РЕГУЛЯРНЕ ЗРОСТАННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ФУР'Є ЛОГАРИФМУ ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ НУЛЬОВОГО ПОРЯДКУ

©2009 р. *Оксана БОДНАР, Микола ЗАБОЛОЦЬКИЙ*

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів 79000

Редакція отримала статтю 11 червня 2009 р.

Встановлено еквівалентність між регулярним зростанням коефіцієнтів Фур'є $\ln f$ та сильно регулярним зростанням цілої функції f нульового порядку, якщо нулі f розташовані на скінченній системі променів.

1. Вступ. Нехай f — ціла трансцендентна (надалі ціла) функція порядку ρ, $0<\rho<\infty$, $f(0)=1$, $\rho(r)$ — її уточнений порядок, тобто $\rho(r)$ задовольняє умови:

а) $\rho(r)$ — неперервно диференційовна на $[0,+\infty)$ функція;

б) $\rho(r)\to\rho$ при $r\to\infty$;

в) $r\rho'(r)\ln r\to 0$ при $r\to\infty$;

г) $0<\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\frac{T(r,f)}{V(r)}<\infty$, де $V(r)=r^{\rho(r)}$, $T(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+|f(re^{i\theta}|)d\theta$.

Клас таких функцій позначимо $H_+(\rho(r))$. Однією з головних подій в теорії цілих функцій стало створення в 30-их роках минулого століття Б.Я.Левіним та А.Пфлюгером теорії цілих функцій цілком регулярного зростання (ц.р.зр.) у випадку додатного порядку ρ. Нагадаємо відповідне означення. Множину на комплексній площині назвемо C_0-множиною, якщо її можна покрити зліченною послідовністю кругів $\{z:|z-z_j|<r_j\}$, таких, що

$$\sum_{j:|z_j|\le r} r_j=o(r),\ r\to\infty.$$

УДК 517.53; MSC 2000: 30E99

Функцію $f \in H_+(\rho(r))$ будемо називати функцією ц.р.зр. [1, с. 183], якщо існує границя
$$\lim_{r\to\infty}{}^* \ \ln|f(re^{i\theta})|/V(r) = h_f(\theta),$$
де $\lim^*$ означає, що $re^{i\theta} \notin E$, а E — деяка C_0-множина. Те, що деяку множину E слід виключати з розгляду, випливає з наявності нулів у функції f.

Клас цілих функцій ц.р.зр. позначимо $H_+^\star(\rho(r))$. У праці [1, розд. 2,3] знайдено необхідну і достатню умову на асимптотичну поведінку нулів функції f з класу $H_+(\rho(r))$ для того, щоб $f \in H_+^\star(\rho(r))$. У випадку нецілого ρ ця умова рівносильна умові існування кутової щільності нулів f, тобто існуванню границі
$$\Delta(\alpha, \beta) = \lim_{r\to\infty} n(r, \alpha, \beta)/V(r), \tag{1}$$
коли α і β не належать деякій, не більш ніж зліченній множині з $[0, 2\pi]$, де $n(r, \alpha, \beta)$ — кількість нулів a_j функції $f \in H_+(\rho(r))$, які лежать в секторі $\{z : |z| \le r, \alpha < \arg z \le \beta\}$, $0 \le \alpha < \beta < 2\pi$.

Якщо для цілих функцій нульового порядку аналогічно ввести поняття ц.р.зр., то згідно з [2, с. 72], функція f буде функцією ц.р.зр. тоді і лише тоді, коли f має ц.р.зр. хоча б на одному промені. Більше того, тоді
$$h_f(\theta) = \lim_{r\to\infty}{}^* \ln|f(re^{i\theta})|/V(r) = \lim_{r\to\infty} N(r)/V(r) = K,$$
де $0 < K < +\infty$, $N(r) = \int_1^r \dfrac{n(t, 0, 2\pi)}{t}dt$. Звідси бачимо, що ц.р.зр. цілої функції нульового порядку не залежить від аргументів її коренів, а тільки від їхніх модулів. Зауважимо [3, с. 228], що тоді величина $\Delta(\alpha, \beta) = 0$ для всіх α і $\beta, 0 \le \alpha < \beta < 2\pi$.

У [4] введено нове поняття регулярності зростання для цілих функцій нульового порядку, яке володіє властивостями, подібними до тих, якими володіє поняття ц.р.зр. цілих функцій додатного порядку.

Нехай f — ціла функція нульового порядку, $f(0) = 1$. Через $\lambda(r)$ позначимо нульовий уточнений порядок функції $n(r) = n(r, 0, 2\pi)$, тобто функція $\lambda(r)$ задовольняє умови а)–в) уточненого порядку з $\rho = 0$, і, крім того

г) $rv'(r)/v(r) = r\lambda'(r)\ln r + \lambda(r) \searrow 0$ при $r \to +\infty$;

д) $0 < \varliminf_{r\to\infty} n(r)/v(r) < +\infty$.

Клас таких цілих функцій нульового порядку позначимо $H_0(\lambda(r))$. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що $v(r) = 0$ і $n(r) = 0$ для $0 \le r \le 1$.

Зауваження 1. Із доведення теореми 16 у [1, с. 52–54] про побудову уточненого порядку випливає, що такий нульовий уточнений порядок $\lambda(r)$ існує для довільної лічильної функції $n(r)$ нульового порядку. Справді, за побудовою $\lambda(r) = \psi(\ln r)/\ln r$, де ψ — додатна, неперервно диференційовна функція, $\psi(x)/x \to 0$, $\psi(x) \nearrow +\infty$, $\psi\,'(x) \searrow 0$ при $x \to +\infty$. Тоді $v(r) = r^{\lambda(r)} = e^{\psi(\ln r)}$ і $rv'(r)/v(r) = r\lambda'(r)\ln r + \lambda(r) = \psi\,'(\ln r) \searrow 0$ при $r \to +\infty$.

Означення кутової щільності коренів цілої функції запроваджуємо так само, як в (1), покладаючи $v(r)$ замість $V(r)$. Рівність $\Delta(\theta) - \Delta(\beta) = \Delta(\theta, \beta)$ визначає при фіксованому β, з точністю до сталого доданку, неспадну функцію $\Delta(\theta)$.

Будемо називати звичайними ті промені $\arg z = \theta$, які задовольняють умову

$$\lim_{h\to 0+}\left\{\overline{\lim_{r\to\infty}}\, n(r, \theta - h, \theta + h)/v(r)\right\} = 0.$$

Всі інші промені називатимемо особливими. З монотонності функції $\Delta(\theta)$ випливає, що якщо корені функції f мають кутову щільність, то множина особливих променів не більш, ніж зліченна.

Будемо говорити, що ціла функція $f \in H_0(\lambda(r))$ має сильно регулярне зростання на звичайному промені $\arg z = \theta$, якщо існує границя

$$\lim_{r\to\infty}{}^{*}\, \frac{\ln f(re^{i\theta}) - N(r)}{v(r)} = H_f(\theta),$$

де $\ln f$ — однозначна гілка $\mathrm{Ln} f$ в області D, де $D = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty}\{z : |z| \geq |a_j|, \arg z = \arg a_j\}$, a_j — нулі f, $\ln f(0) = 0$.

Легко бачити, що

$$\ln f(z) = \int_0^z \frac{f'(w)}{f(w)}dw,\ z \in D,$$

де інтеграл береться вздовж довільної кривої з області D з початком в точці 0 і кінцем в точці z (зокрема, вздовж відрізка $[0, z]$), якщо довизначити функцію $\ln f$ на берегах розрізів області D за неперервністю.

Якщо ціла функція $f \in H_0(\lambda(r))$ має сильно регулярне зростання на всіх звичайних променях $\arg z = \theta$, $0 \leq \theta < 2\pi$, то f будемо називати функцією сильно регулярного зростання і клас таких функцій позначимо $H_0^{\star}(\lambda(r))$.

Теорема А ([5]). *Якщо $f \in H_0(\lambda(r))$ і множина нулів функції f має кутову щільність відносно функції $v(r)$, то $f \in H_0^{\star}(\lambda(r))$. Навпаки,* *якщо $f \in H_0^\star(\lambda(r))$ і нулі f розміщені на скінченній системі променів, то множина цих нулів має кутову щільність.*

Умова розташування коренів на скінченній системі променів в останньому твердженні теореми A є істотною. В загальному випадку (див. [5]) із факту сильно регулярного зростання цілої функції, взагалі кажучи, не випливає факт існування кутової щільності її коренів.

Нехай $c_k(r,\Phi)$, $k \in \mathbb{Z}$, — коефіцієнти Фур'є функції $\Phi(re^{i\varphi})$ як функції від φ, тобто

$$c_k(r,\Phi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(re^{i\varphi})e^{-ik\varphi}d\varphi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad r > 0.$$

Теорема B ([6]). *Для того, щоб $f \in H_+^\star(\rho(r))$ необхідно і досить, щоб існували границі*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{c_k(r,\ln|f|)}{V(r)} = c_k, \ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Метою цієї статті є встановлення аналогу теореми B для функцій з класу $H_0^\star(\lambda(r))$ (див. нижче формулювання і доведення теореми 3).

2. Формулювання результатів. Нехай $\Gamma_m = \bigcup_{j=1}^m l_{\theta_j}$, де $l_{\theta_j} = \{z : \arg z = \theta_j\}$, $0 \le \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_m < 2\pi$, — скінченна система променів, a_n — нулі функції $f \in H_0(\lambda(r))$, $\alpha_n = \arg a_n$. Позначимо [7]

$$n_k(r,f) = \sum_{|a_n|\le r} e^{-ik\alpha_n}, \ N_k(r,f) = \int_0^r \frac{n_k(r,f)}{t}dt, \ k \in \mathbb{Z},$$

$n(r,\theta;f) = \sum\limits_{|a_n|\le r, \alpha_n=\theta} 1$, тобто $n(r,\theta;f)$ — лічильна функція нулів функції f, які розташовані на промені $l_\theta = \{z : \arg z = \theta\}$.

Теорема 1. *Нехай $f \in H_0(\lambda(r))$ і нулі функції f розташовані на скінченній системі променів Γ_m. Для того, щоб $f \in H_0^\star(\lambda(r))$ необхідно і досить, щоб для довільного $k \in \{k_0, k_0+1, \ldots, k_0+m-1\}$, $k_0 \in \mathbb{Z}$, існували границі*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n_k(r,f)}{v(r)} = \delta_k. \tag{2}$$

Теорема 2. *Нехай $f \in H_0^\star(\lambda(r))$ і нулі f розташовані на Γ_m. Тоді*

$$H_f(r,\theta) = \frac{\ln f(re^{i\theta}) - N(r)}{v(r)}$$

рівномірно відносно θ *прямує до* $H_f(\theta)$ *на кожному відрізку* $[\theta_j, \theta_{j+1}], j = \overline{1,m}$, $\theta_{m+1} = \theta_1 + 2\pi$, *при* $r \to \infty$, $r \notin E$, *де* E *— деяка* C_0*-множина.*

Теорема 3. *Нехай* $f \in H_0(\lambda(r))$ *і нулі* f *розташовані на* Γ_m. *Для того, щоб* $f \in H_0^\star(\lambda(r))$ *необхідно і досить, щоб існували границі*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{c_k(r, \ln f)}{v(r)} = c_k, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \tag{3}$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{c_0(r, \ln f)}{\int_0^r v(r) t^{-1} dt} = c_0. \tag{4}$$

3. Допоміжні результати і доведення теорем 1–3. Для доведення теореми 2 будемо використовувати наступну лему.

Лема. *Нехай* α, τ *— неперервні на* $[0, +\infty)$ *функції, такі, що* $\alpha(r)$ *— додатна, зростаюча до* $+\infty$, $\tau(r) \to 0$, $\alpha(r) r^{-\gamma} \to 0$ *при* $r \to +\infty$ *для деякого* $0 < \gamma < 1$. *Тоді*

$$\frac{1}{\alpha(r)} r \sin\theta \int_0^{+\infty} \frac{\alpha(t)\tau(t)}{t^2 + r^2 + 2tr\cos\theta} dt \rightrightarrows 0$$

при $r \to \infty$ *і* $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Доведення. Нехай ε — довільне додатне число. Тоді існує $r_0 > 0$ таке, що $|\tau(r)| < \varepsilon$ для всіх $r \geq r_0$. Покладемо $r_1 = 4Kr_0/\varepsilon$, де $K > 1$ — така стала, що $|\tau(t)| \leq K$ для $t \in [0, r_0]$. Тоді при $r > r_1 > 2r_0$ маємо

$$\left| r \sin\theta \int_0^{+\infty} \frac{\alpha(t)\tau(t)}{t^2 + r^2 + 2tr\cos\theta} dt \right| \leq$$

$$\leq r|\sin\theta| \left| \int_0^{r_0} + \int_{r_0}^{r/2} + \int_{r/2}^{2r} + \int_{2r}^{+\infty} \right| \frac{\alpha(t)|\tau(t)|}{t^2 + r^2 + 2tr\cos\theta} dt \leq$$

$$\leq Kr\alpha(r_0) \int_0^{r_0} \frac{dt}{(r-t)^2} + \varepsilon r \alpha(r/2) \int_{r_0}^{r/2} \frac{dt}{(r-t)^2} +$$

$$+\varepsilon r |\sin\theta| \alpha(2r) \int_{r/2}^{2r} \frac{dt}{(t + r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} + \varepsilon r \frac{\alpha(r)}{r^\gamma} \int_{2r}^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-\gamma}(1 - r/t)^2} \leq$$

$$\leq Kr\alpha(r_0)\frac{r_0}{(r-r_0)^2} + \varepsilon r\alpha(r/2)\frac{1}{(r-t)}\Big|_{r_0}^{r/2} + \varepsilon\alpha(2r)\operatorname{arctg}\frac{t+r\cos\theta}{|r\sin\theta|}\Big|_{r/2}^{2r} +$$

$$+4\varepsilon r\frac{\alpha(r)}{r^\gamma}\ \frac{t^{\gamma-1}}{\gamma-1}\Big|_{2r}^{+\infty} \leq \frac{4Kr_0\alpha(r_0)}{r} + 2\varepsilon\alpha(r/2) + \varepsilon\alpha(2r)\bigg(\operatorname{arctg}\frac{2+\cos\theta}{|\sin\theta|} -$$

$$-\operatorname{arctg}\frac{1/2+\cos\theta}{|\sin\theta|}\bigg) + \frac{4\varepsilon\alpha(r)}{(1-\gamma)2^{1-\gamma}} \leq \varepsilon\alpha(r) + 2\varepsilon\alpha(r) + 2^\gamma\pi\varepsilon\alpha(r) +$$

$$+\frac{4\varepsilon\alpha(r)}{(1-\gamma)2^{1-\gamma}} = C\varepsilon\alpha(r),$$

де $C > 0$ — деяка стала. Лему доведено.

Доведення теореми 1. Якщо $f \in H_0^\star(\lambda(r))$, то за теоремою A нулі цілої функції f мають кутову щільність. Тому для довільного $l_{\theta_j} \in \Gamma_m$ існує границя

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n(r,\theta_j;f)}{v(r)} = \Delta_j,$$

бо для майже всіх $\alpha \in (\theta_{j-1}, \theta_j)$ та $\beta \in (\theta_j, \theta_{j+1})$ (де $\theta_{m+1} = \theta_1 + 2\pi$) існує границя

$$\lim_{k\to\infty}\frac{n(r,\alpha,\beta)}{v(r)} = \Delta(\alpha,\beta).$$

Оскільки $n_k(r,f) = e^{-ik\theta_1}n(r,\theta_1;f) + \ldots + e^{-ik\theta_m}n(r,\theta_m;f)$, то

$$\delta_k = \sum_{j=1}^m \Delta_j\ e^{-ik\theta_j}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Навпаки, нехай виконуються співвідношення (2). Не зменшуючи загальності міркувань, вважаємо, що $k_0 = 0$. Тоді

$$\begin{cases} n_0(r,f) = n(r,\theta_1;f) + \ldots + n(r,\theta_m;f), \\ n_1(r,f) = e^{-i\theta_1}n(r,\theta_1;f) + \ldots + e^{-i\theta_m}n(r,\theta_m;f), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ n_{m-1}(r,f) = e^{-i(m-1)\theta_1}n(r,\theta_1;f) + \ldots + e^{-i(m-1)\theta_m}n(r,\theta_m;f). \end{cases}$$

Головний визначник A цієї системи, яка є лінійною відносно величин $n(r,\theta_j,f)$, $j = \overline{1,m}$, дорівнює

$$A = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ e^{i\theta_1} & \ldots & e^{-i\theta_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ e^{ik\theta_1} & \ldots & e^{ik\theta_m} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тому величини $n(r, \theta_j, f)$, $j = \overline{1, m}$, можна зобразити як лінійні комбінації величин $n_k(r, f)$, $k = \overline{0, m-1}$, а, отже, існують границі

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r, \theta_j, f)}{v(r)} = \Delta_j.$$

За правилом Крамера $\Delta_j = A_j/A$, де A_j — визначник, що отримується з визначника A заміною j-го стовпця на стовпець $(\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{m-1})$. Толі за теоремою А $f \in H_0^\star(\lambda(r))$, що й доводить теорему 1.

Зауваження 2. Умови існування границь $\lim\limits_{r\to\infty} n_k(r, f)/v(r)$ для m послідовних натуральних чисел k у формулюванні достатніх умов теореми 1 є істотними. Справді, нехай $g \in H_0(\lambda(r))$ і нулі функції g лежать на від'ємному l_π та додатному l_0 променях так, що $n(r, 0, g) + n(r, \pi, g) = (1 + o(1))v(r)$, $r \to \infty$, $n(r_n, 0, g) = (1 + o(1))v(r_n)$, $n(r_{n+1}, \pi, g) = (1 + o(1))v(r_{n+1})$, $n \to +\infty$, де (r_n) — зростаюча послідовність додатних чисел, $r_{n+1}/r_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$. Тоді $m = 2$, $n_0(r, g) = n_2(r, g) = (1 + o(1))v(r)$, а кутової щільності нулів функції g не існує, оскільки $\lim\limits_{r\to\infty} n(r, \alpha, \beta)/v(r)$ не існує для всіх α і β, $0 < \alpha < \pi < \beta \le 2\pi$.

Доведення теореми 2. Нехай $f \in H_0^\star(\lambda(r))$, нулі функції f є від'ємними, $n(r) = (1 + o(1))v(r)$, $r \to \infty$. Тоді для $z = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta < \pi$, виконується [4, с. 205] рівність

$$\ln f(z) - N(r) = i\theta v(r) - \int_0^r \frac{n(t) - v(t)}{t + z} dt + z \int_r^\infty \frac{n(t) - v(t)}{t(t + z)} dt + \varepsilon(z), \quad (5)$$

де $\varepsilon(z) = o(1)$ при $r \to \infty$ рівномірно відносно $\theta \in [-\pi, \pi]$. За лемою 1 з [4, с. 199] рівномірно відносно $\theta \in [-\pi + \delta, \pi - \delta]$, $\delta > 0$, справджується співвідношення

$$\ln |f(z)| - N(r) = o(v(r)), \quad r \to \infty.$$

Враховуючи міркування з [1, с. 131–133], отримуємо, що рівномірно відносно $\theta \in [-\pi, \pi]$ виконується рівність

$$\frac{\ln |f(z)| - N(r)}{v(r)} = o(1), \quad r \to \infty, \quad z \notin E, \quad (6)$$

де E — деяка C_0-множина. Оскільки

$$\operatorname{Im} \frac{-1}{t + z} = \operatorname{Im} \frac{z}{t(t + z)} = \frac{r \sin\theta}{t^2 + 2tr\cos\theta + r^2},$$

то з (5) отримуємо, що

$$\frac{\arg f(z)}{v(r)} = \theta + \frac{r\sin\theta}{v(r)} \int_0^{+\infty} \frac{n(t)-v(t)}{t^2+2tr\cos\theta+r^2} dt + \mathrm{Im}\ \varepsilon(z).$$

З цього співвідношення та з леми дістаємо, що

$$\frac{\arg f(z)}{v(r)} = \theta + o(1), \quad r\to\infty, \tag{7}$$

рівномірно відносно $\theta \in [-\pi,\pi]$. З рівностей (6), (7) випливає твердження теореми 2 для випадку, коли нулі функції f є від'ємними.

Якщо нулі цілої функції f лежать на скінченній системі променів Γ_m, то функцію f можна зобразити у вигляді добутку $f = f_1 \cdot \ldots \cdot f_m$, де $f_j \in H_0^\star(\lambda(r))$, а нулі функції f_j є нулями функції f, які лежать на промені l_{θ_j}. Тоді $H_{f_j}(\theta,r)$ прямує рівномірно відносно $\theta\in[\theta_j,\theta_j+2\pi]$ до $H_{f_j}(\theta)$ при $r\to\infty$. Отже, $H_f(\theta,r)$ прямує рівномірно відносно $\theta\in[\theta_j,\theta_{j+1}]$, $j=\overline{1,m}$, (де $\theta_{m+1}=\theta_1+2\pi$) до $H_f(\theta)$ при $r\to\infty$. Теорему 2 доведено.

Доведення теореми 3. Нехай $f\in H_0^\star(\lambda(r))$. Оскільки для всіх $k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ виконується рівність

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r)e^{-ik\theta}d\theta = 0,$$

то

$$\frac{c_k(r,\ln f)}{v(r)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_f(r,\theta)e^{-ik\theta}d\theta.$$

З теореми 2 і з теореми про інтегрування рівномірно збіжної сім'ї функцій отримуємо, що існує границя

$$\lim_{r\to\infty}{}^* \int_0^{2\pi} H_f(r,\theta)e^{-ik\theta}d\theta = \int_0^{2\pi} \lim_{r\to\infty}{}^* H_f(r,\theta)e^{-ik\theta}d\theta = \int_0^{2\pi} H_f(\theta)e^{-ik\theta}d\theta,$$

а, отже, існують границі

$$\lim_{r\to\infty}{}^* \frac{c_k(r,\ln f)}{v(r)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_f(\theta)e^{-ik\theta}d\theta = c_k, \ \ k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}.$$

Тоді, враховуючи лему 5 із [6, с. 13], отримуємо (3). З теореми A, правила Лопіталя і співвідношення $c_0(r,\ln f) = N(r)$ (див., наприклад, [7]) випливає факт існування границь ($v_0(r) = \int_0^r v(t)t^{-1}dt$)

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n(r)}{v(r)} = \lim_{r\to\infty}\frac{N(r)}{v_0(r)} = \lim_{r\to\infty}\frac{c_0(r,f)}{v_0(r)} = c_0,$$

що доводить необхідність умов теореми 3.

Навпаки, нехай виконуються умови (3) і (4). Тоді з правила Лопіталя отримуємо існування границь

$$\lim_{r\to\infty} \frac{c_k(r, \ln f)}{v(r)} = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{v_0(r)} \int_0^r \frac{c_k(t, \ln f)}{t} dt, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

Враховуючи рівності [7]

$$N_k(r, f) = c_k(r, \ln f) - k \int_0^r \frac{c_k(t, \ln f)}{t} dt \tag{9}$$

і співвідношення $v(r) = o(v_0(r))$, $r \to \infty$, з (8) і (9) одержуємо

$$\lim_{r\to\infty} \frac{N_k(r, f)}{v_0(r)} = -k \lim_{r\to\infty} \frac{1}{v_0(r)} \int_0^r \frac{c_k(t, \ln f)}{t} dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Оскільки

$$v(r) = \int_0^r \frac{tv'(t)}{v(t)} \frac{v(t)}{t} dt \geq \frac{rv'(r)}{v(r)} \int_0^r \frac{v(t)}{t} dt = \frac{rv'(r)}{v(r)} v_0(r)$$

і $v_0'(r)r = v(r)$, то $\dfrac{v_0'(r)}{v_0(r)} \geq \dfrac{v'(r)}{v(r)}$, а, отже,

$$\frac{d^2 \ln v_0(r)}{d^2 \ln r} = \Big(\frac{v(r)}{v_0(r)}\Big)'_{\ln r} = \frac{rv(r)}{v_0(r)} \Big(\frac{v'(r)}{v(r)} - \frac{v_0'(r)}{v_0(r)}\Big) \leq 0.$$

Таким чином, функція $\ln v_0(r)$ вгнута відносно логарифма. Тоді згідно з теоремами 5, 6 праці [8] існують границі

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n_k(r, f)}{v(r)} = \lim_{r\to\infty} \frac{N_k(r, f)}{v_0(r)}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

і з теорем 1 та A випливає, що $f \in H_0^\star(\lambda(r))$. Теорему 3 доведено.

[1] *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций. М.: Гос.-тех. издат. -0 1956.

[2] *Гольдберг А.А., Островский И.В.* О производных и первообразных целых функций вполне регулярного роста // Теория функций, функц. анализ и их прилож. – 1973. – Вып. 18. – С. 70–81.

[3] *Гольдберг А.А., Заболоцкий Н.В.* Индекс концентрации субгармонической функции нулевого порядка // Матем. заметки. – 1983. – Т. 34, № 2. – С. 227–236.

[4] *Заболоцкий Н.В.* Сильно регулярный рост целых функций нулевого порядка // Матем. заметки. – 1998. – Т. 63, № 2. – С. 196–208.

[5] *Zabolotskii M.V.* An example of entire function of strongly regular growth // Mat. studii. – 2000. – V. 13, № 2. – P. 145–148.

[6] *Азарин В.С.* О регулярности роста коэффициентов Фурье логарифма модуля целой функции // Теория функций, функц. анализ и их прилож. – 1977. – Вып. 27. – С. 9–22.

[7] *Калинецъ Р.З., Кондратюк А.А.* Про регулярність зростання модуля і аргумента цілої функції в $L^p_{[0,2\pi]}$ – метриці // Укр. матем. журн. – 1998. – Т. 50, № 7. – С. 889–896.

[8] *Братищев А.В.* Об обращении правила Лопиталя // Механика сплошной среды. Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. гос. ун-та. – 1985. – С. 28–42.

REGULAR GROWTH OF FOURIER COEFFICIENTS OF THE LOGARITHM OF ENTIRE FUNCTIONS OF ORDER ZERO

Mykola ZABOLOTSKYY

Ivan Franko Lviv National University,
1 Universytetska Str., Lviv 79000, Ukraine

We establish the equivalency between regular growth of Fourier coefficients of $\ln f$ and strongly regular growth of entire function of order zero f in the case when zeros of f are located on the finite system of rays.