UKRAINISCHE ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN IN LEMBERG.
(ČARNIECKI-GASSE № 26).

SITZUNGSBERICHTE

DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-ÄRZTLICHEN SEKTION.

HEFT XVI.

(MAJ 1931 — APRIL 1932).

VERÖFFENTLICHT

VOM DIREKTOR DER MATH.-NATURWISS.-ÄRZTLICHEN SEKTION.

LEMBERG, 1932.
VERLAG UND BUCHDRUCKEREI DER ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT
DER WISSENSCHAFTEN IN LEMBERG.

BERICHTE.

Die Konstruktion des allgemeinen Operators der linearen homogenen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, die in Bezug auf einen von Differentialquotienten aufgelöst ist.

(von G. Pfeiffer).

Ist:

$$X(f) = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = o \qquad 1)$$

eine lineare homogene partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit den Integralen: $\varphi_1\ \varphi_2,\ \varphi_3,\quad \varphi_{n-1}$, und schreibt man ferner die Gleichung 1) in der Form:

$$X(f) = \frac{1}{\omega} K(f) = o,$$

wobei:

$$K(f) = \frac{D(f, \varphi_1\ \varphi_2, \ldots\ldots \varphi_{n-1})}{D(x_1\ x_2 \ldots\ldots x_n)}$$

und:

$$\omega = \frac{D(\varphi_1\ \varphi_2 \ldots\ldots \varphi_{n-1})}{D(x_1\ x_2 \ldots\ldots x_n)}$$

bedeuten, so hat der allgemeine Operator der Gleichung 1) die Form:

$$Y(f) = \sum_{j=1}^{n-1} \Psi_j\ Y_j(f) + \varrho\ X(f) = \frac{1}{\omega} \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} \Psi_j\ L_j(f) + \varrho\ K(f) \right\},$$

wobei $\Psi_1\ \Psi_2 \ldots \Psi_{n-1}$ willkürliche Funktionen der Integrale $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{n-1}$, ϱ willkürliche Funktion der unabhängigen Variablen bedeuten. Dabei ist:

$$Y_\tau(f) = \frac{1}{\omega} L_\tau(f) = o.$$

Sur une généralisation de la variation du Lagrange dans l'équation differentielle ordinaire linéaire du 2 ordre.

(par M. Kourensky).

L'auteur donne quelques quadratures nouvelles pour la variation des constantes arbitraires de l'équation différentielle ordinaire linéaire du deuxième ordre.

Die Schätzung der Störungen einiger Asteroiden seitens Mars, Erde, Venus und Merkur.

(von M. Michalśkyj).

Der Verfasser untersucht solche Asteroiden, für welche die Exzentrizität e' und die Neigung φ' klein, das Verhältnis $\frac{a}{a'} = \alpha$ ungefähr

Sämmtliche Drüsenzellen sind acidophil und treten entweder als helle, schwach gefärbte, oder als dunkle, stark sich färbende, Zellen auf. Das Protoplasma der beiden Drüsenzellen ist vacuolisiert und weist in einem optischen Profile ein deutliches Netz von größeren Maschen in der hellen und von kleineren in der dunklen Zelle auf. Die beiden Drüsenzellen sind mit einer großen Menge winziger Körnchen gefüllt, die äußerst reichlich und dicht in der dunklen Zelle angehäuft sind. Der Kern der hellen Zelle ist fleckig, beinahe strukturlos, sehr oft an seinen Ecken ausgezogen, während die dunkle Drüsenzelle einen kugeligen, oder ovalen Kern umschließt, der eine deutlichere, körnige Struktur mit einem glänzenden, kugeligen Kernchen aufzuweisen hat.

Eine sehr charakteristische Eigentümlichkeit der dunklen Drüsenzelle ist ihre basilare, basophile Streifung, betreffs derer sich der Verfasser nur auf die Anführung einiger Ansichten an der Hand der diesbezüglichen neuesten Literatur (Lutz, Roskin) beschränkt.

Beide Drüsenzellen, die helle und die dunkle, bilden wahrscheinlich nur Funktionsstadien eines und desselben Drüsenelementes.

Das binäre System Harnstoff-*p*-Toluidin

(vom Frl. A. M. Koreneć).

Das obige System hat die Verfasserin mit thermischen und mikroskopischen Methoden untersucht, und zwar 14 Proben mit den Mischungen von verschieden prozentigen Zusammensetzungen durchgeführt. Auf Grund von Kristallisationstemperaturen einzelner Mischungen wurde ein Diagramm des obigen binären Systemes gezeichnet; einzelne Mischungen und Zustände, die bei der Kristallisation vorgekommen sind, sowie vor allem der Verlauf der Kristallisationskurve haben gezeigt, dass wir im binären Systeme Harnstoff-*p*-Toluidin eine Mischung mit gemischten Kristallen vor uns haben. Dasselbe stellt (nach Rozenboom) einen solchen Typus der Mischung dar, in welchem die Komponenten eine kontinuelle Reihe der gemischten Kristalle nicht bilden, und wobei die Kristallisationskurve einen Wendepunkt der Veränderung besitzt.

Sur les courbures des ordres supérieurs des courbes planes

(par D. M. Boltovśkyj).

L'auteur démontre le théorème suivant:

Rayon de courbure $R = const.$ est la seule famille des courbes dépendantes de deux paramètres telle que chaque courbe de la famille peut être ramenée à la coincidence avec chaque autre courbe de la même famille.

$\Omega(\delta, R) = 0$ — δ étant l'angle entre l'axe de la déviation et la normale de la courbe — est la seule famille des courbes dépendantes de trois paramètres avec telle propriété et chaque courbe entre dans une telle famille définié par l'équation absolument naturelle.

CLXXV. Sitzung am 26. September 1931.
Vorsitzender Hr. Levyćkyj.

1. Hr. G. Polanśkyj berichtet über vorläufige Ergebnisse seiner Sommerexkursionen im Gebiete von Polissje (Gouv. Pinsk).

2. Hr. R. Jendyk referiert seine Aufsätze: 1) eine Rezension auf die Arbeit vom Fürst „griechische Schädel". 2) Über die Wolga-Finnen auf Grund von kranologischen Untersuchungen.

3. Es wurde beschlossen, dem Hrn. Stefan Polanśkyj (Buenos Aires) für seine großartigen Spenden für das naturhist. Museum, aus einer Sammlung der Coleoptera und einer Bibliothek bestehend, den tiefsten Dank auszudrücken.

CLXXVI. Sitzung am 13. Oktober 1931.
Vorsitzender Hr. Levyćkyj.

1. Der Vorsitzende legt die Arbeit des Hrn. A. Smohorschevsky (Kyjiv) u. T. „Note sur les polynomes ortogonaux" (franz.) vor.

Dieselbe erscheint in laufenden Sitzungsberichten.

2. Hr. Polanśkyj berichtet über die von ihm während seiner Sommerexkursionen im Polissje gesammelten Landes- und Süsswasser-Mollusken.

Die Arbeit erscheint in der Sammelschrift der physiographischen Kommission.

Note sur les polynomes orthogonaux.
(par A. Smohorshewsky).

Soient

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$$

les valeurs de la variable indépendante x et

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{n-1}$$

les valeurs correspondantes de la fonction y.

Pour déterminer approximativement y sous la forme d'une fonction entière rationnelle de x:

$$y = A_0K_0(x) + A_1K_1(x) + \ldots + A_lK_l(x) \qquad (l \leq n-1),$$

posons

$$I_l^2 = \sum_{i=0}^{n-1} p_i \left[y_i - A_0K_0(i) - A_1K_1(i) - \ldots - A_lK_l(i) \right]^2 = min.,$$

où

$$K_0(x),\ K_1(x),\ \ldots,\ K_l(x)$$

sont les polynomes respectivement des degrés

$$0,\ 1,\ \ldots,\ l,$$

satisfaisant aux conditions suivantes d'orthogonalité et de normalité:

$$\sum_{i=0}^{n-1} p_i\, K_r(i)\, K_s(i) = \begin{cases} 1 & (r=s) \\ 0 & (r \neq s) \end{cases}$$

$$\left(p_i = \binom{n-1}{i} p^i q^{n-1-i},\ p > 0,\ q > 0,\ p + q = 1\right).$$

On en tire, comme l'a démontré M. Krawtchouk,*) l'égalité suivante:

$$K_m(x) = \sqrt{\binom{n-1}{m}(pq)^m}\ \frac{\Delta^m \left[\binom{n-m-1}{x-m} p^{x-m} q^{n-x-1}\right]}{\left[\binom{n-1}{x} p^x q^{n-1-x}\right]} \tag{1}$$

$$= \sqrt{\binom{n-1}{m}^{-1}(pq)^{-m}}\ \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{n-x-1}{m-i}\binom{x}{i} p^{m-i} q^i.$$

Dans cette note l'auteur démontre quelques propriétés des polynomes de M. Krawtchouk.

---

1. En introduisant la notation

$$C_m = \sqrt{\binom{n-1}{m}(pq)^{-m}}$$

et en posant dans (1) $q = 1 - p$ on obtient:

$$K_0(x) = 1,$$

$$K_1(x) = C_1\left[p - \frac{x}{n-1}\right],$$

$$K_2(x) = C_2\left[p^2 - 2p\frac{x}{n-1} + \frac{x(x-1)}{(n-1)(n-2)}\right],$$

$$K_3(x) = C_3\left[p^3 - 3p^2\frac{x}{n-1} + 3p\frac{x(x-1)}{(n-1)(n-2)} - \frac{x(x-1)(x-2)}{(n-1)(n-2)(n-3)}\right],$$

---

*) M. Krawtchouk. Sur une généralisation des polynomes d'Hermite. Comptes rendus, t. 189, p. 620.

M. Krawtchouk. Sur l'interpolation au moyen des polynomes orthogonaux. Записки Київського Сільсько-Господарського Інституту. Т. IV. 1929.

Dans cette dernière note M. Krawtchouk démontre la relation suivante:

$$a_{m+1} K_{m+1}(x) + a_m(x - b_m) K_m(x) + a_{m-1} K_{m-1}(x) = 0,$$

où a_{m+1}, a_m, a_{m-1} sont les nombres positifs; on en conclut que la suite

$$K_m(x),\ -K_{m-1}(x),\ K_{m-2}(x),\ -K_{m-3}(x),\qquad (-1)^m K_0(x)$$

est celle de Sturm.

$$K_m(x) = C_m\Big[p^m - \binom{m}{1} p^{m-1}\frac{x}{n-1} + \binom{m}{2} p^{m-2}\frac{x(x-1)}{(n-1)(n-2)} - \ldots$$
$$+ (-1)^m \frac{x(x-1)\ldots(x-m+1)}{(n-1)(n-2)\ldots(n-m)}\Big]$$
$$(m \leq n-1).$$

Analogiquement on a

$$K_0(x) = 1,$$
$$K_1(x) = -C_1\Big[q - \frac{n-x-1}{n-1}\Big],$$
$$K_2(x) = C_2\Big[q^2 - 2q\frac{n-x-1}{n-1} + \frac{(n-x-1)(n-x-2)}{(n-1)(n-2)}\Big],$$
$$K_3(x) = -C_3\Big[q^3 - 3q^2\frac{n-x-1}{n-1} + 3q\frac{(n-x-1)(n-x-2)}{(n-1)(n-2)} + \frac{(n-x-1)(n-x-2)(n-x-3)}{(n-1)(n-2)(n-3)}\Big],$$
$$\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot$$
$$K_m(x) = (-1)^m C_m\Big[q^m - \binom{m}{1} q^{m-1}\frac{n-x-1}{n-1} + \binom{m}{2} q^{m-2}\frac{(n-x-1)(n-x-2)}{(n-1)(n-2)} - \ldots$$
$$+ (-1)^m \frac{(n-x-1)(n-x-2)\ldots(n-x-m)}{(n-1)(n-2)\ldots(n-m)}\Big]$$
$$(m \leq n-1)$$

2. En introduisant encore les notations

$$k_m(x) = k_{m,n}(x) = k_{m,n,p}(x) = \frac{K_m(x)}{C_m p^m}$$
$$= 1 - \binom{m}{1}\frac{x}{p(n-1)} + \binom{m}{2}\frac{x(x-1)}{p^2(n-1)(n-2)} - \ldots + (-1)^m \frac{x(x-1)\ldots(x-m+1)}{p^m(n-1)(n-2)\ldots(n-m)}$$
$$(m \leq n-1),$$

on obtient les propriétés suivantes des polynomes de M. Krawtchouk:

I. $$\frac{d}{dx} k_{m,n}(x) = -\binom{m}{1}\frac{k_{m-1,n-1}(x)}{p(n-1)} - 1!\binom{m}{2}\frac{k_{m-2,n-2}(x)}{p^2(n-1)(n-2)} -$$
$$- 2!\binom{m}{3}\frac{k_{m-3,n-3}(x)}{p^3(n-1)(n-2)(n-3)} - \ldots - (m-1)!\frac{k_{0,n-m}(x)}{p^m(n-1)(n-2)\ldots(n-m)}$$
$$= -\sum_{i=1}^{m}\frac{\binom{m}{i} k_{m-i,n-i}(x)}{i p^i \binom{n-1}{i}}.$$

II. $$\Delta k_{m,n}(x) = -\frac{m}{p(n-1)} k_{m-1,n-1}(x) \qquad (\Delta x = 1).$$

III. $$k_{m,n}(x) = k_{m-1,n}(x) - \frac{x}{p(n-1)} k_{m-1,n-1}(x-1)$$
$$= k_{m-2,n}(x) - 2\frac{x}{p(n-1)} k_{m-2,n-1}(x-1) + \frac{x(x-1)}{p^2(n-1)(n-2)} k_{m-2,n-2}(x-2)$$

$$= k_{m-1,n}(x) + \sum_{i=1}^{l} (-1)^i \binom{l}{i} \frac{x(x-1)\ldots(x-i-1)}{p^i(n-1)(n-2)\ldots(n-i)}\, k_{m-1,n-i}(x-i).$$

IV. $x = [1 - k_1(x)]\, p(n-1)$,

$x(x-1) = [1 - 2k_1(x) + k_2(x)]\, p^2(n-1)(n-2)$,

$x(x-1)(x-2) = [1 - 3k_1(x) + 3k_2(x) - k_3(x)]\, p^3(n-1)(n-2)(n-3)$ etc.,

ou

$$\binom{x}{r} = \left[1 - \binom{r}{1} k_1(x) + \binom{r}{2} k_2(x) - \ldots + (-1)^r k_r(x)\right] p^r \binom{n-1}{r}.$$

V. Dans le cas particulier $p = \frac{1}{2}$ on a

$$k_m\left(\frac{n-1}{2} + x\right) = (-1)^m k_m\left(\frac{n-1}{2} - x\right),$$

$$(2) \qquad k_{2l+1,\, n-1,\, \frac{1}{2}}\left(\frac{n-1}{2}\right) = 0.$$

VI. Pour m et l entiers ($m \leq n-1$; $l \leq n-1$) on a

$$(3) \qquad k_m(l) = k_l(m).$$

On déduit de (3) que tous les polynomes $K_{m,n}(x)$ pour lesquels $m \leq p(n-1)$ ont les zéros dans l'intervalle $[0; 1]$.

En comparant (3) avec (2) on voit que pour $p = \frac{1}{2}$ et $n-1 = 2m$ on a

$$k_m(1) = k_m(3) = k_m(5) = \ldots = k_m(n-2).$$

Par conséquent

$$(x-1)(x-3)(x-5)\ldots(x-2m+1) = (-1)^m\, 1.3.5\ldots(2m-1)\, k_{m,\, 2m,\, \frac{1}{2}}(x).$$

VII. Tous les zéros du polynome $k_{m,n}(x)$ ou $K_{m,n}(x)$ sont situés dans l'intervalle $[0; n-1]$.

Cela résulte de l'alternance des zéros de deux polynomes voisins $k_m(x)$, $k_{m+1}(x)$ et de l'égalité

$$k_{n-1,n}(l) = \left(-\frac{q}{p}\right)^l \qquad l = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

montrant que dans chaque des intervalles

$$(4) \qquad [0; 1], [1; 2], \ldots, [n-2; n-1]$$

est situé un des zéros du polynome $K_{n-1,n}(x)$.

VIII. Dans chacun des intervalles (4) est situé au plus un des zéros du polynome $k_{m,n}(x)$.

En notant par r_l le nombre des changements de signe dans la suite (l est un nombre entier $< n-1$)

$$(5) \qquad k_{n-1,n}(l),\ k_{n-2,n}(l),\ \ldots,\ k_{1,n}(l),\ k_{0,n}(l),$$

on déduit facilement (cf. VII et la note de la page 1) que $r_{l+1} = r_l + 1$. De (3) on tire que la suite

$$k_{l,n}(n-1),\ k_{l,n}(n-2),\ \ldots,\ k_{l,n}(1),\ k_{l,n}(0)$$

est identique avec (5). Si la fonction $k_{l,n}(x)$ aurait deux zéros dans quelqu'un des intervalles (4), alors il devrait être $r_l < l$ et par conséquent $r_{l+1} < l + 1$. Par l'induction mathématique on démontre que dans ce cas le nombre des changements de signe dans la suite

$$k_{n-1,\,n}(n-1),\ k_{n-1,\,n}(n-2),\ \ldots,\ k_{n-1,\,n}(1),\ k_{n-1,\,n}(0)$$

serait $< n-1$, ce qui contredit au VII.

Kyiv, 15. X. 1931.

CLXXVII. Sitzung am 30. November 1931.

Vorsitzender Hr. Levyćkyj.

1. Hr. Zaryćkyj berichtet über seine u. T. „Einige Reihen und ihre Anwendungen" (ukrain.) in den Annalen der Akad. der Wissensch. in Kyjiv ershienene Arbeit.

2. Der Vorsitzende legt hiemit die Einladung zum internationalen Mathematiker-Kongreß in Zürich (September 1932) vor.

3. Derselbe bekommt zum Gutachten die Arbeit des Hrn. N. Čajkowśkyj (Odessa) u. T. „Über systematische Entwickelung der Irrationalzahlen" (deutsch).

4. Hr. Kučer hält einen Vortrag aus Anlaß der 100-jährigen Feier der Entdeckungen des M. Faraday.

5. Hr. Tysovśkyj erstattet einen kurzen Bericht über die unlängst publizierten Anschauungen von Schrammen — betreffend das Hervortreten von morphologischen Eigenschaften bei den Tieren.

6. Hr. Zaryćkyj stellt den Antrag, die Sektion solle womöglich bald zur Herausgabe von populär-wissenschaftlichen Publikationen schreiten.

CLXXVIII. Sitzung am 5. Februar 1932.

Vorsitzender Hr. Levyćkyj.

1. Der Vorsitzende gibt die Übersicht der Tätigkeit der Sektion, sowie einzelner Kommissionen im J. 1931.

2. Hr. Muzyka berichtet über seine neuesten Veröffentlichungen in „Medizinischen Berichten" 1931 Heft 12. (polnisch) u. zw.: a) die Blutgruppen in der Pathologie, b) (mit Dr. Kordiuk) Beitrag zur sg. Agranulozitose.

3. Hr. Polanśkyj legt seine Arbeit u. T. „Einige Bemerkungen über die chronologische Stellung der jungpaläolitischen Station von Żurawka (Poltawa) und der jungpleistozänischen Terrassen des Mittleren Dnipro" vor.

Dieselbe erscheint in der Sammelsch. der physiogr. Kommission Heft IV—V.

CLXXIX. Sitzung am 1. April 1932.

Vorsitzender Hr. Levyćkyj.

1. Die Sektion hat beschlossen, an der Goethe-Feier, die nächstens die Ševčenko-Gesellschaft veranstalten wird, mit einem Referat über Goethe als Naturhistoriker teil zu nehmen.

2. Der Vorsitzende legt eine Note des Hrn. Jaremkevyč u. T. „Zwei spezielle Sextiken“ vor (sieh unten).

3. Hr. Kubijovyč berichtet über den Verlauf des II. ukrainischen wissenschaftlichen Tages in Prag.

4. Derselbe legt seine Arbeit u. T. „Die obere ökomenische Grenze in der Bukowina“ vor.

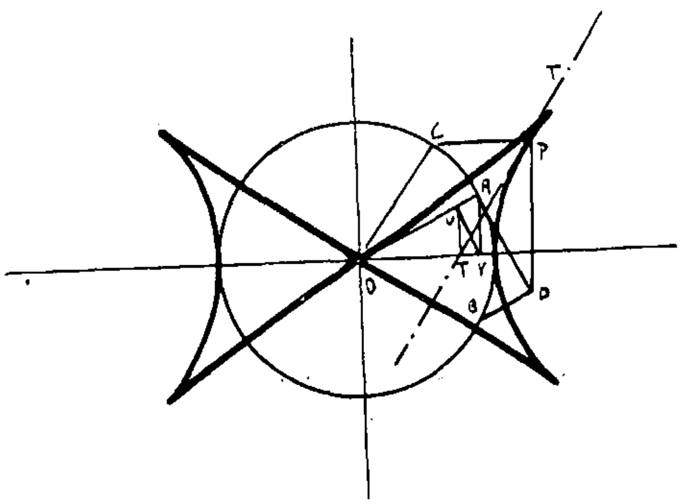
BERICHT.

Zwei spezielle Sextiken.

(von J. Jaremkevyč).

Die beiden speziellen Sextiken, deren Konstruktion ich in dieser Note angebe, eignen sich sehr für Beispiele zur Kurvendiskussion und mögen sich ihrer die Herren Autoren der betreffenden Lehrbücher annehmen.

1. Die Falterkurve. Es sei ein Kreis $O(r=1)$ gegeben, durch dessen Mittelpunkt das Achsenkreuz gelegt werden möge. Sind A und B



zwei sich zu OX symmetrisch bewegende Punkte des Kreises, so soll die Projektion von B auf die in A errichtete Tangente D heißen. Es sei noch ein Punkt C gegeben, so, daß $\sphericalangle XOC = 2XOA$ ist. Zieht man nun $CP \parallel OX$, $DP \parallel OY$, dann ist der Schnittpunkt P der beiden Geraden ein Punkt der Kurve. Ist $\sphericalangle\, XOA = \omega$, dann sind ihre Gleichungen:

$$x = \cos\omega\,(1+2\sin^2\omega), \quad y = \sin 2\omega$$

bzw.

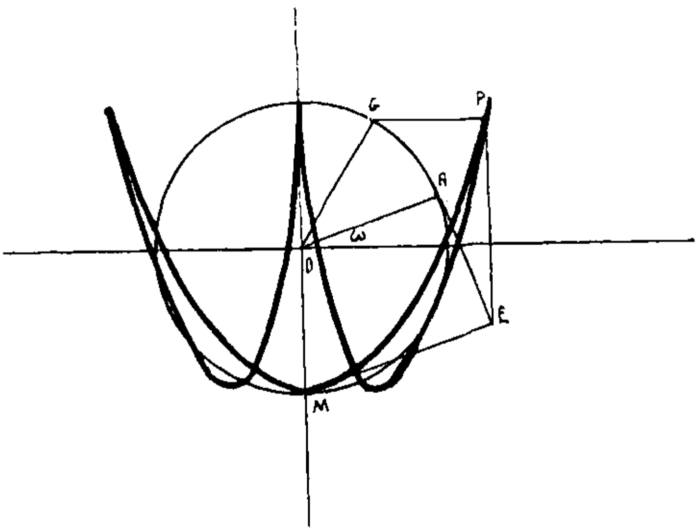
$$y^6 + 4x^2(x^2-y^2) + 6y^4 + (9y^2-4x^2) = O$$

und in Linienkoordinaten:

$$(9u^2 - 4v^2)^3 = 729u^4.$$

Es ist äußerst interessant, nach den Singularitäten und Brennpunkten dieser ganz speziellen Sextik zu forschen. Nur noch die Tangentenkonstruktion sei hier mitgeteilt: Man führt $AV \perp OX$, $Vv \perp OA$, $vT \perp OX$, dann ist TP die Tangente der Kurve in P.

2. Die Wieleitnersche Kurve. Die Kurve hat im Reellen zwei Doppelpunkte, eine gewöhnliche Spitze und zwei Schnabelspitzen. Es sei ein Kreis wie im vorigen Fall gegeben, A wieder ein sich auf dem Kreise bewegender Punkt; außerdem sei noch der Punkt $M(O, -1)$ fixiert. Ist E die Projektion von M auf die in A errichtete Tangente, ist weiter $\sphericalangle\, XOG = 3XOA$, und macht man $EP \parallel OY$, $GP \parallel OX$,



dann ist P ein Punkt der Kurve. Wegen ihrer W-ähnlichen Gestalt sei sie zur Ehren des Verfassers der „Speziellen ebenen Kurven" die Wieleitnersche benannt. Ihre Gleichungen sind:

$$x = \cos\omega\,(1 + \sin\omega), \quad y = \sin 3\omega.$$

Die Koordinaten der Schnabelspitzen ergeben sich zu $x = \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}$, $y = 1$.