М. КУРЕНСЬКИЙ (Ленінград).

Про узагальнення варіяції Lagrange'а для лінійного диференціяльного рівнання другого порядку.

Щоб знайти загальний інтеґрал неоднородного лінійного рівнання другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \qquad (1)$$

коли знайдено буде загальний інтеґрал

$$u = c_1u_1 + c_2u_2 \qquad (2)$$

однородного рівнання

$$u'' + pu' + qu = 0, \qquad (3)$$

або намагаються розшукати частинний інтеґрал y_1 рівнання (1), і тоді буде:

$$y = c_1u_1 + c_2u_2 + y_1,$$

або, як це найбільше й трапляється, застосовують варіяцію Lagrange'а для визначення функцій $c_1(x)$, $c_2(x)$; тоді загальний інтеґрал рівнання (1) напишеться так:

$$y = c'u_1 + c''u_2 + u_1\int\frac{u_2rdx}{\triangle(u_2,u_1)} + u_2\int\frac{u_1rdx}{\triangle(u_1,u_2)}, \qquad (4)$$

при чім $\triangle(u_1u_2)$ означає визначник Вронського для частинних розв'язок u_1 u_2*).

Спосіб варіяції Lagrange'а в тому вигляді, як його звичайно викладають в курсах інтеґрування диференціяльних рівнань, в підручниках, в спеціяльних монографіях то що, дає єдину можливу комбінацію 2-ох квадратур, що її вказано в формулі (4).

В літературі можна зустрінути ще один спосіб варіяції постійних, відомий під назвою способу Cauchy; загальний інтеґрал пишуть за допомогою означених інтеґралів. Спосіб Cauchy приводить до тих самих квадратур, що і спосіб Lagrange'а**).

---

*) E. L. Ince. Ordinary Differential Equations, London, 1927, p. 123.

**) E. Goursat. Cours d'analyse mathématique, t. II, Paris, 1925, pp. 443 — 444.

сталої a можна давати які завгодно числові значіння, стає більш легке, ніж виконання Lagrange'вих квадратур у (4)-му.

Легко переконатися, що інші інтеґрувальні комбінації рівнання (7) приведуть до ускладнення вигляду загального неоднородного рівнання, тому що вони дадуть різні вирази цього інтеґрала тільки завдяки тром квадратурам.

Лише тоді, коли ми задамо собі одну з функцій $K_1(x)$, $K_2(x)$ похідною $f'(x)$ довільно взятої функції $f(x)$, ми зможемо виразити загальний інтеґрал двома тільки квадратурами.

Поклавши, для прикладу, $K_1(x)=(ax+b)'$, можна написати

$$c_1(x)=ax+b,$$

і $c_2(x)$ дістанемо двома квадратурами з виразів, які матимуть постійну a.

4. У виразі

$$y=c_1u_1+c_2u_2+z(x)$$

функція $z(x)$ перестає бути обов'язково частинним інтеґралом неоднородного рівнання, коли c_1 та c_2 вважати за функції x-са. Три функції $c_1(x)$, $c_2(x)$, $z(x)$ зв'язані будуть залежністю

$$z''+pz'+qz+c_1'(2u_1'+pu_1)+c_2'(2u_2'+pu_2)+c_1''u_1+c_2''u_2=r.$$

Поклавши

$$z'+c_1'u_1+c_2'u_2=a=const.,$$

можна написати:

$$c_1'u_1'+c_2'u_2'=r-qz-ap;\quad r-qz-ap=b=const.;$$

$$y=c'u_1+c''u_2+\frac{r-ap-b}{q}+u_1\int\frac{bu_2-u_2'\left[a-\left(\frac{r-ap\quad b}{q}\right)'\right]}{\triangle(u_2,u_1)}dx+$$

$$+u_2\int\frac{bu_1-u_1'\left[a-\left(\frac{r-ap\quad b}{q}\right)'\right]}{\triangle(u_1,u_2)}dx.$$

Коли a та b будуть довільно задані функції, тоді ми зможемо написати безліч інших відповідних форм загального інтеґрала. Колиж ми візьмемо

$$a=b=0,$$

ми матимемо таку найпростішу форму загального інтеґрала, відмінну від Lagrange'вої форми (4):

$$y=c'u_1+c''u_2+\frac{r}{q}+u_1\int\frac{u_2'\left(\frac{r}{q}\right)'}{\triangle(u_2,u_1)}dx+u_2\int\frac{u_1'\left(\frac{r}{q}\right)'}{\triangle(u_1,u_2)}dx.$$

Коли $\frac{r}{q} = const.$, тоді загальний інтеґрал неоднородного рівнання дістанемо з загального інтеґрала однородного рівнання зовсім без квадратур:

$$y = c'u_1 + c''u_2 + \frac{r}{q},$$

с. т. $\frac{r}{q}$ є частинний інтеґрал неоднородного рівнання.

Коли тільки на одну з величин c_1, c_2 дивитимемося як на функцію x-са, матимемо формули вигляду:

$$z' + c_1'u_1 = a;\ c_1'u_1' = r - qz;$$

$$c_1' = \frac{a - z'}{u_1};\ u_1'z' - u_1 qz = au_1' - ru_1,$$

і зможемо визначити загальний інтеґрал за допомогою не менше як 3-ох квадратур.

5. Для варіяції довільних сталих можливий є ще один останній шлях. Коли функція $\overline{U}(x)$ є частинний або загальний інтеґрал однородного рівнання, тоді загальний інтеґрал неоднородного рівнання можна шукати в формі

$$y = \overline{U}(x).z(x),$$

що дає:

$$r = z'(2\overline{U}' + p\overline{U}) + z''\overline{U};\ z' = \zeta;\ \zeta' + \left[2\frac{\overline{U}'}{\overline{U}} + p\right]\zeta = \frac{r}{\overline{U}};$$

$$y = c'\overline{U} + \overline{U}\int\frac{\int r\overline{U}e^{\int p dx}dx + c''}{\overline{U}^2 e^{\int p dx}}dx, \qquad (9)$$

і ми бачимо, між іншим, що найшовши тільки частинний інтеґрал $\overline{U}(x)$ для однородного рівнання, матимемо загальний інтеґрал неоднородного рівнання вигляду аналогічного (5)-тому, за допомогою лише 3-ох квадратур, а застосування способу варіяції Lagrange'а привелоб нас до потреби виконати 4 квадратури:

$$u_1 = \overline{U};\ u_2 = \overline{U}\int\frac{dx}{\overline{U}^2 e^{\int p dx}};$$

$$y = c'\bar{U} + c''\bar{U}\int \frac{dx}{\bar{U}^2 e^{\int p dx}} - \bar{U}\int e^{\int p dx}\int \frac{dx}{\bar{U}^2 e^{\int q dx}} r\bar{U}dx +$$

$$+\bar{U}\int \frac{dx}{\bar{U}^2 e^{\int p dx}}\int \bar{U} e^{\int p dx} r dx.$$

Коли

$$\bar{U} = c_1 u_1 = c_2 u_2 \equiv \varphi(x),$$

де c_1 та c_2 є постійні, тоді вираз (9) матиме тільки дві квадратури, тому що

$$e^{-\int p dx} = \triangle(u_1 . u_2).$$

Вважаючи ж c_1 та c_2 за функції, прийдемо до нових результатів:

$$y = \varphi(x)\, z(x);\; z''\varphi + z'(2\varphi' + p\varphi) + z(\varphi'' + p\varphi' - \psi) = r,$$

і

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 = \varphi$$

$$c_1(u_1'' + p u_1') + c_2(u_2'' + p u_2') = \psi$$

Через те, що

$$D = \begin{vmatrix} u_1 & , & u_2 \\ u_1'' + p u_1', & & u_2'' + p u_2' \end{vmatrix} = p\triangle + \triangle' = 0,$$

маємо

$$\psi = \frac{u_i'' + p u_i'}{u_i}\varphi \qquad i = (1, 2),$$

с. т. невідомі функції $\varphi(x)$, $z(x)$ повинні задовольняти таке рівнання:

$$z''\varphi + z'(2\varphi' + p\varphi) + z\left(\varphi'' + p\varphi' - \frac{u_i'' + p u_i'}{u_i}\varphi\right) = z;$$

для кожної визначеної функції z існує визначена функція φ, яка задовольняє це рівнання.

Поклавши, наприклад, $z = A = const.$, можна написати:

$$c_1' u_1 + c_2' u_2 = B = const.;\; c_1' u_1' + c_2' u_2' = \frac{r}{A} - Bp.$$

і функція $\varphi(x)$ визначиться через $c_1(x)$, $c_2(x)$ двома квадратурами, що вони для того частинного випадку, коли $A = 1$, $B = 0$, стають квадратурами Lagrange'a,

Можна написати безліч виглядів 2-ох квадратур, вважаючи A та B за довільно задані, але визначені функції.

Поклавши, скажімо, $z = A = const.$,

для $c_1' u_1 + c_2' u_2 = f(x)$ матимемо $c_1' u_1' + c_2' u_2' = \frac{r}{A} - pf(x) - f'(x)$;

для $c_1' u_1' + c_2' u_2 = -\left(\frac{r}{Ap}\right)'$ матимемо $c_1' u_1 + c_2' u_2 = \frac{r}{Ap}$

і т. д.