal{A}_R$.

Нагадаємо, що два лінійні неперервні оператори A та B, які діють в $\mathcal{A}_R$, називаються еквівалентними, якщо існує такий ізоморфізм T простору $\mathcal{A}_R$ на себе, для якого

$$T\,A = B\,T.$$

При цьому оператор T називають оператором перетворення A в B.

Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$ та функцію $a(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\, z^k \in \mathcal{A}_R$. Позначимо через E тотожний оператор в $\mathcal{A}_R$ і розглянемо в $\mathcal{A}_R$ оператори

УДК 517.983, MSC 2000: 47B38

$$\tilde{A} = z^n\mathcal{D} + a(z)E, \quad A = z^n\mathcal{D} + \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k\, z^k\right) E \quad \text{та} \quad B = z^n\mathcal{D}.$$

У роботі [1] досліджувались умови еквівалентності в $\mathcal{A}_R$ операторів $\tilde{A}$ та B. Як було зазначено в [1], оператори $\tilde{A}$ та A завжди еквівалентні в $\mathcal{A}_R$, адже в цьому випадку за оператор перетворення $\tilde{A}$ в A можна взяти, наприклад, ізоморфізм T, який на довільну функцію $f \in \mathcal{A}_R$ діє за правилом

$$(Tf)(z) = f(z) \exp\left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k\, \frac{z^{k-n+1}}{k-n+1}\right).$$

Тому задача зводилася до встановлення умов еквівалентності операторів A та B. А саме, в [1] доведено, що оператори A та B (а тому й оператори $\tilde{A}$ та B) еквівалентні в $\mathcal{A}_R$ тоді й лише тоді, коли

$$a_0 = 0 \quad \text{при} \quad n = 1$$

або

$$a_0 = a_1 = ... = a_{n-2} = 0 \text{ і } a_{n-1} = -m \ (m \in \{0, 1, ..., n-2\}) \text{ при } n \geq 2.$$

Аналогічна задача про еквівалентність операторів $\tilde{A}$ та B у просторах функцій, аналітичних у $\frac{2\pi}{n}$-інваріантних областях, розв'язана в [2]. Відзначимо, що в [2] отримані такі ж необхідні й достатні умови еквівалентності операторів $\tilde{A}$ та B, що і в [1].

У даній роботі, використовуючи міркування, подібні до запропонованих в [1], досліджується задача про еквівалентність у просторі $\mathcal{A}_R$ операторів виду A та B із оператором $\mathcal{D}_\alpha$ замість оператора $\mathcal{D}$. Спочатку розглядається випадок $n = 1$, а потім – випадок $n \geq 2$.

2. Вважатимемо надалі, що послідовність $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$ задовольняє умову

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\left|\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\right|} \leq 1 \quad \text{при} \quad 0 < R < +\infty$$

або

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\left|\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\right|} < \infty \quad \text{при} \quad R = +\infty,$$

яка забезпечує неперервність в $\mathcal{A}_R$ оператора $\mathcal{D}_\alpha$.

Зафіксуємо сталу $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ і розглянемо в $\mathcal{A}_R$ оператори

$$A = z\mathcal{D}_\alpha + aE \quad \text{та} \quad B = z\mathcal{D}_\alpha.$$

Припустимо, що оператори A та B еквівалентні в $\mathcal{A}_R$. Оскільки функція $f_0(z) \equiv 1$ є нетривіальним нулем оператора B в $\mathcal{A}_R$, то й оператор

A має в $\mathcal{A}_R$ нетривіальний нуль, тобто існує така функція $\varphi(z) \not\equiv 0$ із $\mathcal{A}_R$, що

$$z\,(\mathcal{D}_\alpha\varphi)(z) + a\,\varphi(z) = 0, \quad |z| < R. \tag{1}$$

Лема 1. *Якщо $a \neq 0$ і функція $\varphi(z) \not\equiv 0$ із $\mathcal{A}_R$ є розв'язком рівняння (1), то*

$$\exists\, m \in \mathbb{N}: \quad a = -\frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m}.$$

Доведення. Нехай $\varphi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varphi_k\, z^k$. Тоді з (1) отримаємо, що

$$a\,\varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \left(\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} + a \right) z^k = 0, \quad |z| < R.$$

Оскільки $a \neq 0$ і не всі φ_k рівні нулеві, то звідси одержуємо, що існує таке $m \in \mathbb{N}$, для якого $\varphi_m \neq 0$, а тому $a = -\frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m}$. □

Отже, якщо оператори A та B еквівалентні в $\mathcal{A}_R$, то існує таке $m \in \mathbb{N}$, що $a = -\frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m}$, тобто

$$A = z\mathcal{D}_\alpha - \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m}\, E.$$

Нехай T – ізоморфізм простору $\mathcal{A}_R$ на себе, для якого $TA = BT$. Якщо подіяти обома частинами останньої рівності на функцію $f_0(z) \equiv 1$, то одержимо, що функція $\psi = Tf_0$ задовольняє рівняння

$$z(\mathcal{D}_\alpha\psi)(z) + \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m}\,\psi(z) = 0, \quad |z| < R.$$

Припустимо, що послідовність $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$ задовольняє умову

$$\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} + \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m} \neq 0, \quad k, m \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Тоді з леми 1 випливає, що $\psi(z) \equiv 0$. Отримали суперечність, бо $\psi = Tf_0$, а T – ізоморфізм і тому він не має нетривіальних нулів у $\mathcal{A}_R$.

Таким чином, встановлена наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай послідовність $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$ задовольняє умову (2). Оператори $A = z\mathcal{D}_\alpha + aE$, де $a \in \mathbb{C}$, та $B = z\mathcal{D}_\alpha$ еквівалентні в $\mathcal{A}_R$ тоді й лише тоді, коли $a = 0$.*

Зауваження. Якщо послідовність $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$ умову (2) не задовольняє, то твердження теореми 1 може бути як правильним, так і неправильним. Наведемо відповідні приклади.

Приклад 1. Нехай

$$\alpha_k = (-1)^{\frac{(k-1)k}{2}}, \quad k \in \{0, 1, 2, ...\}.$$

Тоді $\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} = (-1)^{k-1}$, а тому

$$\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} + \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отже, умова (2) у цьому випадку не виконується, але оператори $A = z\mathcal{D}_\alpha + aE$, де $a \in \mathbb{C}$, та $B = z\mathcal{D}_\alpha$ еквівалентні в $\mathcal{A}_R$ тоді й лише тоді, коли $a = 0$, оскільки множини власних значень операторів A та B відповідно рівні $\{-a,\ -a \pm 1\}$ та $\{0,\ \pm 1\}$.

Приклад 2. Нехай

$$\alpha_k = \frac{(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}}{\left[\frac{k}{2}\right]!\ \left[\frac{k+1}{2}\right]!},\ k \in \{0, 1, 2, ...\}.$$

Тоді $\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} = (-1)^{k-1}\left[\frac{k+1}{2}\right]$, а тому

$$\frac{\alpha_{2i-2}}{\alpha_{2i-1}} + \frac{\alpha_{2i-1}}{\alpha_{2i}} = 0, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Отже, умова (2) знову не виконується. Разом з цим, оператори $A = z\mathcal{D}_\alpha - E$ та $B = z\mathcal{D}_\alpha$ еквівалентні в $\mathcal{A}_R$, оскільки в цьому випадку в ролі оператора перетворення A в B можна взяти ізоморфізм T простору $\mathcal{A}_R$ на себе, матриця $[t_{jk}]_{j,k=0}^{\infty}$ якого визначається співвідношеннями

$$t_{jk} = \begin{cases} 1, & j = 0, k = 1; \\ 1, & j = 2i, k = 2i-2 \text{ або } j = 2i-1, k = 2i+1 \ (i \in \mathbb{N}); \\ 0, & \text{у всіх інших випадках}; \end{cases}$$

(оператор T є ізоморфізмом в $\mathcal{A}_R$, бо для нього існує обернений оператор T^{-1}, який задається транспонованою матрицею оператора T).

3. Зафіксуємо натуральне число $n \geq 2$ і такі комплексні числа a_0, a_1, ... , a_{n-1}, що

$$|a_0| + |a_1| + ... + |a_{n-1}| \neq 0.$$

Розглянемо в $\mathcal{A}_R$ оператори

$$A = z^n\mathcal{D}_\alpha + \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k\, z^k\right)E \quad \text{та} \quad B = z^n\mathcal{D}_\alpha$$

і встановимо спочатку деякі необхідні умови, а потім і певні достатні умови еквівалентності цих операторів.

Припустимо, що оператори A та B еквівалентні в $\mathcal{A}_R$. Як і в попередньому пункті, оскільки функція $f_0(z) \equiv 1$ є нетривіальним нулем оператора B в $\mathcal{A}_R$, то й оператор A має в $\mathcal{A}_R$ нетривіальний нуль, тобто існує така функція $\varphi(z) \not\equiv 0$ із $\mathcal{A}_R$, що

$$z^n\,(\mathcal{D}_\alpha\varphi)(z) + \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k\, z^k\right)\varphi(z) = 0, \quad |z| < R. \tag{3}$$

Нехай $\varphi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varphi_k\, z^k$. Тоді з (3) одержимо, що послідовність $(\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ задовольняє співвідношення

$$\sum_{k=0}^{i} a_k\, \varphi_{i-k} = 0, \quad i \in \{0, 1, ..., n-1\},$$

$$\frac{\alpha_{i-n}}{\alpha_{i-n+1}}\, \varphi_{i-n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, \varphi_{i-k} = 0, \quad i \in \{n, n+1, ...\}.$$

Припустимо, що $a_0 \neq 0$. Тоді звідси послідовно отримаємо, що $\varphi_i = 0$ для всіх $i \in \{0, 1, ...\}$, тобто $\varphi(z) \equiv 0$, що не так. Тому $a_0 = 0$. Враховуючи це, рівність (3) можна записати так:

$$z^{n-1}\, (\mathcal{D}_\alpha \varphi)(z) + \left(\sum_{k=0}^{n-2} a_{k+1}\, z^k \right) \varphi(z) = 0, \quad |z| < R.$$

Звідси, як і вище, будемо мати, що послідовність $(\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ задовольняє співвідношення

$$\sum_{k=0}^{i} a_{k+1}\, \varphi_{i-k} = 0, \quad i \in \{0, 1, ..., n-2\},$$

$$\frac{\alpha_{i-n+1}}{\alpha_{i-n+2}}\, \varphi_{i-n+2} + \sum_{k=0}^{n-2} a_{k+1}\, \varphi_{i-k} = 0, \quad i \in \{n-1, n, ...\}.$$

Припустивши, що $a_1 \neq 0$, знову одержимо неправильну рівність $\varphi(z) \equiv 0$. Тому $a_1 = 0$.

Продовжуючи аналогічні міркування далі, отримаємо, що $a_0 = a_1 = ... = a_{n-2} = 0$, а тому рівність (3) набуде такого ж вигляду, що й (1):

$$z\, (\mathcal{D}_\alpha \varphi)(z) + a_{n-1}\, \varphi(z) = 0, \quad |z| < R.$$

Тоді за лемою 1 будемо мати, що $a_{n-1} = -\frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m}$ для деякого $m \in \mathbb{N}$.

Отже, якщо оператори A та B еквівалентні в $\mathcal{A}_R$, то існує таке $m \in \mathbb{N}$, що

$$A = z^n\, \mathcal{D}_\alpha - \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m}\, z^{n-1}\, E.$$

Відзначимо, що таке число m єдине, як випливає з наступної леми.

Лема 2. *Якщо оператори* $A = z^n \mathcal{D}_\alpha - \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m}\, z^{n-1} E$ *та* $B = z^n \mathcal{D}_\alpha$ *еквівалентні в* $\mathcal{A}_R$*, то*

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \setminus \{m\} : \quad \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} \neq \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m}.$$

Доведення. Припустимо, що

$$\exists\, k \in \mathbb{N} \setminus \{m\} : \quad \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} = \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m}.$$

Оскільки оператори A та B еквівалентні в $\mathcal{A}_R$, то існує такий ізоморфізм T простору $\mathcal{A}_R$ на себе, що $TA = BT$. Позначимо $f_1(z) = z^m$ і

$f_2(z) = z^k$. Тоді, враховуючи, що $Af_1(z) \equiv 0$ і $Af_2(z) \equiv 0$, отримаємо, що $B(Tf_1)(z) = T(Af_1)(z) \equiv 0$ і $B(Tf_2)(z) = T(Af_2)(z) \equiv 0$, тобто $Tf_1(z) \equiv \mathrm{const}$ і $Tf_2(z) \equiv \mathrm{const}$. А це суперечить тому, що T є ізоморфізмом простору $\mathcal{A}_R$. $\square$

Нехай T – такий ізоморфізм простору $\mathcal{A}_R$ на себе, що

$$TA = BT. \tag{4}$$

Подіявши обома частинами цієї рівності на функцію $f_1(z) = z^m$ і врахувавши, що $Af_1(z) \equiv 0$, одержимо, що $B(Tf_1)(z) \equiv 0$, тобто $Tf_1(z) \equiv C$, де C – деяке ненульове комплексне число. Крім цього, з рівності (4) випливає, що образи $\mathrm{Im}\, A$ та $\mathrm{Im}\, B$ операторів A та B пов'язані співвідношенням $T\,(\mathrm{Im}\, A) = \mathrm{Im}\, B$. Якщо $m \geq n-1$, то для функції $f_2(z) = z^{m-n+1}$ маємо, що

$$Af_2(z) = z^n\,(\mathcal{D}_\alpha f_2)(z) - \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m}\,z^m = \gamma\, z^m,$$

де $\gamma = -\frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m} \neq 0$ (коли $m = n-1$) або $\gamma = \frac{\alpha_{m-n}}{\alpha_{m-n+1}} - \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m} \neq 0$ (коли $m > n-1$), тобто функція $f_1 \in \mathrm{Im}\, A$. Але тоді $Tf_1(z) \equiv C \in \mathrm{Im}\, B$, що неможливо. Отже, $m < n-1$.

Таким чином, встановлено наступні теореми.

Теорема 2. *Оператори* $A = z^2\,\mathcal{D}_\alpha + (a_0 + a_1 z)\,E$, *де* $a_0,\, a_1 \in \mathbb{C}$, *та* $B = z^2\,\mathcal{D}_\alpha$ *еквівалентні в* $\mathcal{A}_R$ *тоді й лише тоді, коли* $a_0 = a_1 = 0$.

Теорема 3. *Нехай* $n \geq 3$. *Якщо оператори* $A = z^n\,\mathcal{D}_\alpha + \left(\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k z^k\right) E$, *де* $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{C}$, *та* $B = z^n \mathcal{D}_\alpha$ *еквівалентні в* $\mathcal{A}_R$, *то*

$$a_0 = a_1 = ... = a_{n-2} = 0, \quad \text{а} \quad a_{n-1} = 0 \quad \text{або} \quad a_{n-1} = -\frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m}$$

для деякого $m \in \{1, 2, ..., n-2\}$, *причому*

$$\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} \neq \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m}, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{m\}. \tag{5}$$

4. Зафіксуємо натуральні числа $n \geq 3$ та $m \leq n-2$ і розглянемо послідовність $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$, яка породжує лінійний неперервний в $\mathcal{A}_R$ оператор $\mathcal{D}_\alpha$ і задовольняє умову (5). Знайдемо деякі додаткові умови на послідовність $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$, за яких оператори

$$A = z^n \mathcal{D}_\alpha - \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m}\, z^{n-1} E \quad \text{та} \quad B = z^n \mathcal{D}_\alpha$$

будуть еквівалентними в $\mathcal{A}_R$.

Щоб довести еквівалентність в $\mathcal{A}_R$ операторів A та B, побудуємо такий ізоморфізм T простору $\mathcal{A}_R$ на себе, який задовольняє рівність (4). Для цього скористаємося матричним зображенням лінійних неперервних операторів, що діють у просторі $\mathcal{A}_R$ [3].

Якщо позначити через $[a_{j,k}]_{j,k=0}^{\infty}$ та $[b_{j,k}]_{j,k=0}^{\infty}$ відповідно матриці операторів A та B і вважати, що $\alpha_{-1} = 0$, то

$$a_{j,k} = b_{j,k} = 0 \quad \text{при} \quad j \neq k+n-1$$

і

$$a_{j,k} = \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} - \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m}, \quad b_{j,k} = \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} \quad \text{при} \quad j = k+n-1.$$

Тому елементи матриці $[t_{j,k}]_{j,k=0}^{\infty}$ оператора T повинні задовольняти співвідношення

$$\begin{aligned} &\left(\tfrac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} - \tfrac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m}\right) t_{j,k+n-1} = 0, \quad \text{якщо} \quad j \leq n-1, \\ &\left(\tfrac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} - \tfrac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m}\right) t_{j,k+n-1} = \tfrac{\alpha_{j-n}}{\alpha_{j-n+1}} t_{j-n+1,k}, \quad \text{якщо} \quad j \geq n. \end{aligned} \tag{6}$$

Для $i \in \{0, 1, ...\}$ та $s \in \{0, 1, ..., n-2\}$ позначимо

$$\beta_{i,s} = \frac{\alpha_{i(n-1)+s-1}}{\alpha_{i(n-1)+s}},$$

причому вважатимемо, що $\beta_{0,0} = 0$.

Лема 3. *Нехай матриці $[t_{j,k}]_{j,k=0}^{\infty}$ та $[\tau_{j,k}]_{j,k=0}^{\infty}$ визначаються наступними співвідношеннями:*

$t_{0,m} = t_{n-1,m+n-1} = t_{m+n-1,n-1} = 1,\ t_{m,0} = -1;$

$t_{i(n-1),i(n-1)+m} = \frac{\beta_{i-1,0} \cdot \ldots \cdot \beta_{1,0}}{(\beta_{i-1,m} - \beta_{0,m}) \cdot \ldots \cdot (\beta_{1,m} - \beta_{0,m})},$

$t_{i(n-1)+m,i(n-1)} = \frac{\beta_{i-1,m} \cdot \ldots \cdot \beta_{1,m}}{(\beta_{i-1,0} - \beta_{0,m}) \cdot \ldots \cdot (\beta_{1,0} - \beta_{0,m})},\ i \in \{2, 3, ...\};$

$t_{i(n-1)+s,i(n-1)+s} = \frac{\beta_{i-1,s} \cdot \ldots \cdot \beta_{0,s}}{(\beta_{i-1,s} - \beta_{0,m}) \cdot \ldots \cdot (\beta_{0,s} - \beta_{0,m})},$

$t_{s,s} = 1,\ s \in \{1, 2, ..., n-2\} \setminus \{m\},\ i \in \mathbb{N};$

$t_{j,k} = 0,$ *у всіх інших випадках;*

$$\tau_{j,k} = \begin{cases} \frac{1}{t_{k,j}}, & t_{k,j} \neq 0, \\ 0, & t_{k,j} = 0. \end{cases}$$

Тоді вони задовольняють такі матричні рівності:

$$[t_{j,k}] \cdot [a_{j,k}] = [b_{j,k}] \cdot [t_{j,k}], \tag{7}$$

$$[t_{j,k}] \cdot [\tau_{j,k}] = [\tau_{j,k}] \cdot [t_{j,k}] = [\delta_{j,k}], \tag{8}$$

де $\delta_{j,k}$ – символ Кронекера.

Доведення. Рівність (7) виконується, оскільки елементи матриці $[t_{j,k}]_{j,k=0}^{\infty}$ задовольняють співвідношення (6).

Рівності (8) рівносильні тому, що для $j, k \in \{0, 1, ...\}$

$$\sum_{i=0}^{\infty} t_{j,i}\tau_{i,k} = \sum_{i=0}^{\infty} \tau_{j,i} t_{i,k} = \delta_{j,k}.$$

А ці рівності відразу випливають з означення матриці $[\tau_{j,k}]_{j,k=0}^{\infty}$, якщо лише зауважити, що в кожному рядку і кожному стовпчику матриці $[t_{j,k}]_{j,k=0}^{\infty}$ (а тому і матриці $[\tau_{j,k}]_{j,k=0}^{\infty}$) є рівно по одному відмінному від нуля елементу. $\square$

Теорема 4. *Нехай $n \geq 3$, $B = z^n \mathcal{D}_\alpha$, а $A = z^n \mathcal{D}_\alpha - \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m} z^{n-1} E$, де $m \in \{1, 2, ..., n-2\}$. Тоді оператори A та B будуть еквівалентними в $\mathcal{A}_R$, якщо послідовність $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$ задовольняє умову (5), а також наступні умови:*

$$\lim_{i\to\infty} \left| \left(\frac{\alpha_{i(n-1)+m-1}}{\alpha_{i(n-1)+m}} - \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m} \right) \frac{\alpha_{i(n-1)}}{\alpha_{i(n-1)-1}} \right| = \\ = \lim_{i\to\infty} \left| \left(\frac{\alpha_{i(n-1)-1}}{\alpha_{i(n-1)}} - \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m} \right) \frac{\alpha_{i(n-1)+m}}{\alpha_{i(n-1)+m-1}} \right| = 1; \tag{9}$$

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\alpha_{i(n-1)+s}}{\alpha_{i(n-1)+s-1}} = 0, \quad s \in \{1, 2, ..., n-2\} \setminus \{m\}. \tag{10}$$

Доведення. Перевіримо спочатку, що умови (9) і (10) забезпечують неперервність в $\mathcal{A}_R$ операторів T і T_1, які визначаються відповідно матрицями $[t_{j,k}]_{j,k=0}^{\infty}$ та $[\tau_{j,k}]_{j,k=0}^{\infty}$ із леми 3. Для цього доведемо, що

$$\forall\, \varrho \in (0; R) \quad \exists\, r \in (0; R) \quad \exists\, C > 0 \quad \forall\, j, k \in \{0, 1, 2, ...\} : \\ |t_{j,k}| \leq C\, \frac{r^k}{\varrho^j} \quad \text{і} \quad |\tau_{j,k}| \leq C\, \frac{r^k}{\varrho^j}. \tag{11}$$

Зафіксуємо числа $\varrho \in (0; R)$ та $r \in (\varrho; R)$. Відзначимо, що умови (9) і (10) можна записати так:

$$\lim_{i\to\infty} \left| \frac{\beta_{i,0}}{\beta_{i,m} - \beta_{0,m}} \right| = \lim_{i\to\infty} \left| \frac{\beta_{i,m}}{\beta_{i,0} - \beta_{0,m}} \right| = 1$$

і

$$\lim_{i\to\infty} \frac{1}{\beta_{i,s}} = 0, \quad s \in \{1, 2, ..., n-2\} \setminus \{m\}.$$

Тоді для числа $\varepsilon = (\frac{r}{\varrho})^{n-1} - 1 > 0$ одержимо, що існує таке $i_0 \in \mathbb{N}$, що для всіх $i > i_0$

$$\left| \frac{\beta_{i,0}}{\beta_{i,m} - \beta_{0,m}} \right| < 1 + \varepsilon, \quad \left| \frac{\beta_{i,m}}{\beta_{i,0} - \beta_{0,m}} \right| < 1 + \varepsilon$$

і

$$\left| \frac{\beta_{0,m}}{\beta_{i,s}} \right| < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}, \quad s \in \{1, 2, ..., n-2\} \setminus \{m\}.$$

Тому для $i > i_0 + 1$ будемо мати, що

$$|t_{i(n-1),i(n-1)+m}| \le (1+\varepsilon)^{i-i_0-1}\left|\frac{\beta_{i_0,0}\cdot\ldots\cdot\beta_{1,0}}{(\beta_{i_0,m}-\beta_{0,m})\cdot\ldots\cdot(\beta_{1,m}-\beta_{0,m})}\right| =$$

$$= \left|\frac{\beta_{i_0,0}\cdot\ldots\cdot\beta_{1,0}}{(\beta_{i_0,m}-\beta_{0,m})\cdot\ldots\cdot(\beta_{1,m}-\beta_{0,m})}\right| \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{(i_0+1)(n-1)} \frac{1}{r^m}\,\frac{r^{i(n-1)+m}}{\varrho^{i(n-1)}};$$

$$|t_{i(n-1)+m,i(n-1)}| \le (1+\varepsilon)^{i-i_0-1}\left|\frac{\beta_{i_0,m}\cdot\ldots\cdot\beta_{1,m}}{(\beta_{i_0,0}-\beta_{0,m})\cdot\ldots\cdot(\beta_{1,0}-\beta_{0,m})}\right| =$$

$$= \left|\frac{\beta_{i_0,m}\cdot\ldots\cdot\beta_{1,m}}{(\beta_{i_0,0}-\beta_{0,m})\cdot\ldots\cdot(\beta_{1,0}-\beta_{0,m})}\right| \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{(i_0+1)(n-1)} \varrho^m\,\frac{r^{i(n-1)}}{\varrho^{i(n-1)+m}};$$

$$|t_{i(n-1)+s,i(n-1)+s}| \le$$

$$\le \frac{1}{\left(1-\left|\frac{\beta_{0,m}}{\beta_{i-1,s}}\right|\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\left|\frac{\beta_{0,m}}{\beta_{i_0+1,s}}\right|\right)}\left|\frac{\beta_{i_0,s}\cdot\ldots\cdot\beta_{0,s}}{(\beta_{i_0,s}-\beta_{0,m})\cdot\ldots\cdot(\beta_{0,s}-\beta_{0,m})}\right| \le$$

$$\le (1+\varepsilon)^{i-i_0-1}\left|\frac{\beta_{i_0,s}\cdot\ldots\cdot\beta_{0,s}}{(\beta_{i_0,s}-\beta_{0,m})\cdot\ldots\cdot(\beta_{0,s}-\beta_{0,m})}\right| =$$

$$= \left|\frac{\beta_{i_0,s}\cdot\ldots\cdot\beta_{0,s}}{(\beta_{i_0,s}-\beta_{0,m})\cdot\ldots\cdot(\beta_{0,s}-\beta_{0,m})}\right| \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{(i_0+1)(n-1)+s} \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{i(n-1)+s},$$

де $s \in \{1,2,...,n-2\}\setminus\{m\}$. Нехай

$$C_1 = \max\left\{\frac{1}{r^m}, \varrho^m, \frac{\varrho}{r}\right\};$$

$$C_2 = \max_i\left\{\left|\frac{\beta_{i-1,0}\cdot\ldots\cdot\beta_{1,0}}{(\beta_{i-1,m}-\beta_{0,m})\cdot\ldots\cdot(\beta_{1,m}-\beta_{0,m})}\right| \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{i(n-1)} \frac{1}{r^m}\right\},$$

$$C_3 = \max_i\left\{\left|\frac{\beta_{i-1,m}\cdot\ldots\cdot\beta_{1,m}}{(\beta_{i-1,0}-\beta_{0,m})\cdot\ldots\cdot(\beta_{1,0}-\beta_{0,m})}\right| \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{i(n-1)} \varrho^m\right\},$$

де $i \in \{2,3,...,i_0+1\}$;

$$C_4 = \max_{i,s}\left\{\left|\frac{\beta_{i-1,s}\cdot\ldots\cdot\beta_{0,s}}{(\beta_{i-1,s}-\beta_{0,m})\cdot\ldots\cdot(\beta_{0,s}-\beta_{0,m})}\right| \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{i(n-1)+s}\right\},$$

де $i \in \{1,2,...,i_0+1\}$, $s \in \{1,2,...,n-2\}\setminus\{m\}$;

$$C_t = \max_{1\le i\le 4} C_i.$$

Тоді отримаємо, що

$$\forall\, j,k \in \{0,1,2,...\}: \quad |t_{j,k}| \le C_t\,\frac{r^k}{\varrho^j}.$$

Враховуючи означення матриці $[\tau_{j,k}]_{j,k=0}^{\infty}$, аналогічно можна знайти сталу $C_\tau > 0$ таку, що

$$\forall\, j,k \in \{0,1,2,...\}: \quad |\tau_{j,k}| \le C_\tau \,\frac{r^k}{\varrho^j}.$$

Якщо покласти тепер $C = \max\{C_t, C_\tau\}$, то одержимо, що умова (11) справді має місце.

Таким чином, оператори T і T_1 неперервно діють у просторі $\mathcal{A}_R$. Тому, враховуючи лему 3, маємо, що оператор T є ізоморфізмом простору $\mathcal{A}_R$ на себе, який задовольняє рівність (4). Отже, оператори A та B еквівалентні в $\mathcal{A}_R$. $\square$

5. Нагадаємо, що коли послідовність $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$ задовольняє умову

$$\lim_{k\to\infty} k^{\frac{1}{\varrho}}\, \sqrt[k]{|\alpha_k|} = (\sigma e \varrho)^{\frac{1}{\varrho}}, \quad \varrho, \sigma > 0,$$

то відповідний оператор $\mathcal{D}_\alpha$ називають оператором узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва [4].

Наведемо приклади послідовностей $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$, які породжують певні класи операторів узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва і задовольняють умови (5), (9) і (10).

Нехай послідовність $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$ визначається співвідношеннями

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_k = \left(\frac{a}{k}\right)^{\frac{k}{\varrho}}, \; k \in \mathbb{N}, \quad a, \varrho > 0. \tag{12}$$

Оскільки $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\alpha_k|}\, k^{\frac{1}{\varrho}} = a^{\frac{1}{\varrho}}$, то ця послідовність породжує оператор узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва.

Лема 4. *Послідовність $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$, що задається рівностями (12), задовольняє умови (5), (9) і (10).*

Доведення. Відзначимо, що

$$\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} = \begin{cases} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{\varrho}}, \; k = 1, \\ \left(\frac{k}{a}\right)^{\frac{1}{\varrho}} \left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^{\frac{k-1}{\varrho}}, \; k \ge 2. \end{cases}$$

Звідси, враховуючи, що послідовність $(x_k)_{k=2}^{\infty}$, де $x_k = k\left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^{k-1}$, є строго зростаючою, маємо, що

$$\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} \ne \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m}, \quad k, m \in \mathbb{N}, \; k \ne m.$$

Тому виконується умова (5). А умови (9) і (10) випливають з того, що

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\alpha_k}{\alpha_{k-1}} = 0$$

і для фіксованого $s \in \mathbb{N}$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\alpha_k}{\alpha_{k-1}} \frac{\alpha_{k+s-1}}{\alpha_{k+s}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{(k+s)\left(1+\frac{1}{k+s-1}\right)^{k+s-1}}{k\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1}} \right)^{\frac{1}{\varrho}} = 1. \qquad \square$$

Із теорем 3, 4 і леми 4 отримуємо наступну теорему.

Теорема 5. *Нехай послідовність* $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$ *визначається співвідношеннями (12),* $\mathcal{D}_\alpha$ *– відповідний оператор узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва,* $n \geq 3$, $B = z^n \mathcal{D}_\alpha$ *і* $A = z^n \mathcal{D}_\alpha + \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k\right) E$, *де* $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{C}$. *Оператори* A *та* B *еквівалентні в* $\mathcal{A}_R$ *тоді й лише тоді, коли*

$$a_0 = a_1 = ... = a_{n-2} = 0, \quad a \quad a_{n-1} = 0 \quad \textit{або} \quad a_{n-1} = -\frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m}$$

для деякого $m \in \{1, 2, ..., n-2\}$.

Розглянемо послідовність $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$, для якої

$$\alpha_k = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{\varrho} + \mu\right)}, \quad k \in \{0, 1, 2, ...\}, \ \varrho,\ \mu > 0. \tag{13}$$

Оскільки

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^{\frac{1}{\varrho}}}{\sqrt[k]{\left|\Gamma\left(\frac{k}{\varrho}+\mu\right)\right|}} = (e\varrho)^{\frac{1}{\varrho}},$$

то відповідний оператор $\mathcal{D}_\alpha$ є оператором узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва. Позначається він у цьому випадку через $\mathcal{D}_{\varrho,\mu}$. Зауважимо, що при $\varrho = \mu = 1$ оператор $\mathcal{D}_{\varrho,\mu}$ збігається з оператором звичайного диференціювання $\mathcal{D}$.

Лема 5. *Послідовність* $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$, *що визначається рівностями (13), задовольняє умови (5), (9) і (10).*

Доведення. Припустимо, що для деяких $k, m \in \mathbb{N}$, $k < m$,

$$\Gamma\left(\frac{k-1}{\varrho}+\mu\right)\Gamma\left(\frac{m}{\varrho}+\mu\right) = \Gamma\left(\frac{k}{\varrho}+\mu\right)\Gamma\left(\frac{m-1}{\varrho}+\mu\right).$$

Поділивши обидві частини цієї рівності на $\Gamma\left(\frac{k+m-1}{\varrho}+2\mu\right)$, одержимо, що

$$\int_0^1 t^{\frac{k-1}{\varrho}+\mu-1}(1-t)^{\frac{m}{\varrho}+\mu-1}\,dt = \int_0^1 t^{\frac{k}{\varrho}+\mu-1}(1-t)^{\frac{m-1}{\varrho}+\mu-1}\,dt;$$

$$\int_0^1 t^{\frac{k-1}{\varrho}+\mu-1}(1-t)^{\frac{m-1}{\varrho}+\mu-1}\left((1-t)^{\frac{1}{\varrho}} - t^{\frac{1}{\varrho}}\right)dt = 0;$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{\frac{k-1}{\varrho}+\mu-1}(1-t)^{\frac{m-1}{\varrho}+\mu-1}\left((1-t)^{\frac{1}{\varrho}}-t^{\frac{1}{\varrho}}\right)dt=$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{\frac{k-1}{\varrho}+\mu-1}(1-t)^{\frac{m-1}{\varrho}+\mu-1}\left(t^{\frac{1}{\varrho}}-(1-t)^{\frac{1}{\varrho}}\right)dt.$$

Зробивши заміну $\tau=1-t$ в інтегралі з правої частини останньої рівності, отримаємо, що

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{\frac{k-1}{\varrho}+\mu-1}(1-t)^{\frac{m-1}{\varrho}+\mu-1}\left((1-t)^{\frac{1}{\varrho}}-t^{\frac{1}{\varrho}}\right)dt=$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}} (1-\tau)^{\frac{k-1}{\varrho}+\mu-1}\tau^{\frac{m-1}{\varrho}+\mu-1}\left((1-\tau)^{\frac{1}{\varrho}}-\tau^{\frac{1}{\varrho}}\right)d\tau;$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{\frac{k-1}{\varrho}+\mu-1}(1-t)^{\frac{k-1}{\varrho}+\mu-1}\left((1-t)^{\frac{1}{\varrho}}-t^{\frac{1}{\varrho}}\right)\left((1-t)^{\frac{m-k}{\varrho}}-t^{\frac{m-k}{\varrho}}\right)dt=0.$$

А це неможливо, бо підінтегральна функція в останньому інтегралі є неперервною і додатною на інтервалі $(0;\frac{1}{2})$ функцією.

Отже, для даної послідовності $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$ виконується умова (5). Крім цього, оскільки

$$\Gamma\left(\frac{k-1}{\varrho}+\mu\right)\sim\sqrt{2\pi}\,\left(\frac{k}{\varrho}\right)^{\frac{k}{\varrho}+\mu-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{k}{\varrho}},\quad k\to\infty,$$

то, як і при доведенні леми 4, можна одержати, що $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$ задовольняє умови (9) і (10). $\square$

Безпосереднім наслідком теорем 3, 4 і леми 5 є наступна теорема.

Теорема 6. *Нехай* $n\geq 3$, $B=z^n\mathcal{D}_{\varrho,\mu}$ *і* $A=z^n\,\mathcal{D}_{\varrho,\mu}+\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_kz^k\right)E$, *де* $a_0,a_1,...,a_{n-1}\in\mathbb{C}$. *Оператори* A *та* B *еквівалентні в* $\mathcal{A}_R$ *тоді й лише тоді, коли*

$$a_0=a_1=...=a_{n-2}=0,\quad a\quad a_{n-1}=0\quad \text{або}\quad a_{n-1}=-\frac{\Gamma\left(\frac{m}{\varrho}+\mu\right)}{\Gamma\left(\frac{m-1}{\varrho}+\mu\right)}$$

для деякого $m\in\{1,2,...,n-2\}$.

Відзначимо, що при $\varrho=\mu=1$ теорема 6 збігається з відповідною теоремою з [1].

[1] Нагнибида Н.И. Об эквивалентности некоторых дифференциальных операторов первого порядка с "особенностями"// Сиб. мат. журн.– 1969.– **10**, № 6.– С. 1422 – 1426.

[2] Гончарук А.В., Звоздецький Т.І. Про еквівалентність деяких диференціальних операторів першого порядку в просторах аналітичних функцій та просторах послідовностей // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. **228**. Математика. – Чернівці: Рута, 2004. – С. 5 – 10.

[3] Фишман К.М. К вопросу о линейных преобразованиях аналитических пространств // Докл. АН СССР.– 1959.– **127**, № 1.– С. 40 – 43.

[4] Гельфонд А.О., Леонтьев А.Ф. Об одном обобщении ряда Фурье // Матем. сб.– 1951.– **29 (71)**, № 3.– С. 477 – 500.

SIMILARITY OF SOME GENERALIZED DIFFERENTIATION OPERATORS OF THE FIRST ORDER IN THE SPACES OF ANALYTIC FUNCTIONS

Taras ZVOZDETSKYI

Yuriy Fed'kovych Chernivtsi National University,
2 Kotsjubynskyi Str., Chernivtsi 58012, Ukraine

We obtain some necessary and sufficient conditions for the similarity of some generalized differentiation operators of the first order in the spaces of functions which are analytic in disk domains.