D. MORDOUKHAY-BOLTOVSKOY (Rostov-Don).

Sur les courbures des ordres supérieures des courbes planes.

§ 1. La forme de la courbe dans un point est caracterisée par la courbure ou par son rayon de courbure

$$R=\left|\frac{(1+y'^2)}{y''}\right| \tag{1}$$

dont l'expression dépend de la seconde derivée y''. La caractéristique suivante est la direction de l'axe de la déviation[1]), qu'on peut définir de la manière suivante: on réunit le point M avec le milieu de la corde infiniment voisine et parallèle à la tangente. L'angle δ, que l'axe de la deviation fait avec la normale est défini par la formule suivante:

$$tg\delta=y'-\frac{(1+y'^2)\,y'''}{3\,y''^2} \tag{2}$$

de sorte que δ depend de la troisième derivée.

La notion de l'axe de la déviation se géneralise de la manière suivante.

On prend dans M la courbe osculatrice de la famille

$$\Phi\,(x,\,y,\,a_1,\,a_2 \qquad a_n)=0 \tag{3}$$

avec n paramètres $a_1\ a_2...a_n$ et on porte sur la courbe donnée:

$$(f\ x,\,y)=o \tag{4}$$

des axes égaux

$$\smile MP=\smile MR$$

On mène les droites PQ et RS, qui satisfont aux conditions:

1) PQ ‖ RS

2) Les arcs MQ et MS qui sont coupés sur la courbe (4) et la courbe osculatrice (3) sont e'gaux.

La position limite de OC, qui réunit les milieux de RS... 0 et PQ... C sera l'axe de la déviation de f=o par rapport à $\Phi=0$.

---

[1]). Transon. Recherche sur la courbure des lignes et des surfaces. Journ. de Liouville. 1841. t. 4. p. 191.

Salmon-Fiedler. Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven. Leipzig 1882.

D. Mordoukhay-Boltovskoy. Sur les courbure des lourbes planes. Annales de l'Inst. Polyt. de Varsovie 1907.

§ 2. En désignant les coordonnées de (P, Q) par $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, (R, S) par (ξ_1, η_1) (ξ_2, η_2) et en prenant pour O.. OM, pour OX... la tangente MT nous aurons l'expression suivante de la condition 1)

$$(y_2 - y_1)(\xi_2 - \xi_1) - (x_2 - x_1)(\eta_2 - \eta_1) = 0 \tag{5}$$

En vertu de la seconde condition

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi(s_1) \ , \ x_2 = \varphi(s_2) \\ y_1 &= \psi(s_1) \ , \ y_2 = \psi(_2y) \\ \xi_1 &= \overline{\varphi}\,(s_1) \ , \ \xi_2 = \overline{\varphi}\,(s_2) \\ \eta_1 &= \overline{\psi}\,(s_1) \ , \ \eta_2 = \overline{\psi}\,(s_2) \end{aligned} \tag{6}$$

où

$$\varphi(s) = \sum_{j=1}^{j=\infty} a_j s^j \ , \ a_1 = 1$$

$$\psi(s) = \sum_{j=1}^{j=\infty} b_j s^j \ , \ b_1 = 0$$

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}(s) &= \sum_{j=1}^{j=\infty} \alpha_j s^j \ , \ \alpha_1 = 1 \\ \overline{\psi}(s) &= \sum_{j=1}^{j=\infty} \beta_j s^j \ , \ \beta_1 = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

La condition de l'osculation de (3) et (4) nous donne

$$\left.\begin{aligned} \alpha_j &= a_j \\ \beta_j &= b_j \end{aligned}\right\} j \leq n \tag{9}$$

L'équation (5) établit la liaison entre s_1, s_2. Tous les termes $s_1{}^k s_2{}^l$ ($k \leq n$, $l \leq n$) se détruisent et nous avons après l'abrèviation par $(s_2 - s_1)$ l'équation entre s_2, s_1, dans laquelle nous n'écrivons que les termes de $\overline{n+1}$, $\overline{n+2}$ degrés par rapport à s_1, s_2:

$$(b_{n+1} - \beta_{n+1})(s_2{}^{n+1} - s_1{}^{n+1}) + (b_{n+2} - \beta_{n+2})(s_2{}^{n+1} - s_1{}^{n+1}) + \\ + b_1 \alpha_{n+1} (s_2 + s_1)(s_2{}^{n+1} - s_1{}^{n+1}) + \qquad = 0 \tag{10}$$

Dans le développement

$$s_2 = (s_2)_0 + (s'_2)_0 s_1 + \frac{(s''_2)_0}{2} s_1{}^2 + \tag{11}$$

$(s_2)_0 = 0$, $(s'_2)_0 = \lim\limits_{s_1=0} \left(\dfrac{s_2}{s_1}\right)$ doit non seulement réel, mais aussi négatif parce que MP et MQ ont des signes différents.

De (10) on tire :

$$(b_{n+1} - \beta_{n+1})(s'_2{}^{n+1} - 1) + (b_{n+2} - \beta_{n+2})(s'_2{}^{n+1} - 1)\, s + \\ + b_1 \alpha_{n+1} s_1 (s'_2 - 1)(s'_2{}^{n+1} - 1) + \quad . \quad . \quad = 0 \tag{12}$$

Nous n'aurons qu'une racine réelle et négative $(s'_2)_0 = \lim\limits_{s_1=0} \dfrac{s_2}{s_1} = -1$ que pour $\overline{n+1}$ *pair* et n *impair*.

En posant $\frac{s_2}{s_1} = \omega$ nous aurons:

$$(b_{n+1} - s_{n+1})(\omega^{n+1} - 1) + (b_{n+2} - s_{n+2})(\omega^{n+2} - 1)\, s + \\ + b_1 \alpha_{n+1} s_1 (\omega + 1)(\omega^{n+1} - 1) + \qquad = 0$$

et par différentiation:

$$(n+1)(b_{n+1} - s_{n+1})\omega^n \omega' + (b_{n+2} - s_{n+2})(\omega^{n+2} - 1) + b_1 \alpha_{n+1}(\omega+1)(\omega^{n+1} - 1) \\ + A s_1 + B s_1^2 + \qquad = 0$$

Pour $s_1 = 0$ $\qquad \omega_1 = -1$

$$\omega'_0 = -\frac{2\,(b_{n+2} - s_{n+2})}{(n+1)\,(b_{n+1} - s_{n+1})}$$

$$\frac{s_2}{s_1} = \omega = \omega_0 + \omega'_0\, s + \qquad = -1 - \frac{2\,(b_{n+2} - s_{n+2})\, s_1}{(n+1)\,(b_{n+1} - s_{n+1})}$$

$$s_2 = -s_1 - \frac{2\,(b_{n+2} - s_{n+2})\, s_1^2}{(n+1)\,(b_{n+1} - \beta_{n+1})}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{(b_{n+2} - \beta_{n+2})\, s_1^2}{(n+1)\,(b_{n+1} - \beta_{n+1})} +$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2} = b_2 s_1^2 +$$

$$tg\delta_n = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = -\frac{(b_{n+2} - s_{n+2})}{(n+1)\, b_2\, (b_{n+1} - s_{n+2})} \tag{13}$$

Pour $n=1$

$$tg\delta_1 = tg\delta = -\frac{\beta_3}{2\,\beta_2^2}$$

$y_1 = \frac{s_1^2}{2\varrho} - \frac{\varrho'}{6\varrho^3} s_1^3 +$ $\qquad \varrho$ étant le rayon de la courbure et par suite

$$tg\delta = \frac{\varrho'}{3\varrho} \tag{14}$$

d'où on tire facilement la formule (2) de Transon.

§ 3. Nous obtenons la première série des courbures et des vecteurs des courbures:
$(\sigma_1, \tau_1)\ (\sigma_1, \tau_2)\ (\sigma_3, \tau_3) \quad \ldots \quad (\sigma_n, \tau_n)$ en commençant par l'axe de la déviation. $\sigma_1 = \delta$ est l'angle entre cette axe et normale. τ est la longueur du vecteur de l'axe de la déviation définie par l'intersection avec l'axe de la déviation infiniment voisine. La seconde paire pour l'axe de la déviation du second ordre (σ_2, τ_2) s'obtient en prenant pour $\Phi = o$ la courbe $\sigma_1 =$const., pour laquelle on obtient $\tau = \infty$. De la même manière on construit

$$(\sigma_3, \tau_3)\ (\sigma_4, \tau_4) \qquad (\sigma_n, \tau_n).$$

Il est important de souligner le rôle suivant de l'axe de la déviation dans la théorie des courbes planes:

Il faut distinguer trois classes suivantes des grandeurs:

I) dépendentes du choix des axes des coordonnées *OX, OY.*

II) independentes de OX, OY, mais qui peuvent dépendre du choix d'un point de la courbe c'est à dire de la coordonnée sur la courbe.

Tel est l'arc s, qui peut être compté d'un point quelconque ou l'angle de la contingence ω.

III) Les grandeurs qui ne dependent que de la forme de l'élément de la courbe en point M.

Les équations naturelles de deux types:

$$\Omega(\varrho, \omega) = 0 \tag{15}$$

$$\Theta(\varrho, s) = 0 \tag{16}$$

lient les grandeurs de II, III classes et par conséquent sont indépendentes de choix des coordonnées (x, y).

Elles donnent pour y l'équation différentielle du second ordre, qui depend du choix du point initial de s et ω.

Par suite les intégrales contiennent 3 constantes arbitraires, qui sont définies, si on donne OX, OY.

Remarquons qu'on doit les grandeurs de II classe diviser en deux sous-classes:

$\mathrm{II})_1$ qui dépendent de la coordonnée sur courbe ou de M_0

$\mathrm{II})_2$ qui ne dépendent pas de M_0 et sont définies seulement par l'élément de la courbe, auquel appartient le point M et par consequent se conservent, si on enlève la reste de la courbe.

Tel est l'équation:

$$H(\varrho, \delta) = 0 \tag{17}$$

oú ϱ est le rayon de la courbure, δ l'angle que 'axe de la déviatinn fait avec la normale de la courbe. Nous l'appelerons équation absolument—naturelle.

§ 4. La seconde série

$$(\pi_1, \varrho_1)\ (\pi_2, \varrho_2)\ (\pi_3, \varrho_3)\ . \quad . \ . \ .$$

se commence par $\pi_1 = 0$ et ϱ_1 vecteur-normale à la courbe égal au rayon de la courbure ϱ.

Il est facile à voir qu'en portant sur la courbe d'un point ordinaire M dans les deux côtes $\smile MP = \smile MQ = s$ et en réunissant M et le milieu $(PQ = 0)$ nous obtenons comme position limite la normale de la courbe.

Le terme suivant c'est l'axe circulaire du premier ordre.

Cette axe s'obtient comme la position limite de la droite qu'on obtient de la manière suivante:

On porte sur la courbe donnée

$$\smile MQ = \smile MP = s$$

et sur la conference osculatrice

$$\smile MS = \smile MR = s$$

et les milieux des cordes PQ et RS on réunit par la droite OQ.

Les axes circulaires des ordres superiéurs s'obtiennent de la même façon comme les axes de la déviation en prenant pour la courbe osculatrice (3) $\pi_1 = \mathrm{const}$

Nous avons:

$$\begin{aligned} x_1&=\varphi\ (s)\ ,\ x_2=\varphi\ (-s)\\ y_1&=\psi\ (s)\ ,\ y_2=\psi\ (-s)\\ \xi_1&=\overline{\varphi}\ (s)\ ,\ \xi_2=\overline{\varphi}\ (-s)\\ \eta_1&=\overline{\psi}\ (s)\ ,\ \eta_2=\overline{\psi}\ (-s)\end{aligned} \tag{18}$$

$$\varphi(s)=\sum_{j=1}^{j=\infty} a_j s^j\ ,\ a_1=1 \tag{7}$$

$$\psi(s)=\sum_{j=1}^{j=\infty} b_j s^j\ ,\ b_1=0$$

$$\overline{\varphi}\ (s)=\sum_{j=1}^{j=\infty} \alpha_j s^j\ ,\ \alpha_1=0$$

$$\overline{\psi}\ (s)=\sum_{j=1}^{j=\infty} \beta_j s^j\ ,\ \beta_1=0$$

$$\left.\begin{aligned} a_i&=\alpha_i\\ b_i&=\beta_i\end{aligned}\right\}\ i\leq n \tag{9}$$

En supposant l'osculation des $n=2m-2$ ou de $n=2m-1$ ordres nous allons définir la position limite (O de la droite qui réunit les milieux des cordes PQ et RS).

Les coordonnées de O (milieu de PQ)

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2}{2}=\sum_{j=1}^{j=\infty} a_{2j}\ s^{2j}$$

$$\overline{y}=\frac{y_1+y_2}{2}=\sum_{j=1}^{j=\infty} b_{2j}\ s^{2j}$$

de C (milieu de RS):

$$\overline{\xi}=\frac{\xi_1+\xi_2}{2}=\sum_{j=1}^{j=\infty} \alpha_{2j}\ s^{2j}$$

$$\overline{\eta}=\frac{\eta_1+\eta_2}{2}=\sum_{j=1}^{j=\infty} \beta_{2j}\ s^{2j}$$

Pour l'angle $(CO\,M\,N)$ nous avons la formule suivante:

$$tg\pi_m=\frac{a_{2n}-\alpha_{2n}}{b_{2n}-\beta_{2n}} \tag{19}$$

§ 5. Au moyen d'un calcul très pénible mais tout à fait élémentaire on obtient d'abord

$$a_4=-\frac{y''\ y'''}{8}\qquad b_4=\frac{y^{(IV)}-2y'''}{24}$$

Pour avoir l'expression génerale des a_4, b_4 il faut exprimer y'', y''', $y^{(IV)}$ en ϱ, ϱ', ϱ''.... $\varrho' = \frac{d\varrho}{ds}$ et remplacer ϱ, ϱ', ϱ'' par leurs expressions générales en x, y, y', y'', y''', $y^{(IV)}$.

Pour le système spécial des axes des coordonnées ($O \equiv M$, $OX \equiv MT$) $\varrho = \frac{1}{y''}$ $\quad \varrho' = -\frac{y'''}{y''^2}$

$$\varrho'' = \frac{(3y''^3 - y^{(IV)})\, y'' + 2y'''^3}{y''^3}$$

d'où

$$y'' = \frac{1}{\varrho} \qquad y''' = -\frac{\varrho'}{\varrho^2} \qquad y^{(IV)} = \frac{3}{\varrho^3} - \frac{\varrho''}{\varrho^2} + \frac{\varrho'^2}{\varrho^3} \tag{20}$$

$$a_4 = \frac{\varrho'}{8\varrho^3} \qquad b_4 = \frac{1 - \varrho\varrho'' + \varrho'^2}{24\,\varrho^3} \tag{21}$$

En définissant la circonference osculatrice par les équations suivantes:

$$\xi = \varrho \sin \frac{s}{\varrho}$$

$$\eta - \varrho = \varrho \cos \frac{s}{\varrho}$$

on obtient (22

$$\xi = \varrho \left(\frac{s}{\varrho} - \frac{s^3}{6\varrho^3} + \qquad \right)$$

$$\eta = \frac{s^2}{2\varrho} - \frac{s^4}{24\varrho^3} +$$

d'où $\quad \alpha_4 = 0 \qquad \beta_4 = -\frac{1}{24\varrho^3}$

$$tg\pi_2 = \frac{3\varrho'}{2 - \varrho\varrho'' + \varrho'^2} \tag{23}$$

En remplaçant ϱ par son expression générale (1) on obtient:

$$tg\,\varepsilon = \frac{3\,(A + B\lambda)\, y''^2}{C + D\lambda + E\lambda^2} \tag{24}$$

$\lambda = 1 + y'^2$
$A = 3\, y' y''^2$
$B = -y'''$
$C = y''^2\, (2y''^2 + 9y'^2 y''^2 - 6y' y''')$
$D = y''^2\, (-3\, y''^2 - 10\, y' y''') + 2\, y'''^2$
$E = y^{(IV)} y'' + y'''^2$

L'équation

$$\Theta\,(\delta, \varepsilon) = 0 \tag{25}$$

est l'équation s p é c i f i q u e de la courbe qui caractérise les propriétés i n t é r i e u r e s de la courbe (entre les grandeurs des II, III classes), qu'on doit distinguer des propriétés e x t é r i e u r e s qui se définissent par la d i m e n s i o n de la figure donnée et par le choix des axes des coordonnées.

Tel est l'équation entre l'angle de la contingence et l'angle de la torsion dans la théorie des courbes de la double courbure.[2])

§ 6. Comme la courbure ordinaire les courbures des ordres supérieures sont des invariants par rapport à la groupe des transformations des coordonnées:

$$x = x_0 + x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha \qquad (26)$$
$$y = y_0 + x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha$$

L'ensemble des courbures (nous dirons — la famille) définie par l'équation

$$\Theta\ (x, y, y' \ldots y^{(n)}) = R_n = const \qquad (27)$$

où $\Theta = R_n$ est la courbure de n—me ordre reste invariant pour les transformations des coordonnées (26): chaque courbe de la famille (27) passe dans une courbe de la même famille.

Mais on ne peut pas conclure, que chaque courbe de la famille peut être transformée en chaque courbe donnée de cette famille comme cela a lieu pour la circonférence dont tous les points ont la même courbure.

Si

$$H\ (x, y, c_1, c_2 \ldots c_n) = 0$$

se transforme en

$$H\ (x_1, y_1, c_1^{(1)}, c^{(1)}_2 \ldots c^{(1)}_n) = 0$$

nous defons avoir

$$c^{(1)}_j = \varphi_j\,(c_1\ c_2 \ldots c_n, x_0, y_0 \ldots \alpha)$$
$$j = 1, 2 \ldots n$$

Pour que pour les (x_0, y_0, α) convenables et c_j donnés nous pouvions obtenir pour $c^{(1)}_j$ les valeurs arbitrairement données, il est nécessaire, que $n \leq 3$.

De cette remarque la discussion de la courbure en sens ordinaire ($n=2$) et de l'axe de la déviation acquérit intérêt particulier.

La discussion, qui suit, montre que pour $n=2$ nous avons l'équation:

$$\Theta\ (x, y, y', y'') = 0$$

qui pour Θ arbitraire ne peut pas définir chaque courbe donnée.

Mais pour $n=3$ nous obtenons notement l'équation absolument naturelle, qui définit les courbes, qui ne diffèrent que par la position c'est à dire les mêmes courbes, mais dans les positions différentes et il faut ajouter, que cette équation est la seule possible qui caractérise en ce sens—la courbe plane.

Si nous ajouterons à la transformation des coordonnées encore la transformation de la similitude et au lieu de (26) nous prendrons les équations suivantes:

---

[2]) Hoppe. Darstellung der Curven durch Krümmung und Torsion. Journal de Crelle, P. 63. 1863. p. 122.

$$x=\varkappa\ (x_0+x_1 cos\ \alpha-y_1\ sin\ \alpha) \qquad (28)$$
$$y=\varkappa\ (y_0+x_1 sin\ \alpha+y_1\ cos\ \alpha)$$

il sera bien naturel d'attendre qu'au lieu de l'équation absolument naturelle se placera l'équation specifique de la courbe.

Dans ce mémoire je ne donne pas la démonstration de cette proposition, qui nous allons tout de suite développer, mais beaucoup plus compliquée.

§ 7. Nous allons d'abord demontrer que chaque équation differentielle du second ordre:

$$f\ (x,\ y,\ y',\ y'')=0 \qquad (29)$$

qui définit la famille des courbes planes avec la propriété de § 6 doit se ramener à la forme suivante:

$$Ry''=(1+y'^2)^{3/2} \qquad (30)$$

et exprimer l'invariabilité de la courbure.

Pour définir graduellement la forme de f nous divisons la transformation (26) en deux transformations de la translation:

$$x=x_0+x_1 \qquad (31)$$
$$y=y_0+y_1$$

et transformation de la rotation

$$x_1=x_2\ cos\ \alpha-y_2\ sin\ \alpha$$
$$y_1=x_2\ sin\ \alpha+y_2\ cos\ \alpha \qquad (32)$$

L'équation

$$f\ (x+x_0,\ y+y_0,\ y',\ y'')=0$$

est satisfaite pour toutes les valeurs de (x_0, y_0) et par suite, quand on les remplace par des fonctions arbitraires de (x,y).

En posant $x_0=-x$, $y_0=-y$ nous obtenons:

$$f\ (o,\ o,\ y',\ y'')=0.$$

Ainsi nous pouvons supposer que dans le côté gauche de (29) $(x,\ y)$ n'entrent pas explicitement.

Pour la rotation de $OX-OY$ nous avons:

$$f\left[\frac{sin\ \alpha+y'_1\ cos\ \alpha}{cos\ \alpha-y'_1\ sin\ \alpha},\ \frac{y''_1}{(cos\ \alpha-y'_1\ sin\ \alpha)^3}\right]=0$$

Si l'équation $f\,(y',\ y'')=0$ nous donne $y''=\Theta\,(y')$ nous avons

$$y''_1=(cos\ \alpha-y'_1\ sin\ \alpha)^3\ \Theta\left(\frac{sin\ \alpha+y'_1\ cos\alpha}{cos\ \alpha-y'_1\ sin\ \alpha}\right)=\Theta\ (y'_1)$$

Cette équation doit avoir lieu identiquement pour chaque valeur de y'_1, car autrement $y'_1=const$ et dans ce cas l'équation (29) se ramène à $y''=0$ c'est à dire à (30), correspondant à $R=\infty$.

Donc

$$(\cos \alpha - \xi \sin \alpha)^3\, \Theta\left(\frac{\sin \alpha + \xi \cos \alpha}{\cos \alpha - \xi \sin \alpha}\right) = \Theta(\xi).$$

Pour $\xi = 0$ $\cos^3\alpha\, \Theta\,(tg\alpha) = c$, c étant constante.

En posant $tg\alpha = u$ nous avons

$$\Theta\,(u) = c\,(1 + u^2)^{3/2}$$

et l'équation (29) se ramène à la forme

$$y'' = c\,(1 + y'^2)^{3/2}$$

c'est à dire à (30).

§ 8. Nous allons maintenant faire la même discussion pour l'équation du 3. ordre:

$$f\,(x, y, y', y'', y''') = 0 \tag{33}$$

D'abord par la transformation de la translation nous nous persuadons qu'elle se ramène à la forme

$$f\,(y', y'', y''') = 0 \qquad (34),$$

d'où

$$y''' = \Theta\,(y', y''). \tag{34}$$

En passant ensuite à la rotation nous avons

$$y'''_1(\cos \alpha - y'_1 \sin \alpha) + 3 \sin \alpha\, y''^2_1 = (\cos \alpha - y'_1 \sin \alpha).$$

$$.\,\Theta\left[\frac{\sin \alpha + y'_1 \cos \alpha}{\cos \alpha - y'_1 \sin \alpha}, \frac{y''_1}{(\cos \alpha - y'_1 \sin \alpha)^3}\right] \tag{35}$$

d'oú en vertu de (34)':

$$\Theta\,(y'_1, y''_1)\,(\cos \alpha - y'_1 \sin \alpha) + 3 \sin \alpha\, y''^2_1 = (\cos \alpha - y'_1 \sin \alpha)^5.$$

$$.\,\Theta\left[\frac{\sin \alpha + y'_1 \cos \alpha}{\cos \alpha - y'_1 \sin \alpha}, \frac{y''_1}{(\cos \alpha - y'_1 \sin \alpha)^3}\right] \qquad (35$$

Prenons d'abord le cas où cette égalité est identique par rapport à y'_1 et y''_1.

Pour obtenir Θ en fonction de (ξ, η)

$$\xi = y'_1 \qquad \eta = y''_1$$

nous allons différentier par rapport à (ξ, η, α) l'identité:

$$\frac{\Theta\,(\xi,\eta)(\cos\alpha - \xi \sin\alpha) + 3 \sin\alpha\, \eta^2}{(\cos \alpha - \xi \sin \alpha)^5} = \Theta\left[\frac{\sin \alpha + \xi \cos \alpha}{\cos \alpha - \xi \sin \alpha}, \frac{\eta}{(\cos\alpha - \xi\sin\alpha)^3}\right]$$

ou

$$\Theta\,(\xi, \eta)\,(\cos \alpha - \xi \sin \alpha) + 3 \sin \alpha\, \eta^2 = (\cos \alpha - \xi \sin \alpha)^5\, \Theta\,(u,v)$$

$$u = \frac{\sin \alpha + \xi \cos \alpha}{\cos \alpha - \xi \sin \alpha}, \quad v = \frac{\eta}{(\cos \alpha - \xi \sin \alpha)^3}$$

Dans les égalites qu'on obtient

$$(\cos a-\xi \sin a)\frac{\partial \Theta}{\partial \xi}-\Theta \sin a=-3(\cos a-\xi \sin a)^4 \sin a+$$

$$+(\cos a-\xi \sin a)^5\left[\frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial u}u'_\xi+\frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial v}v'_\xi\right] \quad (37)$$

$$(\cos a-\xi \sin a)\ \frac{\partial \Theta}{\partial \eta}+6 \sin a.\,\eta=(\cos a-\xi \sin a)^5\frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial v}v'_\eta \quad (38)$$

$$\Theta(-\sin a-\xi \cos a)+3\cos a\,\eta^2=5(\cos a-\xi \sin a)^4(-\sin a-\xi \cos a)\overline{\Theta}+$$

$$+(\cos a-\xi \sin a)^5\left[\frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial u}u'_\xi+\frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial v}v'_\xi\right] (39)$$

$$\overline{\Theta}=\Theta(u,v)$$

En posons les valeurs suivantes:

$$u'_\xi=\frac{1}{(\cos a-\xi \sin a)^2} \qquad v'_\xi=\frac{3\eta \sin a}{(\cos a-\xi \sin a)^3}$$

$$u'_a=\frac{1+\xi^2}{(\cos a-\xi \sin a)^2} \qquad v'_a=\frac{3\eta(\sin a+\xi \cos a)}{(\cos a-\xi \sin a)^4}$$

et ensuite posons $a=0$.

De (19) on obtient l'équation partielle suivante

$$4\Theta\xi+3\eta^2=(1+\xi^2)\frac{\partial \Theta}{\partial \xi}+3\eta\xi\frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \quad (41)$$

avec le système des équations ordinaires

$$\frac{d\xi}{1+\xi^2}=\frac{d\eta}{3\eta\xi}=\frac{d\Theta}{4\Theta\xi-3\eta^2}$$

avec deux intégrales:

1) qu'on obtient de l'equation

$$\frac{3\xi d\xi}{1+\xi^2}=\frac{d\eta}{\eta}$$

et qui se ramène à

$$\eta=D(1+\xi^2)^{3/2} \quad (42)$$

et 2) qu'on obtient de l'equation:

$$\frac{d\xi}{1+\xi^2}=\frac{d\Theta}{4\xi\Theta+3D^2(1+\xi^2)^3}$$

ou

$$\frac{d\Theta}{d\xi}=4\xi\Theta=3D^2(1+\xi^2)^3$$

d'où

$$\Theta=(1+\xi^2)^2\left[C+D^2\xi\right]$$

L'integrale genérale de (41) est

$$\Theta=\frac{3\eta^2\xi}{1+\xi^2}+(1+\xi^2)^2\varphi\left[\frac{(1+\xi^2)^{3/2}}{\eta}\right]$$

φ étant le signe de la fonction arbitraire.

Ainsi la forme de l'équation (29) doit être suivante:

$$y''' = \frac{3y''^2 y'}{1+y'^2} + (1+y'^2)\,\varphi\left[\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}\right]$$

ou

$$y' - \frac{y'''(1+y'^2)}{3y''^2} = \psi\left[\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}\right] \tag{43}$$

ou en définitive

$$tg\,\delta = \psi(R) \tag{43'}$$

§ 9, Il nous reste encore à demontrer que l'égalité (36) ne peut pas être l'équation invariante par rapport à la transformation (26).

En effet en vertu de (7) nous devons avoir

$$\frac{\Theta\,(y'_1 y'')\,(\cos a - y'\sin a) + 3\sin a\, y''^2}{(\cos a - y'\sin a)^2} -$$

$$-\Theta\left[\frac{\sin a + y'\cos a}{\cos a - y'\sin a}, \frac{y''}{(\cos a - y'\sin a)^3}\right] = H\left[\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}\right]$$

Eo posant

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \zeta,\ y' = \xi$$

nous avons

$$\frac{\Theta\left[\xi, \zeta\sqrt{1+\xi^2}\right](\cos a - \xi\sin a) + 3\sin a\,\xi^2}{(\cos a - \xi\sin a)^2} -$$

$$-\Theta\left[\frac{\sin a + \xi\cos a}{\cos a - \xi\sin a}, \frac{\zeta\sqrt{1+\xi^2}}{(\cos a - \xi\sin a)^3}\right] = H(\xi)$$

pour ξ, ζ, a arbitraires.

En posant $\xi=0$ nous aurons pour (ξ, a) arbitraires:

$$\Theta\,(0,\zeta)\frac{1}{\cos a} + H(\zeta) = \Theta\left(tg\,a, \frac{\zeta}{\cos^3 a}\right)$$

Pour $a=0$ nous avons $H(\zeta)=0$.

En résumant nous pouvons dire que

$$R = const$$

est la seule famille des courbes dépendentes de deux paramètres telle que chaque courbe de la famille peut être ramenée à la coincidence avec chaque autre courbe de la même famille.

$$\Omega\,(\delta, R) = 0$$

δ étant l'angle entre l'axe de la déviation et la normale de la courbe, est la seule famille des courbes dépendentes de, 3 paramètres avec telle propriété et pour chaque courbe autre dans une telle famille définié par l'équation absolument-naturelle.