UKRAINISCHE ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN IN LEMBERG (LWIW)
(ČARNIECKI-GASSE № 26).

SITZUNGSBERICHTE

DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-ÄRZTLICHEN SEKTION

HEFT XIX.

(MAI 1933 — DEZEMBER 1933).

VERÖFFENTLICHT
VOM DIREKTOR DER MATH.-NATURWISS.-ÄRZTLICHEN SEKTION.

LEMBERG, 1934.
VERLAG UND BUCHDRUCKEREI DER ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT
DER WISSENSCHAFTEN IN LEMBERG (LWIW).

2. Hr. Wl. Kubijovyč (Krakau) liest seine Arbeit u. T.: „Das Hirtenleben in Bukowina".

Dieselbe Arbeit erscheint demnächst in der Sammelschrift der geographischen Kommission der Sektion.

3. Derselbe legt den Plan der Herausgabe eines geographisch-statistischen Atlanten des ukrainischen Territoriums vor.

Indem die Sektion die Wichtigkeit einer solchen Publikation betont, nimmt sie einhellig den Antrag des Referenten an.

RÉSUMÉ.

Integration de l'équation de Laplace.

(par Vl. Dobrovolśkyj)

L'équation différentielle aux dérivées partielles

$$pq(r+t)-8(p^2+q^2-1)=0$$

représent une surface de niveau $U=\text{const.}$ comme une compensation de l'équation de Laplace

$$\nabla=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0.$$

On verra facilement que d'après l'intégration doit être

$$U=\varphi\left[(1+i)x^2 i,(1-i)y^2 i,z\right]=\text{const.}$$

des variables x et y étant indépendantes. Ce-qui d'après la généralisation donne les autres formules du champ newtonien.

CLXXXVIII. Sitzung am 9. Juni 1933.

Vorsitzender Hr Levyćkyj.

1. Eine Arbeit, die Trisektion des Winkels betreffend, wurde als prinzipiell unrichtig abgewiesen.

2. Zu wirklichen Mitgliedern der Sektion und der Gesellschaft wurden folgende Personen gewählt:

a) Prof. Demetrius D. Morduchaj-Boltovskoj (Rostov),
b) Dr. Andreas Łastovećkyj (Lwiw),
c) Ing. Iwan Kandjak (Lwiw),
d) Dr. Rostislav Jendyk (Lwiw),
e) Frl. Dr. Olga Mryc (Lwiw).

3. In die Kommission für die Normierung der administrativen Tätigkeit aller Sektionen und Kommissionen der Gesellschaft wurde namens der Sektion Hr Dr. G. Polanśkyj designiert.

5. Hr. Rakovśkyj legt die Arbeit des Hrn R. Jendyk u. T. „Rassenzugehörigkeit der Schädel aus der Periode des Aunjetitzer Kultur" vor.

6. Der Vorsitzende gibt zur Kenntniss, dass seitens des Ausschusses dem Hrn. Dr. R. Jendyk eine Unterstützung aus dem Fonds des weil. Dembyćkyj zuerkannt wurde.

TRAITÉS.

Sur la gravitation dans le problème des trois corps (suite)

(Par Vl. P. Dobrovolsky)

(suite).

Ainsi donc ci-dessus précités formules (10) et (11) corrigées, à savoir

$$g=\frac{1}{a^2b^2c^2}\Big[a^4b^4(m_1-m_2)^2+b^4c^4(m_2-m_3)^2+c^4a^4(m_3-m_1)^2+$$
$$+abc\Big\{a^3(b^2+c^2-a^2)(m_1-m_2)(m_1-m_3)+ \qquad \text{(10 bis)}$$
$$+b^3(c^2+a^2-b^2)(m_2-m_3)(m_2-m_1)+c^3(a^2+b^2-c^2)(m_3-m_1)(m_3-m_2)\Big\}\Big]^{\frac{1}{2}}$$

et

$$F=\frac{m_1+m_2+m_3}{a^2b^2c^2}\Big[a^4b^4(m_1-m_2)^2+b^4c^4(m_2-m_3)^2+c^4a^4(m_3-m_1)^2+$$
$$+abc\Big\{a^3(b^2+c^2-a^2)(m_1-m_2)(m_1-m_3)+ \qquad \text{(11 bis)}$$
$$+b^3(c^2+a^2-b^2)(m_2-m_3)(m_2-m_1)+c^3(a^2+b^2-c^2)(m_3-m_1)(m_3-m_2)\Big\}\Big]^{\frac{1}{2}}$$

expriment l'accélération g et, [en supposant les masses agissantes m_1, m_2 et m_3 concentrées dans le centre de gravité du système] — la gravitation F des trois corps. Mais dans le fait, suivant les formules (4) en forme générale suivante:

$$x_c=\frac{m_1\frac{a^3}{T}x_1+m_2\frac{b^3}{T}x_2+m_3\frac{c^3}{T}x_3}{m_1\frac{a^3}{T}+m_2\frac{b^3}{T}+m_3\frac{c^3}{T}},\quad y_c=\frac{m_1\frac{a^3}{T}y_1+m_2\frac{b^3}{T}y_2+m_3\frac{c^3}{T}y_3}{m_1\frac{a^3}{T}+m_2\frac{b^3}{T}+m_3\frac{c^3}{T}}$$

$$z_c=\frac{m_1\frac{a^3}{T}z_1+m_2\frac{b^3}{T}z_2+m_3\frac{c^3}{T}z_3}{m_1\frac{a^3}{T}+m_2\frac{b^3}{T}+m_3\frac{c^3}{T}} \qquad (12),$$

le centre d'attraction dans le problème des trois corps se trouve dans le centre de gravité des masses fictives et variables: $m_1 \frac{a^3}{T}$, $m_2 \frac{b^3}{T}$ et $m_3 \frac{c^3}{T}$ qu'on aurait placées dans les mêmes points où se trouvent réellement les masses données $m_1(x_1 y_1 z_1)$, $m_2(x_2 y_2 z_2)$ et $m_3(x_3 y_3 z_3)$, T-étant un coefficient symétrique par rapport aux a, b et c du troisième degré. Cela est évident. Donc à la place des forces non parallèles: $\frac{m_1 m_2}{c^2}$, $\frac{m_2 m_3}{a^2}$ et $\frac{m_3 m_1}{b^2}$ agissantes dans les points $m_1(x_1 y_1 z_1)$, $m_2(x_2 y_2 z_2)$ et $m_3(x_3 y_3 z_3)$ sont paru dans les mêmes points telles forces agissantes parallèles suivantes: $\frac{m_1 a^3 m_2 b^3}{T^2 c^2} = \frac{m_1 m_2 a^3 b^3 c^3}{T^2 c^5}$, $\frac{m_2 b^3 m_3 c^3}{T^2 a^2} = \frac{m_2 m_3 a^3 b^3 c^3}{T^2 a^5}$ et $\frac{m_3 c^3 m_1 a^3}{T^2 b^2} = \frac{m_3 m_1 a^3 b^3 c^3}{T^2 b^5}$. Il est clair que dans le cas présent la gravitation F_1 des trois corps doit être

$$F_1 = \frac{a^3 b^3 c^3}{T^2} \left[\frac{m_1 m_2}{c^5} + \frac{m_2 m_3}{a^5} + \frac{m_3 m_1}{b^5} \right] \tag{13}$$

Mais, en raison des (12), la formule (11 bis) prend la forme

$$\begin{aligned} F_1 = \frac{m_1 a^3 + m_2 b^3 + m_3 c^3}{T(a^2 b^2 c^2)} \Big[& a^4 b^4 (m_1 - m_2)^2 + b^4 c^4 (m_2 - m^3)^2 + \\ & + c^4 a^4 (m^3 - m_1)^2 + abc \{ a^3 (b^2 + c^2 - a^2)(m_1 - m_2)(m_1 - m_3) + \\ & + b^3 (c^2 + a^2 - b^2)(m_2 - m_3)(m_2 - m_1) + c^3 (a^2 + b^2 - c^2)(m_3 - m_1)(m_3 - m_2) \} \Big]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{14}$$

L'élimination de T entre les (13) et (14) étant opérée, on aura la gravitation F_1 dans le problème des trois corps sous la forme définitive suivante:

$$\begin{aligned} F_1 = \frac{(m_1 a^3 + m_2 b^3 + m_3 c^3)^2}{a^7 b^7 c^7 \left[\frac{m_1 m_2}{c^5} + \frac{m_2 m_3}{a^5} + \frac{m_3 m_1}{b^5} \right]} \Big[& a^4 b^4 (m_1 - m_2)^2 + b^4 c^4 (m_2 - m_3)^2 + \\ & + c^4 a^4 (m_3 - m_1)^2 + abc \{ a^3 (b^2 + c^2 - a^2)(m_1 - m_2)(m_1 - m_3) + \\ & + b^3 (c^2 + a^2 - b^2)(m_2 - m_3)(m_2 - m_1) + c^3 (a^2 + b^2 - c^2)(m_3 - m_1)(m_3 - m_2) \} \Big] \end{aligned} \tag{15}$$

Selon le principe de l' homogénéité des valeurs mécaniques le coefficient T doit être toujours une fonction symétrique par rapport aux a, b, c du troisième degré. Donc dans le cas des perturbations au dedans du champ des trois corps sont possibles seulement telles les deux cas suivants: $T = abc$ et $T = a^3 + b^3 + c^3$. Cela posé, deux cas seulement, très-simples, sont à distinguer durant les perturbations:

Premier cas. Soit $T = abc$. Les formules (12) dans le cas présent prennent la torme

$$x_c = \frac{m_1 \frac{a^2}{bc} x_1 + m_2 \frac{b^2}{ca} x_2 + m_3 \frac{c^2}{ab} x_3}{m_1 \frac{a^2}{bc} + m_2 \frac{b^2}{ca} + m_3 \frac{c^2}{ab}} \quad \text{e. t. c.}$$

Comme le centre momentané d'atraction du système se trouve dans le centre de gravité des masses agissantes fictives et variables: $m_1 \frac{a^2}{bc}$ $m_2 \frac{b^2}{ca}$ et $m_3 \frac{c^2}{ab}$, les forces agissantes non paralléles: $\frac{m_1 m_2}{c^2}$, $\frac{m_2 m_3}{a^2}$ et $\frac{m_3 m_1}{b^2}$ on doit remplacer par les forces paralléles suivantes:

$$\frac{m_1 \frac{a^2}{bc} \cdot m_2 \frac{b^2}{ca}}{c^2} = \frac{m_1 m_2 abc}{c^5}, \qquad \frac{m_2 \frac{b^2}{ca} \cdot m_3 \frac{c^2}{ab}}{a^2} = \frac{m_2 m_3 abc}{a^5}$$

$$\text{et} \quad \frac{m_3 \frac{c^2}{ab} \cdot m_1 \frac{a^2}{bc}}{b^2} = \frac{m_3 m_1 abc}{b^5}$$

La gravitation F_2 doit être

$$F_2 \left[\frac{m_1 m_2}{c^5} + \frac{m_2 m_3}{a^5} + \frac{m_3 m_1}{b^5} \right] abc \tag{16}$$

Second cas. Soit $T = a^3 + b^3 + c^3$. Les formules (12) prennent la forme

$$x_c = \frac{\frac{m_1 a^3 x_1}{a^3 + b^3 + c^3} + \frac{m_2 b^3 x_2}{a^3 + b^3 + c^3} + \frac{m_3 c^3}{a^3 + b^3 + c^3}}{\frac{m_1 a^3}{a^3 + b^3 + c^3} + \frac{m_2 b^3}{a^3 + b^3 + c^3} + \frac{m_3 c^3}{a^3 + b^3 + c^3}}$$

Les forces non paralléles: $= \frac{m_1 m_2}{c^2}$, $\frac{m_2 m_2}{a^2}$ et $\frac{m_3 m_1}{b^2}$ on doit remplacer par les forces paralléles suivantes:

$$\frac{m_1 a^3 m_2 b^3}{c^2[a^3+b^3+c^3]^2} = \frac{m_1 m_2}{c^5} \frac{a^3 b^3 c^3}{[a^3+b^3+c^3]^2}, \frac{m_2 b^3 m_3 c^3}{a^2[a^3+b^3+c^3]^2} =$$

$$= \frac{m_2 m_3}{a^5} \frac{a^3 b^3 c^3}{[a^3+b^3+c^3]^2} \text{ et } \frac{m_3 c^3 m_1 a^3}{b^2[a^3+b^3+c^3]^2} = \frac{m_3 m_1}{b^5} \cdot \frac{a^3 b^3 c^3}{[a^3+b^3+c^3]^2}$$

La gravitation F_3 sera dans ce cas

$$F_3 = \left[\frac{m_1 m_2}{c^5} + \frac{m_2 m_3}{a^5} + \frac{m_3 m_1}{b^5}\right] \frac{a^3 b^3 c^3}{[a^3+b^3+c^3]^2} \qquad (17)$$

Kiev,
Le 15 décembre 1932.

Rassenzugehörigkeit der Schädel aus der Periode der Aunjetitzer Kultur.

(von R. Jendyk.)

Zwei Schädel, die in Potschapy ausgegraben sind, gehören zur Mittelperiode der Aunjetitzer-Kultur in Ost-Galizien. Leider ist nur der eine von ihnen cranium, der zweite dagegen stellt calotta dar. Seine morphologischen Merkmale sind aber den des cranium sehr ähnlich.

Cranium ist weiblichen Geschlechtes; seine absolute Dimensionen sind nicht gross, der allgemeine Schädelbau ist schwächlich vom kleinen Gewicht. In norma verticalis stellt dieser Schädel ovoide Form dar, in norma occipitalis die Hausform. Supraorbitalwülste sind sehr gut entwickelt, glabella gut gebaut und hoch formiert. Schädeldach ist im Punkte lambda genug geplattet und aus diesem Grunde bildet pars occipitalis noch grössere Bathrocephalie. Lineae nuchae und protuberantia occipitalis sind schwach. Gut entwickelte Nähte umfassen ossicula suturarum mittlerer Grösse. Gaumen ist nicht gross, aber tief. Os nasale springt hervor und bildet fast Adlerform mit zwei langen sulcus. Unterkiefer beim Punkte gnathion hat incisura.

Tabelle I. Indices des Schädels aus Potschapy.

Längenbreiten — Index	71·7
Breitenhöhen — „	104·7
Längenhöhen — „	75·0
Frontoparietal — „	69·0
Gesichts — „	57·3
Orbital — „	76·9
Nasal — „	51·0
Gaumen — „	76·1
Breitenindex der Schädelbasis	88·4

Morphologische Merkmale von calotta geben den Grund zur Annahme, dass ihre rassische Zugehörigkeit mit der des cranium identisch ist.