Мирон Зарицький
(Львів)

Особливі функції дійсного аргументу.

ВСТУП.

Наука про функції, це наука давна, так давна як давна є історія математичної думки. А примітивна і інтуітивна ідея функційної залежности зродилася в свідомости організмів ще раньше. Коли будемо в розвитку органічної свідомости шукати того моменту, коли органічна істота не могла вже в боротьбі за існування обійтися без інтуітивного пізнання залежности одної величини від другої, то мусимо сягнути думкою далеко взад, у часи, коли ще не було людини на нашім ґльобі. Коли звіря напружало мязи, щоби перескочити перешкоду в утечі, то мусіло вже на дні його свідомости лежати здобуте досвідом представлення залежности величини потрібної напруги від висоти перешкоди. Ідея функції зродилася в організмі разом із його свідомістю як один із важних чинників у боротьбі за існування, як важний мотор органічної еволюції.

Поняття функції було необхідне в техніці щоденного життя первісної людини. Колиж старинні Греки сотворили екзактну науку, то очевидно поняття функції стало центральним поняттям не тільки в математиці, але також у всіх природописних науках, бо кожний закон природи, то функційна звязь межи величинами.

В історії нової математики розвивалося поняття функції постепенно і поволи, заки дійшло до свого нинішнього найзагальнішого означення. Обмежимося тут тільки до однозначної функції дійсного аргументу. Leibniz і Bernoulli дають тільки поодинокі приклади таких функцій, як напр. степені і гоніометричні функції. Щойно в XVIII-ому віці стрічаємо загальніші означення поняття функції. Euler називає функцією кожний „аритметичний вираз", як напр. x^n, $\lg x$, $\sin x$. На іншому місці означує він функцію через графічний образ. Lagrange обмежився до т. зв. аналітичних функцій (що їх можна представити при помочі степенного ряду), а Fourier звернув знову увагу на геометричне означення Euler'а.

Dirichlet означує поняття функцій в такий спосіб: у називаємо функцією змінної величини х, коли подане є правило, що кожній вартости величини х припорядковує якусь точно означену вартість величини у. Є це найзагальніша і нині клясична дефініція поняття функції дійсного аргументу.[1]) Тому одначе, що про таку найзагальнішу функцію мало можна сказати, мусіли математики XIX-го віку обмежуватися до функцій, що мали якісь специяльні властивости, а передовсім до функцій суцільних, що їх точне означення подали Cauchy і Heine.

Довгі літа здавалося, що суцільні функції є прості в своїй будові і що вже сама інтуїція вказує на деякі прості висновки відносно їх властивостей. Аж суцільна функція Weierstrass'а, що не має в ніякій точці похідної, показала нам, що інтуїція не дає математиці ніяких висновків із точних логічних означень, та що логічна аналіза наукових понять веде нераз до висновків інтуїтивно незрозумілих і парадоксальних. Від часу Riemann'а й Weierstrass'а саме такі дивні функції з особливими властивостями зачали інтересувати математиків. Пізніше найдено ще інші типи функцій з дивовижними прикметами і такі „анормальні" функції стали предметом спеціяльного зацікавлення і глибоких дослідів.

Моєю задачею буде зібрати такі особливі функції, описати їх властивости і дати таким способом систематичну збірку інтересних дослідів порозкиданих у журналах на протязі майже цілого століття. Притім очевидно прийдеться мені прикласти до давних думок нові вимоги математичної точности та пристосувати поняття й методи найновіщих здобутків теорії функцій до давних прикладів. Очевидно требаби писати великі томи, щоби дати повний образ дослідів тих „тератологічних" творів математичної думки, тому мушу обмежитися з конечности до поодиноких прикладів найважніших типів особливих функцій. Здається мені, що моя робота буде корисна щонайменше для тих, що студіюючи математику схотять переконатися, що інтуїція може бути в математиці необхідним гевристичним чинником, але теореми доказувати можна тільки при помочі логічної дедукції з принятих аксіомів і дефініцій.

[1]) Ще загальніші функції дістаємо, коли множинам припорядковуємо множини.

Та ще один мотив спонукав мене до наміченої роботи. Геніяльні концепції G. Cantor'а дали нам нову математичну дисципліну, а саме теорію множин. Теорія множин дала нам не тільки глибокі досліди філософічних основ математики, але й у всіх майже спеціяльних математичних науках дала вона нові поняття і методи, нові проблеми й теореми. І саме теорія функцій дійсного аргументу стала головною доменою приложення вислідів теорії множин. Теорія множин збогатила нечувано зміст цеї науки і вистане порівнати підручники другої половини XIX-го віку (напр. Dini) з найновішими підручниками (Carathèodory, Hahn), щоби побачити ту непроглядну кількість нових проблем, що їх уможливила теорія множин застосована до дослідів над властивостями поняття функції. Нова теорія функцій дійсного аргументу дала нам приклади спеціяльних функцій з такими особливими і давними прикметами, що про їх можливість не могли навіть подумати математики XIX-го століття.

Мало ще досі робіт з области теорії множин можна найти в українській математичній літературі. Може зібраних тут мною кілька прикладів її приложень причиниться до викликання заінтересовання цею новою наукою, що змінила істотно і форму і зміст цілої математичної аналізи.

I.

МІРА Й ІНТЕГРАЛИ LEBESGUE'А.

1. Щоби уможливити лектуру нашої роботи тим, що не займалися ще докладніше приложеннями теорії множин у теорії функцій дійсного аргументу, подаю в I. розділі найважніші дефініції і теореми (без доказів), що відносяться до поняття міри множини і найважніші відомости про інтеграли Lebesgue'а. Для наших цілий вистане обмежитися до лінійних множин, зн. до множин, що є частинами множини дійсних чисел.

2. Множину чисел x, що справджують нерівности $a < x < b$, будемо називати розімкненим інтервалом і будемо його зазначувати знаком (a, b). Числа a і b будемо називати (a лівим, b правим) кінцями інтервалу (a, b).

Множину точок x, що справджують нерівність $a \leqq x \leqq b$, *називаємо замкненим інтервалом і* зазначуємо знаком $< a\, b >$. Числа a і b є кінцями того замкненого інтервалу.

При помочі формули $a \varepsilon A$ зазначується, що елемент a належить до множини A.

Пишемо $a \sim\varepsilon A$, коли a не є елементом множини A.

Коли множина A є частиною множини B, значить, коли кожний елемент множини A є елементом множини B, тоді пишеться $A < B$.

Множина $S = \sum_i A_i$ називається сумою множин A_i, коли кожний елемент множини S є елементом щонайменше одної з множин A_i і коли кожна множина A_i є частиною множини S. Коли кількість доданків є скінчена або счислена, тоді будемо також писати:

$$S = A_1 + A_2 + \qquad + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i,$$

$$S = A_1 + A_2 + A_3 + \qquad = \sum_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Множину $D = \prod_i A_i$ називаємо добутком множин A_i, коли кожний елемент множини D є елементом кожної множини A_i і коли кожний елемент, що належить до кожної множини A_i, є елементом множини D. Коли кількість чинників є скінчена або счислена, будемо також писати:

$$D = A_1\ A_2\ \ldots . A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i,$$

$$D = A_1\ A_2\ A_3 \qquad = \prod_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Множину $R = A - B$ називаємо різницею множин A і B, коли R складається з усіх таких елементів, що є елементами множини A, але не є елементами множини B.

Коли $A < B$, то множину $R = B - A = A^B$ називаємо доповненням множини A до множини B.

Множину всіх дійсних чисел будемо ідентифікувати з множиною точок простої, так, що будемо казати „число x“ або „точка x“.

Множину всіх дійсних чисел будемо все зазначувати літерою C, а доповнення множини A до множини C будемо називати коротко доповненням множини A. Отже множина A^C є то множина всіх дійсних чисел, що не є елементами множини A.

Множина A називається обмежена, коли є таке число $M > 0$, що абсолютна вартість кожного числа, що належить до A, є менша від M. Отже множина A є обмежена, коли з реляції $x \varepsilon A$, виходить, що $|x| < M$.

Найбільше з усіх чисел, що не є більші від жадного числа обмеженої множини A, називається долішною границею множини A. Коли число a є долішною границею множини A, то будемо писати $a = \inf A$.

Аналогічно називаємо число b горішною границею обмеженої множини A, коли b є найменше з усіх чисел, що не є менші від жадного числа обмеженої множини A і пишемо тоді: $b = \sup A$.

Число x називаємо точкою скупчення множини A, коли в кожнім розімкненім інтервалі, в котрім лежить точка x, лежить ще щонайменше одна інша точка, що належить до множини A.

Множину A^d всіх точок скупчення множини A називаємо похідною множини A.

Множина A називається

замкнена, коли $A^d < A$,
в собі густа, „ $A < A^d$
завершена, „ $A^d = A$.

Точку a називаємо середовою точкою множини A, коли є такий розімкнений інтервал, що містить у собі точку a і кожна точка того інтервалу належить до множини A. Множина A називається розімкнена, коли кожна її точка є її середовою точкою.

Точку a називаємо околишньою точкою множини A, коли вона є середовою точкою доповнення множини A.

Кожна точка, що не є ані середовою, ані околишньою точкою множини A, називається межовою точкою тої множини. Множину всіх межових точок множини A називаємо обмеженням множини A. Обмеження зазначуємо знаком A^f. Множина A^f може очевидно складатися з таких точок, що належать до A, і з таких, що не належать до A.

Множину A^r називаємо замкненням множини A, коли A^r складається з усіх точок, що належать або до A або до похідної множини A. Маємо очевидно: $A^r = A + A^d$.

Множина A є густа відносно множини B коли $B < A^r$. Остання реляція каже, що в кожнім інтервалі, що обіймає якунебудь точку множини B, міститься щонайменше одна точка множини A. Коли крім того є ще $A < B$, то кажемо що A є густа в B.

Множина A називається негуста, коли вона не є густа в жаднім розімкненім інтервалі.

3. Нехай обмежена множина A міститься ціла в якімсь інтервалі $I = (a, b)$. Поділім інтервал I на скінчену кількість інтервалів $\{ i_n \}$ так, щоби maximum довжин інтервалів i_n було число μ. Зазначім літерою m'_μ суму довжин усіх тих інтервалів i_n, що є частинами множини A, а літерою $M'\mu$ суму довжин усіх тих інтервалів i_n, що містять в собі (в середині або на кінцях) точки множини A. Jordan доказав, що коли число μ наближується до нуля, то числа m'_μ і $M'\mu$ наближуються до точно означених границь.

Зазначім: $m'(A) = \lim\limits_{\mu \to 0} m'_\mu$, $M'(A) = \lim\limits_{\mu \to 0} M'_\mu$.

Число $m'(A)$ називаємо середовою мірою Jordan'а або середовою мірою (J) множини A, а число $M'(A)$ околишньою мірою Jordan'а або околишньою мірою (J) множини A.

Коли маємо $m'(A) = M'(A) = J(A)$, то кажемо, що множина A є мірна в сенсі Jordan'а, або мірна (J). Число $J(A)$ називається тоді мірою (J) множини A.

4. Накриймо тепер множину A скінченою або счисленою кількістю розімкнених інтервалів так, щоби кожна точка множини A лежала щонайменше в однім із тих інтервалів. Коли будемо накривати множину A ріжними системами інтервалів, то сума довжин $\triangle$ усіх інтервалів даної системи буде мати в загальнім випадку для ріжних систем ріжні вартости. Долішну границю чисел $\triangle$ називаємо околишньою мірою Lebesgue'a множини A і зазначуємо її знаком $M(A)$. Коли якийсь інтервал (J) накриває цілу множину A, то число $m(A) = M(J) - M(J - A)$ називаємо середовою мірою Lebesgue'a множини A.

Коли є $m(A) = M(A) = L(A)$, то число $L(A)$ називаємо мірою Lebesgue'a або коротко мірою множини A і тоді множина A називається мірна в сенсі Lebesgue'a або коротко мірна.

Кожний інтервал є очевидно мірний і його міра є ідентична з його довжиною.

Можна доказати наступну теорему:

Т. I.) Коли мірна множина A є сумою скінченої або счисленої кількости мірних множин A_n, таких, що не мають спільних точок, то міра множини A є сумою мір усіх множин A_n.

Значить, коли $A = A_1 + A_2 + A_3 +$

і $A_m \cdot A_n = 0$ для $m \neq n$,

то: $L(A) = L(A_1) + L(A_2) + L(A_3) + \ldots$

Аналогічна теорема для міри Jordan'а є правдива лише для скінченої кількости доданків і то є найістотніша ріжниця між мірами Jordan'а і Lebesgue'a.

Lebesgue зазначує знаком E $[a < f(x) < b]$ множину всіх чисел x, що для них вартости функції $f(x)$ лежать межи числами a і b.

Функція $f(x)$ називається мірна, коли для якихнебудь чисел a і b множина $E[a < f(x) < b]$ є мірна.

Можна доказати, що функція $f(x)$ є мірна тоді і тільки тоді, коли множина $E[a < f(x)]$ є мірна для кожної вартости числа a.

Т. II.) Коли $f_n(x)$ є поступом мірних функцій і існує $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$, то функція $f(x)$ є також мірна.

Нехай функція $f(x)$ буде обмежена і мірна в замкненім інтервалі $< a, b >$. Нехай буде g долішньою, а G горішною границею вартостей тої функції в інтервалі $< a, b >$ отже:

$$g = \inf f(x), \qquad G = \sup f(x), \qquad a \leqq x \leqq b.$$

На інтервалі $< a, b >$ положім точки $l_0, l_1, \ldots. l_n$ так, щоби:

$$g = l_0 < l_1 < l_2 < \qquad < l_{n-1} < l_n = G.$$

Напишім тепер такі суми:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n} l_i \, L \{ E [l_i \leqq f(x) < l_{i=1}]\},$$

$$\Sigma = \sum_{i=0}^{n} l_i \, L \{ E [l_{i-1} < f(x) \leqq l_i] \}.$$

Межи точки l_i вставляймо нові точки так, щоби maximum найбільшого з інтервалів $l_i - l_{i-1}$ маліло до нуля. Тоді суми σ ростуть, а Σ маліють і їх ріжниця наближується до нуля. Отже σ і Σ мають спільну границю, що її називаємо інтегралом Lebesgue'а функції $f(x)$ і зазначуємо знаком:

$$\int_a^b f(x) \; dx$$

Коли функція f(x) не є обмежена в інтервалі $< a, b >$, то поділім цілу просту точками l_i так, щоби було:

1) $\ldots. l_{-3} < l_{-2} < l_{-1} < l_0 < l_1 < l_2 < l_3 < \ldots.$

2) $\lim_{i \to \infty} l_{-i} = -\infty, \qquad \lim_{i \to \infty} l_i = +\infty$

3) $l_i - l_{i-1} < \varepsilon$ для $i = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots$

Напишім тепер суми:

$$\sigma = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} l_i \mathrm{L} \{ \mathrm{E} [l_i \leq \mathrm{f}(x) < l_i + 1] \},$$

$$\Sigma = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} l_i . \mathrm{L} \{ \mathrm{E} [l_{i-1} < \mathrm{f}(x) \leq l_i] \}.$$

Коли суми σ і Σ є для $\varepsilon \longrightarrow 0$ збіжні, то мають спільну границю, що її називаємо інтегралом Lebesgue'а функції $\mathrm{f}(x)$ і зазначуємо знаком $\int_a^b \mathrm{f}(x)\, d\,x$.

Коли $\mathrm{f}(x)$ є обмежена, то інтеграл все існує, а коли $\mathrm{f}(x)$ не є обмежена, то суми σ і Σ можуть бути розбіжні і нема інтеграла. Коли $\int_a^b \mathrm{f}(x)\, d\,x$ існує, то кажемо, що $\mathrm{f}(x)$ є інтегрувальна в розумінні Lebesgue'а.

Подану нами дефініцію інтегралів необмежених функцій, можна очевидно прикласти тільки до таких функцій, що є в кожній точці скінчені. Коли множина точок, у яких $\mathrm{f}(x) = \pm\infty$, має міру Lebesgue'а рівну нулеві, то можна поширити нашу дефініцію і на такі функції, що є в тих точках нескінчені. Кажемо тоді, що коли $\mathrm{L\,E}[\mathrm{f}(x) = \pm\infty] = 0$, то обчислюємо суми σ і Σ так, начеби в точках множини $\mathrm{E}[\mathrm{f}(x) = \pm\infty]$ було $\mathrm{f}(x) = 0$.

Коли одначе $\mathrm{L\,E}[\mathrm{f}(x) = \pm\infty] > 0$, то функція $\mathrm{f}(x)$ не є інтегрувальна в розумінні Lebesgue'а.

T. III.) Коли дві функції $\mathrm{f}_1(x)$ і $\mathrm{f}_2(x)$ є інтегрувальні[1]) в інтервалі $< a, b >$ і коли міра множини точок, що в них є $\mathrm{f}_1(x) \lesseqgtr \mathrm{f}_2(x)$, є нулем, то маємо:

$$\int_a^b \mathrm{f}_1(x)\, d\,x = \int_a^b \mathrm{f}_2(x)\, d\,x.$$

T. IV.) Коли функція $\varphi(x)$ є інтегрувальна в інтервалі $< a, b >$, а функція $\mathrm{f}(x)$ є в тім інтервалі обмежена і мірна, і коли в тій самій точці не є ніколи $\varphi(x) = \pm\infty$ і $\mathrm{f}(x) = 0$, то добуток $\varphi(x) . \mathrm{f}(x)$ є інтегрувальний в $< a, b >$.

T. V.) Коли функції $\mathrm{f}_1(x), \mathrm{f}_2(x), \mathrm{f}_3(x), \ldots\ldots$ є інтегрувальні в інтервалі $< a, b >$ і коли для кожного натурального числа n є

$$|\mathrm{f}_n(x)| \leq \varphi(x),$$

де $\varphi(x)$ є функція інтегрувальна в $< a, b >$, то маємо:

[1]) Будемо казати коротко „інтегрувальний" замість „інлегрувальний в розумінні Lebesgue'а". Замість „інтегрувальний в розумінні Riemann'а", будемо казати „інтегрувальний R."

$$\int_a^b \underline{\lim}_{n \to \infty} f_n(x)\, dx \leq \underline{\lim}_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, dx \leq \overline{\lim}_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, dx \leq$$

$$\leq \int_a^b \underline{\lim}_{n \to \infty} f_n(x)\, dx.$$

Коли поступ $\{f_n(x)\}$ є збіжний, то маємо:

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \underline{\lim}_{n \to \infty} f_n(x)\, dx.$$

Т. VI.) Коли функції $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x), \ldots$ є скінчені і інтегрувальні в інтервалі $< a, b >$ і коли поступ $\{f_n(x)\}$ є в тім інтервалі рівномірно збіжний, то функція $f(x) = \underline{\lim}_{n \to \infty} f_n(x)$ є інтегрувальна і маємо:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \underline{\lim}_{n \to \infty} f_n(x)\, dx.$$

Т. VII.) Коли функція $f(x)$ є в інтервалі $< a, b >$ інтегрувальна в розумінні Riemann'а, то она є також у тім інтервалі інтегрувальна в розумінні Lebesgue'а і інтеграл Lebesgue'а є рівний інтегралови Riemann'а.

В дальших розділах побачимо, що є фунції інтегрувальні в розумінні Lebesgue'а, але не інтегрувальні в розумінні Riemann'а. Отже інтеграл Lebesgue'а є поширенням поняття інтегралу Riemann'а. Побачимо також, що не всі теореми, що відносяться до інтегралу Lebesgue'а, є правдиві для інтегралів Riemann'а.

II.
НЕГУСТІ ЗАВЕРШЕНІ МНОЖИНИ.

1. До конструкції деяких особливих (і найінтересніших) функцій дійсного аргументу буде нам потрібна завершена негуста множина. Прикладами таких множин займався докладніше G. Cantor[1]). Збудуємо таку завершену (зн. у собі густу і замкнену) і негусту (зн. в кожнім довільно малім інтервалі можна найти такий інтервал, що на нім не лежить жадна точка тої множини) множину на інтервалі $< 0, 1 >$. Буде це один із найважніших

[1]) G. Cantor: Math. Annalen 21, (1883), ст. 590; Acta mathem. 2 (1883), p. 407. Ще раньше будували такі множини: A. Harnack (Math. Ann. 1882, P. du Bois-Reymond (Funktionentheorie 1882), H. J. St. Smith (Proc. London Math. Soc. 1875), V. Volterra (Giorn. di mat. 1881) і W. Veltmann (Ztschr. Math. Phys. 1882).

і найдивніших для геометричної уяви недоступних прикладів точкових множин.

Нехай множина Z складається з усіх таких чисел, що їх можна в трійковій системі числення представити формулою:

$$x = \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \frac{\alpha_3}{3^3} +$$

де кожна цифра α_n є або нулем або двійкою.

Елементом тої множини є також н. пр. число $\frac{1}{3}$, бо можна це число представити в формі:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} +$$

2. Щоби зрозуміти, що наша множина є негуста і завершена в інтервалі $<0,1>$, розгляньмо її геометричну будову.

На замкненім відтинку $<0,1>$ зазначім розімкнений інтервал $\delta_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Довжина того розімкненого інтервалу є $\frac{1}{3}$, а його осередок лежить в осередку інтервалу $<0,1>$. Кожна точка інтервалу δ_1 має абсцису x, що лежить в інтервалі $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$, отже кожна така абсциса представлена в трійковій системі числення має першу цифру на право від десяткової точки $\alpha_1 = 1$. Жадна точка множини Z не лежить на інтервалі δ_1, ціла множина Z лежить на двох замкнених інтервалах $d_2 = <0, \frac{1}{3}>$ і $d_3 = <\frac{2}{3}, 1>$.

На замкненім інтервалі d_2 зазначім тепер концентричний з ним розімкнений інтервал $\delta_2 = \left(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}\right)$, а на інтервалі d_3 розімкнений інтервал $\delta_3 = \left(\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2}\right) = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3^2}, \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2}\right)$ так, щоби оба інтервали d_3 і δ_3 були також концентричні. Довжина кожного з інтервалів δ_2 і δ_3 є $\frac{1}{3^2}$. Кожна точка інтервалів δ_2 і δ_3 має таку абсцису, що коли її представимо в трійковій системі числення, то друга цифра буде $\alpha_2 = 1$. Жадна точка інтервалів δ_2 і δ_3 не належить до множини Z, ціла та множина лежить на замкнених інтервалах:

$$d_4 = <0, \frac{1}{3^2}>, \ d_5 = <\frac{2}{3^2}, \frac{1}{3}>, \ d_6 = <\frac{2}{3}, \frac{7}{3^2}>, \ d_7 = <\frac{8}{3^2}, 1>.$$

На кожнім із останніх чотирох замкнених інтервалів зазначуємо один із наступних розімкнених інтервалів:

$$\delta_4 = \left(\frac{1}{3^3}, \frac{2}{3^3}\right), \quad \delta_5 = \left(\frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3}, \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3}\right), \quad \delta_6 =$$

$$= \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3^3}, \frac{2}{3} + \frac{2}{3^3}\right), \quad \delta_7 = \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3}, \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3}\right).$$

Абсциса кожної точки інтервалів δ_4, δ_5, δ_6, δ_7 має в трійковій системі третю цифру $\alpha_3 = 1$, отже знову жадна точка множини Z не лежить на тих інтервалах, ціла та множина лежить на замкнених інтервалах d_8, $d_9, \ldots\, d_{15}$, що остануть по викиненню з відтинка $d_1 = \langle 0, 1 \rangle$ розімкнених інтервалів δ_1, $\delta_2, \ldots\, \delta_7$. Ми зазначували все на замкненім інтервалі d_n концентричний з ним розімкнений інтервал δ_n так, що довжина інтервалу δ_n була третою частиною довжини інтервалу d_n. Коли будемо таку операцію продовжувати in infinitum, то дістанемо на відтинку $d_1 = \langle 0, 1 \rangle$:

1 інтервал δ_1, що його довжина є		$\frac{1}{3}$,
2 інтервали δ_2, δ_3,	довжина кожного з них є	$\frac{1}{3^2}$,
2^2 інтервалів $\delta_4, \ldots\, \delta_7$,	"	$\frac{1}{3^3}$,
2^3 $\delta_8, \ldots\, \delta_{15}$	"	$\frac{1}{3^4}$,
2^i $\delta_{2^i}, \ldots\, \delta_{2^{i+1}-1}$	"	$\frac{1}{3^{i+1}}$,

Абсциса кожної точки, що лежить на розімкнених інтервалах δ_{2^i}, $\delta_{2^i+1}, \ldots\, \delta_{2^{i+1}-1}$ має в трійковій системі числення цифру $\alpha_{i+1} = 1$, отже жадна точка множини Z не лежить на жаднім інтервалі δ_n. Коли з замкненого інтервалу $d_1 = \langle 0, 1 \rangle$ викинемо всі розімкнені інтервали δ_n, то остане множина Z, отже маємо:

$$Z = d_1 - \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n.$$

Елементами множини Z є очевидно кінці інтервалів δ_n і точки скупчення тих кінців.

З геометричної будови множини Z виходить, що в кожнім оточенні кожної її точки є все ще інші точки, що належать до Z, отже множина Z є в собі густа.

Множина $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$ є сумою счисленої кількости розімкнених інтервалів, отже є сама розімкнена. Отже множина Z є замкнена, бо вона є доповненням розімкненої множини $\triangle = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$ до замкненого інтервалу d_1.

Бачимо отже, що множина Z є завершена.

Розімкнені інтервали δ_n накривають густо відтинок $d_1 = \langle 0, 1 \rangle$ так, що межи якиминебудь двома точками множини Z можна все найти якийсь розімкнений інтервал δ_n, на котрім, як знаємо, нема точок множини Z. Отже множина Z є негуста.

3. Легко тепер можна найти міру множини Z. Міра (в нашім випадку сума довжин) множини $\triangle$ є:

$$L(\triangle) = \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{3^3} + 2^3 \cdot \frac{1}{3^4} + \ldots\ldots = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 1,$$

отже міра множини Z є:

$$L(Z) = L(d_1) - L(\triangle) = 0.$$

Покажемо тепер, як Cantor[1]) доказав, що множина Z має міць continuum.

Число x, що лежить в інтервалі $\langle 0, 1 \rangle$, належить до множини Z тоді і тільки тоді, коли його можна написати в трійковій системі числення без уживання цифри 1. Кажемо виразно можна написати, бо є такі числа, що їх можна написати двояко, або з цифрою 1 або без неї (н. пр. $\frac{1}{3} = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \ldots$). Ми бачили, що елементи множини Z творять лише таку частину множини всіх точок інтервалу $\langle 0, 1 \rangle$, що її міра є нулем.

Коли в трійкових системах, що представляють числа множини Z напишемо всюди цифру 1 замість цифри 2 і ті нові вирази будемо вважати представленнями чисел інтервалу $\langle 0, 1 \rangle$ в двійковій системі числення, то та нова множина A містить у собі всі дійсні числа інтервалу $\langle 0, 1 \rangle$. Кожному елементови множини Z є припорядкований один елемент множини A, а кожному елементови множини A є припорядкований один або два

---

[1]) Acta math. 4 (1884), ст. 386.

елементи множини Z. Множини Z і A мають однакову міць, отже множина Z має міць continuum і є несчислена [1]).

4. Змодифікуємо тепер конструкцію завершеної негустої множини так, що її міра не буде нулем.

З відтинка $<0,1>$ викиньмо концентричний з ним розімкнений інтервал, що його довжина є $\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}$, де $0<\varepsilon<1$. З кожного з невикинених двох замкнених інтервалів викиньмо концентричні з ними і межи собою рівні розімкнені інтервали такі, щоби сума їх довжин була $\left(\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}\right)^2$ З кожного з невикинених чотирох замкнених інтервалів викиньмо такий концентричний з кожним з них інтервал, щоби сума довжин всіх чотирох викинених тепер інтервалів була $\left(\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}\right)^3$, і т. д.

Коли будемо продовжувати таку операцію in infinitum, то сума довжин всіх викинених розімкнених інтервалів буде:

$$\triangle = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}\right)^n = 1-\varepsilon.$$

Міра завершеної негустої множини Z_ε, що її елементами є всі невикинені точки відтинка $<0,1>$ буде отже мати міру:

$$\mathrm{L}\,(Z_\varepsilon) = \varepsilon.$$

Тому, що $0<\varepsilon<1$, бачимо, що можна на відтинку $<0,1>$ будувати завершені і **негусті** множини, що їх міра може довільно наближуватися до довжини цілого відтинка $<0,1>$.

Маємо перед собою знова факт для геометричної інтуїції парадоксальний. З одної сторони множина Z має нулеву міру, хоч має таку саму міць як цілий відтинок, а з другої сторони множина Z_ε має додатню міру, хоч не обіймає собою ніякого навіть найменшого відтинка.

III.

ФУНКЦІЯ RIEMANN'A.

1. Нехай (x) буде знаком функції означеної на цілій простій в наступний спосіб [2]):

---

[1]) Множина A називається счислена, коли її елементи можна припорядкувати взаємно однозначно елементам множини натуральних чисел.

[2]) B. Riemann: Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe. (Habilitationsschrift 1854). Abhandl. d. Gött. Ges. der Wiss. 13. 1868.

$(x) = 0$ коли $x = k + \frac{1}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\ldots$
$(x) = x - k$ $k - \frac{1}{2} < x < k + \frac{1}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots.$

З дефініції виходить, що для кожної вартости аргументу x абсолютна вартість функції (x) є менша як $\frac{1}{2}$. Отже ряд:

$$G(x) = \frac{(x)}{1^2} + \frac{(2x)}{2^2} + \frac{(3x)}{3^2} + \ldots\ldots$$

є рівномірно збіжний для кожного дійсного x і означує одновартісну функцію G (x), що її саме досліджував Riemann.

Функцію (nx) можна при помочі рядів Fourier'а представити формулою[1]:

$$(nx) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin 2 k n x \pi}{k}, \quad n = \pm 1, \pm 2,$$

Вартости функцій (nx) можна означити наступними умовами:

$(nx) = nx - k$ коли $\frac{2k-1}{2n} < x < \frac{2k+1}{2n}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\ldots$

$(nx) = 0$ $x = \frac{2k+1}{2n}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\ldots$

Коли отже x є таким дробом, що його чисельник є непарний, а знаменик парний, то $(nx) = 0$. Колиж x є якенебудь інше число, зн. коли $\frac{2k-1}{2n} < x < \frac{2k+1}{2n}$, для $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, то $(nx) = nx - k$.

Докажемо, що функція (nx) є суцільна в точках $x \gtrless \frac{2k-1}{2n}$, а несуцільна в точках $x = \frac{2k-1}{2n}$.

Нехай x_1 і x_2 будуть два дійсні числа, взяті з інтервалу $\frac{2k-1}{2n} < x < \frac{2k+1}{2n}$ і такі, що $|x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{n}$, де $\varepsilon > 0$ є довільно мале число.

Дістанемо тоді:

$|(nx_1) - (nx_2)| = |nx_1 - k - nx_2 + k| = n|x_1 - x_2| < \varepsilon$, отже функція (nx) є суцільна.

Колиж $x_1 = \frac{2k-1}{2n}$, а $x_2 = \frac{2k-1}{2n} + \varepsilon$, де $\varepsilon < 0$ є довільно мале, то буде:

---

[1]) Н. пр. Goursat: Cours d'Analyse Mathématique, T. I. ed. 5. 1927, ст. 484 і 495.

$$(nx_2)-(nx_1)=n\,\frac{2k-1}{2n}+n\varepsilon-k=-\frac{1}{2}+n\varepsilon.$$

Отже коли число $\varepsilon<0$ наближується до нуля, то ріжниця $(nx_2)-(nx_1)$ наближується до вартости $-\frac{1}{2}$, отже функція (nx) є в точках $x=\frac{2k-1}{2n}$ несуцільна з правої сторони.

Коли тепер виберемо дві вартости аргументу:

$$x_1=\frac{2k+1}{2n}-\varepsilon,\quad x_2=\frac{2k+1}{2n},\quad \varepsilon>0,$$

то дістанемо:

$$(nx_1)-(nx_2)=n\,\frac{2k+1}{2n}-n\varepsilon-k=\tfrac{1}{2}-n\varepsilon.$$

Коли $\varepsilon\longrightarrow 0$, то $(nx_1)-(nx_2)\longrightarrow\frac{1}{2}$ і бачимо, що функція (nx) є в точці $x_2=\frac{2k+1}{2n}$ несуцільна з лівої сторони.

2. Вернім тепер до функції Riemann'a:

$$G(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(nx)}{n^2}.$$

Знаємо вже, що в точках $x\gtrless\frac{2k+1}{2n}$ функції (nx) є суцільні і абсолютно менші від $\frac{1}{2}$, та що ряд $G(x)$ є рівномірно збіжний для кожної вартости аргументу x. З того виходить, що функція $G(x)$ є суцільна для вартостей аргументу $x\lessgtr\frac{2k+1}{2p}$,

для $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ldots.$

$p=1,\ 2,\ 3,\ldots.$

Треба ще прослідити функцію $G(x)$ відносно її суцільности для таких вартостей аргументу, що є неспростимими дробами з непарними чисельниками і парними знаменниками. Докажемо, що в таких точках функція $G(x)$ є несуцільна з обох сторін і обчислимо її скоки[1]).

Напишім ріжницю:

$$G\left(\frac{2k+1}{2p}+\varepsilon\right)-G\left(\frac{2k+1}{2p}\right)\qquad \varepsilon\lessgtr 0.$$

[1]) Очевидно несуцільности не можна ту висновувати з факту, що в точках $x=\frac{2k+1}{2p}$ котрийсь доданок суми $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(nx)}{n^2}$ є несуцільний, бо при сумованню ряду можуть несуцільности взаємно нищитися.

Передовсім треба памятати, що в сумі:

$$G\left(\frac{2k+1}{2p}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n(2k+1)}{2p}\right)}{n^2}$$

треба опустити всі доданки, що їх індекс n є многократтю числа p, бо коли $\frac{n}{p}=m$, то маємо $\left(\frac{m(2k+1)}{2}\right)=0$.

Суму доданків з індексами неподільними на p будемо зазначувати знаком Σ', а суму доданків, що мають індекс подільний на p, знаком Σ''.

Дістанемо отже:

$$G\left(\frac{2k+1}{2p}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{\left(n\frac{2k+1}{2p}\right)}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}{}''\frac{\left(n\frac{2k+1}{2p}\right)}{n^2}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{\left(n\frac{2k+1}{2p}\right)}{n^2},$$

для $k=0,\pm1,\pm2,\ldots.\quad p=1,2,3,\ldots.$

Розложім тепер ряд

$$G\left(\frac{2k+1}{2p}+\varepsilon\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(n\left\{\frac{2k+1}{2p}+\varepsilon\right\}\right)}{n^2}$$ на два доданки:

$$G\left(\frac{2k+1}{2p}+\varepsilon\right)=\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{\left(n\left\{\frac{2k+1}{2p}+\varepsilon\right\}\right)}{n^2}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}{}''\frac{\left(n\left\{\frac{2k+1}{2p}+\varepsilon\right\}\right)}{n^2}.$$

Коли $n=mp$, то маємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}''\frac{\left(n\left\{\frac{2k+1}{2p}+\varepsilon\right\}\right)}{n^2}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(mp\left\{\frac{2k+1}{2p}=\varepsilon\right\}\right)}{m^2p^2}=$$

$$=\frac{1}{p^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(mp\left\{\frac{2k+1}{2p}+\varepsilon\right\}\right)}{m^2}.$$

Зазначім: $m=2r$, коли m є парне,
$m=2r+1$ m „ непарне.

Тоді дістанемо:

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}'' \frac{\left(n\left\{\frac{2k+1}{2p}+\varepsilon\right)\right\}}{n^2} = \frac{1}{p^2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(2rp\left\{\frac{2k+1}{2p}+\varepsilon\right\}\right)}{2^2 r^2} +$$

$$+\frac{1}{p^2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left((2r+1)p\left\{\frac{2k+1}{2p}+\varepsilon\right\}\right)}{(2r+1)^2} = \frac{1}{4p^2}\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{r(2k+1)+2rp\varepsilon}{r^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{p^2}\sum_{r=0}^{\infty}\left((2r+1)\ (\frac{2k+1}{2p}+\varepsilon)\ \right).$$

Функція (x) не зміняє вартости, коли її аргумент побільшимо о ціле число, отже:

$$(r(2k+1)+2rp\varepsilon) = (2rp\varepsilon).$$

Дістанемо отже:

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}'' \frac{\left(n\left\{\frac{2k+1}{2p}+\varepsilon\right\}\right)}{n^2} = \frac{1}{4p^2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(2rp\varepsilon)}{r^2} +$$

$$+\frac{1}{p^2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left((2r+1)\ (\frac{2k+1}{2p}+\varepsilon)\ p\right)}{(2r+1)^2}.$$

$$G\left(\frac{2k+1}{2p}+\varepsilon\right)-G\left(\frac{2k+1}{2p}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(n\left\{\frac{2k+1}{2p}+\varepsilon\right\}\right)-\left(n\,\frac{2k+1}{2p}\right)}{n^2}+$$

$$+\frac{1}{4p^2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(2rp\varepsilon)}{r^2}+\frac{1}{p^2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left((2r+1)\left\{\frac{2k+1}{2p}+\varepsilon\right\}p\right)}{(2r+1)^2}.$$

Всі три ряди правої сторони останнього рівнання є рівномірно збіжні, отже коли $\varepsilon \to 0$, то дві перші суми наближуються до нуля. Треба ще тільки найти граничну вартість третьої суми.

Ми бачили вже, що:

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left((2r+1)p\left\{\frac{2k+1}{2p}+\varepsilon\right\}\right)=\begin{cases}-\frac{1}{2}, & \text{коли } \varepsilon > 0,\\ +\frac{1}{2}, & \varepsilon < 0.\end{cases}$$

Отже буде:

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left[G\left(\frac{2k+1}{2p}+\varepsilon\right)-G\left(\frac{2k+1}{2p}\right)\right]=$$

$$=\begin{cases} -\dfrac{1}{2p^2}\sum\limits_{r=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2r+1)^2}, & \text{коли } \varepsilon > 0, \\ +\dfrac{1}{2p^2}\sum\limits_{r=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2r+1)^2}, & \quad\text{"}\quad \varepsilon < 0. \end{cases}$$

Однак вже Euler найшов формулу:

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(2r+1)^2}+\frac{\pi^2}{8}.$$

Маємо отже:

$$G\left(\frac{2k+1}{2p}+0\right)=-\frac{\pi^2}{16p^2}$$

$$G\left(\frac{2k+1}{2p}+0\right)=\frac{\pi^2}{16p^2}.$$

З дефініції функції (x) виходить, що:

$$G\left(\frac{2k+1}{2p}\right)=0, \text{ для } k=0\pm 1, \pm 2,\ldots\ p=1, 2, 3,\ldots$$

Бачимо отже, що в таких точках, що їх абсциси є вимірні числа (неспростимі дроби) з парними знаменниками і непарними чисельниками, функція Riemann'а є несуцільна по обох сторонах, та несуцільність є першого роду, правий скок є $-\frac{\pi^2}{16p^2}$, а лівий $+\frac{\pi^2}{16p^2}$.

3. Ми вже згадували, що функцію $(n\,x)$ можна означити при помочі формули:

$$(n\,x)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\,\frac{\sin 2k\,n\,\pi\,x}{k},$$

отже функцію $G(x)$ можна означити формулою:

$$G(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\sin 2\,k\,n\,\pi\,x}{k}.$$

Вимірні точки $x=\frac{2k+1}{k}$, що в них функція $G(x)$ є несуцільна, лежать густо на простій, отже функція Riemann'а це функція, що її можна представити при помочі аналітичної формули (а саме при помочі нескінчених рядів) і що має в кожнім довільно малім інтервалі точки несуцільности.

Множина точок несуцільности функції $G(x)$ є очевидно счислена (бо множина **всіх** вимірних точок є счислена), але вона є незводна [1]) і тому вона не є інтегрувальна в розумінні теорії Cauchy-Dirichlet-a, бо Cauchy і Dirichlet означили поняття інтеграла так, що несуцільна функція є інтегрувальна тоді і тільки тоді, коли множина точок її несуцільности є зводна.

Riemann подав таку дефініцію інтеграла, що її можна прикладати і до деяких таких несуцільних функцій, що їх не можна було інтегрувати в розумінні Dirichlet'a. До таких функцій належить саме функція Riemann'a. Lebesgue доказав, що обмежена функція є інтегрувальна в розумінні Riemann'a тоді і тільки тоді, коли множина точок її несуцільности має міру (Lebesgue'a) рівну нулеві. Тому, що функція $G(x)$ — як ми бачили — відповідає умовам тої теореми, є вона інтегрувальна в розумінні Riemann'a.

Тому, що функцію $G(x)$ можна інтегрувати почленно, існує неозначений інтеграл:

$$F(x) = \int G(x)\,dx = \int \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n\,x)}{n^2}\;dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{(n\,x)}{n^2}\;dx.$$

Коли функція $f(x)$ є обмежена і інтегрувальна в розумінні Riemann'a, то її неозначений інтеграл

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(x)\;dx\; + \;\text{const.}$$

має такі властивости [2]):

1) $F(x)$ є функція суцільна і обмежено змінлива [3]),

2) Коли в точці x функція $f(x)$ є суцільна, то в тій точці існує похідна функції $F(x)$ і маємо:

---

[1]) Похідна похідної множини називається друга похідна тої множини. Похідна $(n-1)$-ої похідної є n-та похідної. Отже $A^{dd} = (A^d)^d$, $A^{ddd} = (A^{dd})^d$ і т. д. Ту операцію можна продовжувати і трансфінітну $(\omega, \omega+1, \ldots\, \eta < \Omega)$ кількість разів. Коли кожна похідна має елементи, то множина називається незводна. Колиж є таке трансфінітне число η другої кляси, що $A^{\underbrace{d \ldots d}_{\eta}} = 0$, то множина A називається зводна (réductible).

[2]) Можна їх легко доказати при помочі теореми про середню вартість.

[3]) Функція $F(x)$ називається **обмежено змінлива** в інтервалі $< a, b >$, коли при кожнім поділі інтервалу $< a, b >$ точками:

$$a = a_0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_{n-1} \leqq a_n = b \quad \text{число}$$

$$V = |f(a_1) - f(a_0)| + |f(a_2) - f(a_1)| + |f(a_3) - f(a_2)| + \ldots\ldots + |f(a_n) - f(a_{n-1})|$$

є все менше від якогось сталого числа M.

$$\frac{dF}{dx} = f(x).$$

З тої теореми виходить, що неозначений інтеграл функції Riemann'a має похідну (рівну функції G (x)) в таких точках, що їх абсциса $x \neq \frac{2k+1}{2p}$.

Обчислимо тепер похідні відношення[1]) функції $F(x) = \int G dx$ в точках $x = \frac{2k+1}{2p}$.

Коли $x = \frac{2k+1}{2p}$ і $\alpha < x$, то при помочі теореми про середню вартість можна доказати, що:

$$\lim_{\alpha \to x} \frac{F(\alpha) - F(x)}{\alpha - x} = f(x) - \frac{\pi^2}{16p^2},$$

а коли $\alpha < x$, то маємо:

$$\lim_{\alpha \to x} \frac{F(\alpha) - F(x)}{\alpha - x} = f(x) - \frac{\pi^2}{16p^2}.$$

Отже функція $F(x)$ має в точках $x = \frac{2k+1}{2p}$ означену праву і ліву похідну, але вони є ріжні і нема в тих точках похідної (в звичайному розумінні). Це перший знаний в історії математики приклад функції, що не має похідної в густій множині точок. Cauchy подав простий приклад функції $\varphi(x) = +\sqrt{x^2}$, що не має похідної в точці $x = 0$. Для функції F(x) можна найти в кожнім навіть найменшім інтервалі безліч таких точок, що в них та функція не має похідної. Hankel і Cantor подали метод („загущування особливостей"), при помочі котрого можна будувати такі функції. Прикладом такої функції є:

---

[1]) Похідним відношенням функції $f(x)$ в точці x називаемо відношення $\frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$, де $x' \gtrless x$.

Коли $x' < x$ і $x' \to x$, то множина E вартостей, до котрих може наближуватися похідне відношення, має якусь (скінчену або нескінчену) горішну і долішну границю. Число $f^-(x) = \sup E$ називається горішна ліва похідна, а $f_-(x) = \inf E$ долішна ліва похідна функції $f(x)$ в точці x. Коли $x' > x$ і $x' \to x$, то аналогічно означуємо праву горішню похідну $f^+(x)$ і праву долішню похідну $f_+(x)$. Коли $f^+ = f_+$ $(f^- = f_-)$, то кажемо, що функція $f(x)$ має праву (ліву) похідну. Коли всі чотири похідні є рівні, то їх спільна вартість є похідна в звичайному розумінні.

$$f(x) = \int \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos \lg |x - a_p|}{p^2}\, dx,$$

де $a_1, a_2, a_3, \ldots$ є поступом, що його елементами є всі вимірні числа.

Приклад Riemann'а показав нам, що при помочі інтегрування можна конструувати такі суцільні функції, для котрих множина точок, що в них нема похідної, є густа. Але інтегрування не може нам дати такої функції, що не має похідної в жадній точці якогось інтервалу, бо множина точок, що в них неозначений інтеграл не має похідної, мусить мати міру Lebesgue'а рівну нулеві.

При помочі іншої методи збудував Weierstrass (а ще раньше Bolzano) таку суцільну функцію, що в ніякій точці немає похідної.

IV.

ФУНКЦІЯ WEIERSTRASS'А.

1. Нехай a і b будуть два дійсні числа, що справджують наступні умови:

α) $0 < b < 1$,

β) a є непарне натуральне число

γ) $a \cdot b > 1 + \frac{3\pi}{2}$.

Такими двома числами, що справджують умови α), β) і γ) є напр.: $a = 15$, $b = \frac{1}{2}$.

Weierstrass досліджував функцію означену нескінченим рядом:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos a^n \pi x.$$

Та функція є суцільна для кожної вартости дійсного аргументу x, бо ряд, що її означує, є рівномірно збіжний.

Можемо написати:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m-1} b^n \cos a^n \pi x + b^m \cos a^m \pi x + b^{m+1} \cos a^{m+1} \pi x + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{m-1} b^n \cos a^n \pi x + R'_m.$$

Тому, що $|\cos a^m \pi x| \leq 1$, будемо мати:

$$|R'_m| \leq b^m + b^{+1m} + \ldots = \frac{b^m}{1-b}$$

Тому що $|b| < 1$, буде $\lim_{m \to \infty} |R'_m| = 0$, отже наш ряд є дійсно рівномірно збіжний.

Якби було $a\,b < 1$, то існувалаби також суцільна похідна функції $f(x)$:

$$f'(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} a^n\, b^n\, \pi\, \sin a^n \pi\, x.$$

Інакше буде, коли згідно з умовою γ) буде $a\,b > 1 + \frac{3\pi}{2}$.

Означім:

$$S_m = \frac{1}{h}\sum_{n=0}^{m-1} b^n \{\cos\,[a^n\pi\,(x + h)] - \cos\, a^n\pi\, x\},$$

$$R_m = \frac{1}{h}\sum_{n=m}^{\infty} b^n \{\cos\,[a^n\pi\,(x + h)] - \cos\, a^n\pi\, x\}.$$

Тепер можемо похідне відношення функції $f(x)$ написати в наступній формі:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = S_m + R_m.$$

Тому, що:

$$\int_x^{x+h} \sin a^n\pi\, z\, dz = (-a^n\pi)^{-1}\,[\cos a^n\pi\,(x+h) - \cos a^n\pi\, x]$$

$$\text{і}\quad \left|\int_x^{x+h} \sin a^n\pi\, d\, z\right| \leqq |\,h\,|,$$

дістанемо:

$$|\,S_m| \leqq \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\pi\, a^n\, b^n}{|h|}\,|h| = \sum_{n=0}^{m-1} \pi\, a^n b^n = \pi\,\frac{a^m\, b^m - 1}{a\, b - 1} < \frac{\pi\, a^m\, b^m}{a\, b - 1}.$$

Обчислимо тепер долішню границю абсолютної вартости останка R_m, надаючи приростови аргументу h означені спеціяльні вартости.

Можна очевидно для кожного x і кожного натурального m найти все одну і тільки одну таку пару чисел α_m і ξ_m, де α_m є ціле число, $a - \frac{1}{2} < \xi_n < + \frac{1}{2}$, що буде:

$$a^m\, x = \alpha_m + \xi_m.$$

Напишім тепер:

$$h = \frac{e_m - \xi_m}{a^m},\ \text{де}\ e_m = \pm 1.$$

Число h має очевидно все такий самий знак, як число e_m і буде все: $|\,h\,| \leqq \frac{3}{2a^m}$ і $\lim\limits_{m \to \infty} h = 0$.

Тепер дістанемо:

$$\cos a^n\,\pi\,(x + h) = \cos a^{n-m}\,(\alpha_m + e_m)\,\pi = (-1)^{\alpha_m + 1},$$

бо a є непарне, а $e_m = \pm 1$, отже добуток $a^{n-m}(\alpha_m + e_m)$ є парний, коли $\alpha_m + 1$ є парне, а непарний, коли $\alpha_m + 1$ є непарне.

Маємо далі:

$$\cos a^n \pi x = \cos (a^{n-m} a^m \pi x) = \cos \{a^{n-m} \pi (\alpha_m + \xi_m)\} =$$
$$= \cos (a^{n-m} \alpha_m \pi) \cos (a^{n-m} \xi_m \pi) - \sin (a^{n-m} \alpha_m \pi) \sin (a^{n-m} \xi_m \pi) =$$
$$= \cos (a^{n-m} \alpha_m \pi) \cos (a^{n-m} \xi_m \pi) = (-1)^{\alpha_m} \cos (a^{n-m} \xi_m \pi),$$

бо число $a^{n-m} \alpha_m$ є парне тоді і тільки тоді, коли є парне число α_m.

Можемо тепер написати:

$$R_m = \frac{(-1)^{\alpha_m+1}}{h} \sum_{n=m}^{\infty} b^n [1 + \cos (a^{n-m} \xi_m \pi)].$$

Тому, що $-\frac{\pi}{2} < \xi_m \pi < \frac{\pi}{2}$ і a є непарне, маємо $\cos (a^{n-m} \xi_m \pi) > 0$.

Кожний доданок останньої суми є більший від нуля, отже та сума є менша від першого доданка, а цей доданок є неменший від b^m, отже дістанемо:

$$|R_m| > \frac{b^m}{|h|} > \frac{b^m}{\frac{3}{2a^m}} = \frac{2a^m b^m}{3}.$$

Тому, що $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$, є також $\frac{2}{3} a^m b^m > \frac{a^m b^m \pi}{ab-1}$.

Тепер буде: $|R_m| > |S_m|$ і можемо написати нерівність:

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| > \left|R_m\right| - \left|S_m\right| > \frac{2}{3} a^m b^m - \frac{a^m b^m \pi}{ab-1} =$$
$$= \frac{2}{3} (ab)^m \frac{ab - 1 - \frac{3\pi}{2}}{ab-1}$$

Тому, що $ab > 1$ і $ab - 1 - \frac{3\pi}{2} > 0$, маємо:

$$\lim_{m \to \infty} \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| = \lim_{h \to 0} \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| = \infty.$$

Ми бачили, що h має такий знак як e_m, отже R_m має такий знак, як добуток $(-1)^{\alpha_m+1} e_m$.

Тому, що $|R_m| > |S_m|$, має похідне відношення $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ такий знак як $(-1)^{\alpha_m+1} e_m$.

Але ми можемо для довільного m надати числови e_m який хочемо знак, бо ми умовилися тільки, що має бути $e_m = \pm 1$.

Коли $e_m = +1$, то $h > 0$ і коли тоді h маліє до нуля, то долішня границя вартостей відношення $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ дає нам $f_+(x)$, а горішня границя $f^+(x)$.

В поступі чисел α_1, α_2, α_3,.... мусить бути або безконечно багато парних чисел і тоді $(-1)^{\alpha_m+1} e_m$ отже і відношення $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ буде для безконечного числа індексів m відємне, а то відношення абсолютно росте до безконечности, коли $m \to \infty$, отже буде:

$$f_+(x) = -\infty,$$

або межи числами α_m є безконечно багато непарних і тоді похідне відношення буде для безконечного числа індексів m додатнє і дістанемо:

$$f^+(x) = +\infty.$$

Коли знова буде $e_m = -1$, то $h < 0$ і для $h \to 0$ дістанемо ліві похідні функції $f(x)$. Коли тоді буде безліч парних α_m, то $(-1)^{\alpha_m+1} e_m$, а так само похідне відношення буде для безконечного числа індексів m додатнє, отже буде:

$$f^-(x) = +\infty.$$

Колиж буде безконечно богато непарних індексів m, то дістанемо:

$$f_-(x) = -\infty.$$

З того виходить, що коли є безліч парних чисел α_m, то:

$$f_+(x) = -\infty \quad \text{і} \quad f^-(x) = +\infty,$$

отже функція $f(x)$ не має похідної.

Колиж є безліч непарних α_m, тоді:

$$f^+(x) = +\infty \quad \text{і} \quad f_-(x) = -\infty$$

і функція $f(x)$ також не має похідної.

А тому, що в поступі натуральних чисел $\{\alpha_m\}$ мусить бути безліч парних або безліч непарних чисел (або й одних і других), то функція $f(x)$ в жадній точці не має похідної ані скінченої ані безконечної.

Функція Weierstrass'а має таку властивість, що в кожній точці якась одна її екстремальна похідна[1]) є рівна $+\infty$, а якась інша є рівна $-\infty$. Коли в якійсь точці та функція має праву похідну, зн. коли є $f^+(x) = f_-(x)$, то та права похідна мусить

[1]) Числа $f^+(x)$, $f_+(x)$, $f^-(x)$ і $f_-(x)$ називаємо екстремальними похідними функції $f(x)$ в точці x.

Дістанемо:

$$\mathrm{T}=\left|\mathrm{f}\left(\frac{p}{a^m}\right)-\mathrm{f}(\mathrm{l})\right|+\sum_{i=0}^{n-1}\left|\mathrm{f}\left(\frac{p+i+1}{a^m}\right)-\mathrm{f}\left(\frac{p+i}{a^m}\right)\right|+$$
$$+\left|\mathrm{f}(\mathrm{L})-\mathrm{f}\left(\frac{p+n}{a^m}\right)\right|.$$

Нехай r буде найменше з чисел $\left|\mathrm{f}\left(\frac{p+i+1}{a^m}\right)-\mathrm{f}\left(\frac{p+i}{a^m}\right)\right|$.

Буде тоді: $\mathrm{T}\leqq nr$.

З наших умов виходить, що:

$$\frac{p-1}{a^m}<\mathrm{l},\qquad \frac{p+n+1}{a^m}>\mathrm{L},$$

отже: $\mathrm{L}-\mathrm{l}<\frac{n+2}{a^m}$, $n>a^m(\mathrm{L}-\mathrm{l})-2$.

Так як в попереднім уступі, напишім:

$$a^m x=\alpha_m+\xi_m,\qquad h=\frac{e_m-\xi_m}{a^m}.$$

Ми мали нерівність:

$$\left|\frac{\mathrm{f}(x+h)-\mathrm{f}(x)}{h}\right|\geq a^m b^m\left(\frac{2}{3}-\frac{\pi}{ab-1}\right).$$

Коли приймемо:

$$e_m=+1,\ \xi_m=0,\ \alpha_m=p+i,\ \text{то буде:}$$

$$x=\frac{p+i}{a^m},\ h=\frac{1}{a^m},\ \text{і дістанемо:}$$

$$\left|\mathrm{f}\left(\frac{p+i+1}{a^m}\right)-\mathrm{f}\left(\frac{p+2}{a^m}\right)\right|\geq b^m\left(\frac{2}{3}-\frac{\pi}{ab-1}\right).$$

Отже тепер буде:

$$\mathrm{T}\geq\left(\frac{2}{3}-\frac{\pi}{ab-1}\right)[a^m b^m(\mathrm{L}-\mathrm{l})-2b^m].$$

На основі наших умов є $b<1$, $ab>1$, $\frac{2}{3}-\frac{\pi}{ab-1}>0$, отже коли $m\to\infty$, то повна змінливість росте безмежно і функція $\mathrm{f}(x)$ не є обмежено змінлива.

Ту властивість функції Weierstrass'а можна було виснувати зі знаної теореми, що каже, що кожна обмежено змінлива функція має похідну майже[1]) в кожній точці інтервалу, в котрім она

[1]) Кажемо, що **майже** кожний елемент множини A має якусь властивість, коли множина елементів, що належать до A, але не мають тої властивости, має міру рівну нулеві.

є означена, зн. множина точок інтервалу, що в них обмежено змінлива функція не має похідної, має міру (Lebesgue'a) рівну нулеві.

Тому, що математики XIX віку не звернули чомусьто уваги на досліди Bolzano і не знали його прикладу, ніхто перед Weierstrass'ом не припускав, щоби існувала суцільна функція без похідної, бо ніхто не вірив, щоби була можлива така „суцільна лінія“, що в жадній точці не має точно означеної стичної.

3. З огляду на велику історичну вагу функції Weierstrass'a розглянемо ще функцію без похідної, що не ріжниться істотно від тої функції, що ми її подали в попереднім уступі. Вона інтересна тим, що означимо її без помочі гоніометричних функцій.

Означім функцію $\varphi(x)$ при помочі наступних формул:

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2} - x, \text{ коли } 0 \leqq x \leqq 1$$
$$\varphi(x+1) = x - \tfrac{1}{2}.$$

Для кожного цілого числа s буде: $\varphi(x+s) = (-1)^s \cdot \varphi(x)$, а коли $a = 2n+1$ є додатне непарне число, то:

$$\varphi(a s) = \varphi(s + 2 n s) = (-1)^{2ns}\, \varphi(s) = \varphi(s).$$

Функція $\varphi(x)$ є періодична, її періодом є число 2. Вона є очевидно суцільна, а її образ складається з відтинків, що є нахилені до оси абсцис на переміну під кутом 45° і 135°. Отже абсолютна вартість кожної екстремальної похідної тої функції рівнається одиниці.

Коли α і β є якінебудь дійсні числа, то абсолютна вартість кожної екстремальної похідної функції $\alpha\,\varphi(\beta x)$ рівнається абсолютній вартости добутка $\alpha \cdot \beta$.

Нехай тепер a і b будуть два числа, що справджують такі самі умови, як у попереднім уступі.

Означім функцію:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \varphi(a^n x).$$

Тому, що $|\varphi(x)| \leqq \frac{1}{2}$, буде:

$$|R_m(x)| = \left|\sum_{n=m}^{\infty} b^n \varphi(a^n x)\right| \leqq \tfrac{1}{2}(b^m + b^{m+1} + \ldots) = \frac{b^m}{2(1-b)}.$$

Тому, що $0 < b < 1$, маємо $\lim\limits_{m \to \infty} |R_m| = 0$, сума $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b^n \varphi(a^n x)$ є рівномірно збіжна і функція $f(x)$ є суцільна для кожної дійсної вартости аргументу.

Функції $S_m(x) = \sum\limits_{n=0}^{m-1} b^n \varphi(a^n x)$ є сумами скінченої кількости таких функцій, що мають праву і ліву похідну в кожній точці, отже і функція $S_m(x)$ має ліву і праву похідну. Для правої горішньої похідної дістанемо:

$$|\overset{+}{S}_m(x)| \leq 1 + a\,b + a^2\,b^2 + \ldots . + a^{m-1}\,b^{m-1} = \frac{(a\,b)^m - 1}{a\,b - 1}$$

Такі самі нерівности дістанемо для кожної іншої екстремальної похідної.

Нехай тепер ξ буде яке небудь дійсне число. Напишім: $a^n\,\xi - \frac{1}{2} \leq s_n < a^n\,\xi + \frac{1}{2}$.

Для кожного натурального числа n є тільки одно таке ціле число s_n, що справджує останні нерівности. З тих нерівностей виходить нерівність:

$$|a^n\xi - s_n| \leq \tfrac{1}{2}, \text{ отже } \varphi(a\ \ \xi - s_n) \geq 0.$$

З дефініції функції φ виходить:

$$\varphi(a^n\,\xi) = (-1)^{s_n}\,\varphi(a^n\,\xi - s_n).$$

Можемо отже написати:

$$|\varphi(a^n\,\xi| = (-1)^{s_n}\,\varphi(a^n\,\xi).$$

Напишім тепер:

$$x_n'' = \frac{s_n + 1}{a^n},\ x'_n = \frac{s_n - 1}{a^n},$$

отже:

$$s_n = a^n\,x_n'' - 1,\ s_n = a_n\,x_n' + 1$$

$$o < x_n'' - \xi < \frac{3}{2\,a^n},\ o < \xi - x_n' \leq \frac{3}{2\,a^n}.$$

Маємо далі:

$$R_n(x_n'') = b^n\,\varphi(s_n + 1) + b^{n+1}\,\varphi(a\,(s_n + 1)) + b^{n+2}\,(a^2\,(s_n + 1)\,) + \ldots$$

Тому, що:

$$\varphi(s_n + 1) = \tfrac{1}{2}\,.\,(-1)^{s_n+1}$$

дістанемо:

$$R_n(x_n'') = (-1)^{s_n+1}\,\frac{b^n}{2}\,(1 + b + b^2 + \ldots .).$$

Тому, що:

$$(-1)^{s_n}\,\varphi(a^n\,\xi) = |\,\varphi(a^n\,\xi)\,|,$$

дістанемо:

$$R_n(\xi) = (-1)^{s_n+1}\cdot\frac{b^n}{2}\Big[-2\,|\,\varphi(a^n\,\xi)\,| + (-1)^{s_n+1}\,2\,b\,\varphi(a^{n+1}\,\xi) +$$

$$+ (-1)^{s_n+1}\,2\,b^2\,\varphi(a^{n+2}\,\xi) + \qquad\Big]$$

Коли віднімемо дві останні формули на R_n, дістанемо:

$$R_n(x_n'') - R_n(\xi) = (-1)^{s_n+1} \cdot \frac{b_n}{2}(1+\alpha), \text{ де } \alpha \geqq 0,$$

бо: $1+2|\varphi(a^n\xi)| \geqq 1, b^r - (-1)^{s_n+1} 2 b^r \varphi(a^{n+r}\xi) \geqq 0$, для r (—1)1, 2, 3,....

Числа $R^n(x^{n\prime})$ і $R_n(x_n'')$ є межи собою рівні, бо функція $\varphi(x)$ є періодична.

Можемо очевидно написати:

$$R_n(x_n') = b^n \varphi(s_n - 1)(1 + b + b^2 + \ldots).$$

Отже дістанемо:

$$R_n(\xi) - R_n(x_n') = (-1)^{s_n} \frac{b^n}{2}(1+\alpha).$$

З доказаних давніше нерівностей:

$$o < x_n'' - \xi < \frac{3}{2a^n},$$

$$o < \xi - x_n' \leqq \frac{3}{2a^n}$$

виходить тепер:

$$(\alpha) \quad \frac{R_n(x_n'') - R_n(\xi)}{x_n'' - \xi} = (-1)^{s_n+1} \cdot \frac{(ab)^n}{3} \cdot A_n'',$$

$$(\beta) \quad \frac{R_n(\xi) - R_n(x_n')}{\xi - x_n'} = (-1)^{s_n} \cdot \frac{(ab)^n}{3} A_n',$$

де A_n'' і A_n' є якісь числа, що справджують умови:

$$A_n'' > 1, \quad A_n' \geqq 1.$$

Коли тепер напишемо:

$$(\gamma) \quad \frac{S_n(x_n'') - S_n(\xi)}{x_n'' - \xi} = (-1)^{s_n+1} \frac{(ab)^n - 1}{ab - 1} \cdot \vartheta_n'',$$

то мусить бути $|\vartheta_n''| \leqq 1$.

Додаймо (γ) і (α), то дістанемо:

$$\frac{f(x_n'') - f(\xi)}{x_n'' - \xi} = (-1)^{s_n+1} \frac{(ab)^n}{3} \left\{ A_n'' + 3\vartheta_n'' \frac{(ab)_n - 1}{(ab-1)(ab)^n} \right\}.$$

На основі умов відносно чисел a і b можна тепер написати:

$$(\mathrm{I}) \quad \frac{f(x_n'') - f(\xi)}{x_n'' - \xi} = (-1)^{s_n+1} \frac{(ab)^n}{6}(1 + \beta_n''), \text{ де } \beta_n'' > 0.$$

Коли додамо (γ) і (β) дістанемо аналогічно:

$$(\mathrm{II}) \quad \frac{f(\xi) - f(x_n')}{\xi - x_n'} = (-1)^{s_n} \frac{(ab)^n}{6}(1 + \beta_n'), \text{ де } \beta_n' > 0.$$

Межи числами s_n є певно безконечно богато парних або безконечно богато непарних.

Тому, що $x_n'' > \xi$, а $\xi > x_n'$ дістанемо з формул (I) і (II):

$$f_+(x) = -\infty, \quad f^-(x) = +\infty,$$

коли є безліч парних чисел s_n,

$$f^+(x) = +\infty, \quad f_-(x) = -\infty,$$

коли є безліч непарних чисел s_n.

Тому, що ξ є якимнебудь дійсним числом, не має функція $f(x)$ в жадній точці похідної, бо в жадній точці не є всі екстремальні похідні межи собою рівні [1]).

V.

ФУНКЦІЯ DIRICHLET'А.

1. Означити словами функцію Dirichlet'а дуже легко. Є це функція, що для кожної вимірної вартости аргументу має вартість одиниці, а для невимірного аргументу є рівна нулеві. Та функція є інтересна тим, що можна її представити при помочі подвійної границі поступу суцільних функцій. Крім того є вона клясичним прикладом функції інтегрувальної в розумінні Lebesgue'а, але неінтегрувальної в розумінні Riemann'а і прикладом функції другої кляси Baire'а [2]).

Cantor доказав, що множина вимірних чисел є счислена, зн. що можна найти такий поступ, що кожне вимірне число є його елементом.

Нехай $a_1, a_2, a_3, \ldots$ буде такий поступ, що в нім множина всіх вимірних чисел $\{a_n\}$ є понумерована (натуральними індексами).

Напишім тепер:

$$\varphi(x) = \lim_{i \to \infty} \frac{1}{1 + i x^2}.$$

Функція $\varphi(x) = 1$ коли $x = 0$,
$\quad = 0 \quad x \neq 0$.

Функція $\varphi(x - a_n) = 1$ коли $x = a_n$, (a_n = вимірне число),
$\quad = 0 \quad x \neq a_n$.

Напишім далі:

$$\Phi_n(x) = \varphi(x - a_1) + \varphi(x - a_2) + \ldots\ldots + \varphi(x - a^n).$$

Маємо тепер:

---

[1]) C. Carathéodory: Vorl. über reelle Funktionen, 1918, §§ 519-22.

[2]) Функція $f(x)$ є функцією першої кляси Baire'а, коли вона є границею поступу суцільних функцій. Функція $f(x)$ є функцією n-тої кляси Baire'а, коли вона є границею поступу функцій $(n-1)$-ої кляси Baire'а.

$$\Phi_n(x) = 1, \text{ коли } x = a_i,\ i = 1, 2, \dots n,$$
$$= 0 \quad „ \quad x \neq a_i,\ i = 1, 2, \dots n.$$

Функцію Dirichlet'а можна тепер означити формулою:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \Phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x - a_n).$$

Напишім:

$$\Psi i_n(x) = \frac{1}{1 + i(x - a_1)^2} + \frac{1}{1 + i(x - a_2)^2} + \dots + \frac{1}{1 + i(x - a_n)^2}$$

Дістанемо отже:

$$\Phi_n(x) = \lim_{i \to \infty} \Psi i_n(x),$$

а далі:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{i \to \infty} \Psi i_n(x).$$

Функції $\Psi i_n(x)$ є очевидно для кожного дійсного аргументу суцільні, отже функція $f(x)$ є збудована з суцільного поступу функцій через подвійний перехід до границі. Функції

$$\Phi_n(x) = \lim_{i \to \infty} \Psi i_n(x)$$

є функціями першої кляси Baire'а, а функція $f(x)$ як границя поступу функцій першої кляси є щонайвисше функція другої кляси. Функція $f(x)$ є очевидно несуцільна в кожній точці простої, отже (на основі відомої теореми Baire'а) не може вона бути границею поступу суцільних функцій, зн. не є функцією першої кляси Baire'а [1]).

2. Функція Dirichlet'а є інтегрувальна в розумінні Lebesgue'а, бо вона є мірна і обмежена. Що вона є мірна, видно з того, що коли: $\alpha < 0$, то множина точок x, для котрих $f(x) > \alpha$ є множиною всіх дійсних чисел, коли: $0 \leqq \alpha < 1$, то множина точок x, для котрих $f(x) > \alpha$ є множиною всіх вимірних чисел, а коли: $1 \leqq \alpha$, то множина точок x, для котрих $f(x) > \alpha$, не має елементів. Отже для кожної вартости числа α множина $E(f(x) > \alpha)$ є мірна.

Функція є інтегрувальна в розумінні Riemann'а тоді і тільки тоді, коли множина точок її несуцільности має міру (Lebesgue'а) рівну нулеві. Функція Dirichlet'а не є суцільна в жадній точці простої, отже вона не є інтегрувальна в розумінні Riemann'а.

На функції Dirichlet'а можна бачити, що в виразах, що в них виступає два рази знак lim, не можна зміняти порядку тих знаків.

---

[1]) Про змінливість функції Dirichlet'а гл. § VI, 2.

Коли x є яким небудь дійсним числом, то в інтервалі $(x-1,\ x+1)$ є все безконечно богато вимірних чисел a_n, отже є безконечно богато таких індексів n, що:

$$\frac{1}{1+i\,(x-a_n)^2} > \frac{1}{1+i}.$$

Отже буде:

$$\lim_{n\to\infty} \Psi i_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+i\,(x-a_n)^2} = +\infty.$$

Очевидно буде також:

$$\lim_{i\to\infty}\ \lim_{n\to\infty}\ \Psi i_n = +\infty.$$

Звернемо ще увагу на це, що функцію Dirichlet'а можна представити ще в інший спосіб, а саме при помочі формули:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \lim_{m\to\infty} (\cos n!\ \pi x)^2 \right\}^m.$$

3. M. Fréchet означує в теорії абстрактних множин поняття границі (limes) поступу в наступний спосіб:

1. Поступ, що складається з однакових елементів $(a_n = a)$ є збіжний і $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,

2) Коли поступ $\{a_n\} = \{a_1, a_2, \ldots\}$ є збіжний і $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то поступ: $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots,$ (де $n_2 > n_1, n_3 > n_2, \ldots$) що складається з деяких тільки (але з безконечної кількости) елементів поступу $\{a_n\}$ є також збіжний і має ту саму границю.

В теорії Fréchet'а не означується докладніше поняття границі поступу. Кажеться тільки, що деяким поступам є однозначно припорядковані числа, що називається їх границями й що справджують обі подані вище умови.

Такі поступи називаються збіжні.

В тій теорії є точка a точкою скупчення множини A, коли та точка є границею якогось збіжного поступу, що складається з елементів множин A і має безконечно богато ріжних елементів. Похідна це множина всіх точок скупчення, а замкнення (ferméture, abgeschlossene Hülle) це сума множини A і її похідної.

В теорії точкових множин евклідових просторів є замкнення все замкненою множиною. На функції Dirichlet'а покажемо, що коли поняття границі означимо тільки при помочі двох умов Fréchet'a, то замкнення множини A не мусить бути замкненою множиною, зн. границя кожного збіжного поступу зложеного з елементів множини A не мусить бути елементом тої множини.

Замкнення множини A можна ту також означити як множину таких елементів, що є границями збіжних поступів, зложених з елементів (не конче ріжних) множини A. Замкнення множини A будемо зазначувати знаком A^{r}.

Нехай тепер A буде множиною, що її елементами є суцільні функції дійсного аргументу (отже не точки, тільки функції!). Такі функції будемо зазначувати літерою $y = y(x)$, де x є аргументом. Границю (limes) означимо так, що будемо писати:

$y = \lim\limits_{n \to \infty} y_n(x)$, коли для кожного аргументу x поступ чисел y_n є збіжний і має границю y (в звичайному розумінні)[1].

Замкнення A^{r} буде ту множиною таких функцій, що є границями збіжних поступів суцільних функцій. Множина A^{r} складається отже з функцій що найвище першої кляси Baire'a. Множина A^{rr}, зн. замкнення множини A^{r}, є множиною функцій що найвище другої кляси Baire'a. Ми бачили, що функція Dirichlet'a є функцією другої кляси, але не є функцією першої кляси, отже не є правдива рівність: $A^{\mathrm{rr}} = A^{\mathrm{r}}$. Але множина M є замкнена тоді і тільки тоді, коли $M^{\mathrm{r}} = M$, отже множина A^{r} не є замкнена, бо вона не є ідентична зі своїм *замкненням*.

VI.

ФУНКЦІЇ, ЩО ЇХ λ-ОВА ЗМІНЛИВІСТЬ Є БЕЗКОНЕЧНО ВЕЛИКА.

1. Функція $f(x)$ називається частинно-суцільна з гори (nach oben halbstetig), в точці x_0, коли для кожного додатнього числа ε можна найти таке додатнє число δ, що з нерівности:

$$|x - x_0| < \delta$$

виходить нерівність:

$$f(x) - f(x_0) < \varepsilon.$$

Функція $f(x)$ є в точці x_0 частинно-суцільна з долини (nach unten halbstetig), коли для кожного додатнього числа ε можна найти таке додатнє число δ, що з нерівности:

$$|x - x_0| < \delta$$

виходить нерівність:

$$f(x_0) - f(x) < \varepsilon.$$

Функція, що є частинно-суцільна з гори й з долини, є суцільна (в звичайному розумінні).

---

[1]) Очевидно таке означення границі є згідне з умовами Fréchet'a.

Подамо приклад функції, що в жадній точці не є частинно суцільна ані з гори ані з долини.

Означім функцію $f(x)$ на цілій простій в наступний спосіб:

$f(x) = 1 - \frac{1}{n}$, коли $x = \frac{m}{n}$ є неспростимий дріб, m є додатнє число і n є парне,

$f(x) = \frac{1}{n} - 1$, коли $x = \frac{m}{n}$ є неспростимий дріб, m є додатнє число і n є непарне,

$f(x) = 0$, коли x є невимірне число.

Зазначім літерою δ якийнебудь інтервал, на котрім лежить якась точка x_0 з додатньою абсцисою.

Нехай k буде якенебудь ціле число. В інтервалі δ лежить безконечно богато точок з вимірними абсцисами $\frac{m}{n}$, де m є додатнє, n є парне і числа m і n не мають спільного дільника. Але межи тими точками буде лише скінчена кількість таких точок, що їх абсциси справджують умову: $n \leq k$.

Отже в інтервалі δ лежать певно такі точки x, що в них є:

$$f(x) \geq 1 - \frac{1}{k}.$$

Точка x_0 нехай має абсцису $\frac{m_0}{n_0}$ (m_0 і n_0 справджують подані вище умови).

Дістанемо тепер:

$$f(x) - f(x_0 \geq \frac{1}{n_0} - \frac{1}{k}.$$

Можемо дібрати k так велике, що буде:

$$\varepsilon = \frac{1}{n_0} - \frac{1}{k} > 0,$$

отже не для кожного $\varepsilon > 0$ буде $f(x) - f(x_0) < \varepsilon$ і функція $f(x)$ не є частинно-суцільна з гори в точці x_0.

Коли n_0 є непарне, то дістанемо:

$$f(x) - f(x_0) \geq 2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{k} > 0,$$

бо k може бути довільно велике, отже коли напишемо $\varepsilon = 2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{k}$, то також не буде

$$f(x) - f(x_0) < \varepsilon$$

і функція $f(x)$ не є частинно-суцільна з гори в вимірній точці $x = \frac{m_0}{n_0}$ з парним знамеником.

Коли x_0 є невимірне число, то дістанемо:

$$f(x) - f(x_0) \geq 1 - \frac{1}{k}$$

і умова частинної суцільности з гори і ту не справджується.

З другої сторони можна в кожнім інтервалі найти все такі точки $x = \frac{m}{n}$ з непарними знамениками $n > k$, а для таких точок є:

$$f(x) \leq \frac{1}{k} - 1.$$

Коли $x_0 \varepsilon \delta$ і $x_0 = \frac{m_0}{n_0}$ (n парне), то буде:

$$f(x_0) - f(x) \geq 1 - 1 - \frac{1}{n_0} - \frac{1}{k} + 1 = 2 - \frac{1}{n_0} - \frac{1}{k}.$$

Можемо дібрати k так велике, що $\varepsilon = 2 - \frac{1}{n_0} - \frac{1}{k} > 0$, отже $f(x)$ не є частинно-суцільна з долини в точці x_0.

Коли n_0 є непарне, то дістанемо:

$$f(x_0) - f(x) \geq -1 + \frac{1}{n_0} - \frac{1}{k} + 1 = \frac{1}{n_0} - \frac{1}{k}.$$

Для доволі великого числа k буде:

$$\varepsilon = \frac{1}{n_0} - \frac{1}{k} > 0.$$

Колиж x_0 є невимірне число, то буде:

$$f(x_0') - f(x) \geq 1 - \frac{1}{k} = \varepsilon > 0.$$

Бачимо отже, що $f(x)$ не є частинно-суцільна ані з гори ані з долини в точці x_0. А тому, що точка x_0 є якоюнебудь точкою простої, не є функція $f(x)$ частинно-суцільна (ані з гори, ані з долини) в жадній точці простої.

2. Нехай якась скінчена функція $\varphi(x)$ буде означена в розімкненім інтервалі (a, b). Зазначім літерою δ_p розімкнений інтервал $\alpha_p < x < \beta_p$, що лежить в інтервалі (a, b). Виберім скінчену кількість таких інтервалів δ_p, що не мають спільних точок.

Напишім: $\sigma = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots. \delta_n.$

Міра множини σ є очевидно сумою довжин інтервалів δ_1, $\delta_2 \ldots \delta_n$. Коли будемо інтервали δ_p добирати на ріжні способи, але так, щоби они не мали спільних точок, щоби їх кількість була скінченим числом, та щоби сума їх довжин не була більша від якогось сталого числа λ, то тоді число

$$\sum_{p=1}^{n} \left| \varphi(\beta_p) - \varphi(\alpha_p) \right|$$

може (залежно від рода функції $\varphi(x)$ і від якости вибраних інтервалів δ_p) приймати ріжні вартости.

Будемо називати λ-овою змінливістю функції $f(x)$ в інтервалі (a, b) число:

$$\tau(\lambda) = \sup \sum_{p=1}^{n} \left| \varphi(\beta_p) - \varphi(\alpha_p) \right|.$$

Тому, що $\tau(\lambda)$ як функція аргументу λ є монотонічна, існує все число $\tau(0) = \lim\limits_{\lambda \to 0} \tau(\lambda)$.

Число $\tau(0)$ будемо називати нулевою змінливістю функції $\varphi(x)$. Коли $\tau(0) = 0$, то функція $\varphi(x)$ називається абсолютно суцільна (totalstetig, absolument continue) в інтервалі (a, b). Очевидно кожна абсолютно суцільна функція є суцільна, але побачимо пізріше на прикладі, що не кожна суцільна функція є абсолютно суцільна.

Легко можна доказати, що функція $f(x)$, що ми її означили в попередньому уступі має в кожнім інтервалі (a, b) безконечно велику λ-ову змінливість. Коли н. пр. інтервал (a, b) поділимо на n рівних частин, то в кожній частині можна найти такі дві точки α_p і β_p, що буде:

$$1)\quad 0 < \beta_p - \alpha_p < \frac{\lambda}{n},$$

$$2)\quad f(\alpha_p) \leq -\frac{1}{2},$$

$$3)\quad f(\beta_p) \geq \frac{1}{2}.$$

Тоді дістанемо:

$$\sum_{p=1}^{n} (\beta_p - \alpha_p) \leq \lambda,$$

$$\sum_{r=1}^{n} \left| f(\beta_p) - f(\alpha_p) \right| \geq n,$$

отже коли $n \to \infty$, то $\tau(\lambda) = \infty$.

Функція $f(x)$ не є частинно суцільна в жадній точці. Функція Dirichlet'а не є суцільна в жадній точці, але є частинно-суцільна з гори в кожній точці з вимірною абсцисою і частинно-суцільна з долини в кожній точці з невимірною абсцисою. Але легко можна доказати, що функція Dirichlet'а має також у кожнім інтервалі безконечно велику λ-ову змінливість, бо в кожнім інтервалі є такі точки, що в них $f(x) = +1$ і такі, що них $f(x) = 0$.

3. Подамо тепер приклад такої суцільної функції, що її λ-ова змінливість є безконечно велика.

В розімкненім інтервалі (a, b) зазначім точки:

$$x_n = a + \frac{b-a}{2^n},\ n = 1, 2, 3, ..$$

Означім тепер функцію $\varphi(x; a, b)$ при помочі наступних умов:

1) $\varphi(x; a, b) = 0$ для $x \leqq a$ і $x \geqq b$,

2) $\varphi(x_1) = \frac{b-a}{2},\ \varphi(x_2) = 0,\ \varphi(x_3) = \frac{b-a}{3},\ \varphi(x_4) = 0, ...$

$$\text{загально: } \varphi(x_{2i-1}) = \frac{b-a}{i+1},$$

$$\varphi(x_{2i}) = 0;$$

3) в кожнім інтервалі $x_1 \leqq x \leqq b,\ x_2 \leqq x \leqq x_1,\ x_3 \leqq x \leqq x_2, ...$ є функція $\varphi(x)$ лінійна.

Так означена функція $\varphi(x)$ є очевидно суцільна, але її повна змінливість (totale Variation) в інтервалі $a \leqq x \leqq b$ є безконечно велика, бо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) = \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{3} + \frac{b-a}{4} + ... = (b-a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

В точці $x = a$ є права горішна похідна функції $\varphi(x)$ безконечно велика, бо:

$$\varphi^+(a) = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{b-a}{n}}{\frac{b-a}{2^n}} = \lim_{n \to} \frac{2^n}{n} = +\infty,$$

а всі інші екстремальні похідні тої функції є в точці $x = a$ рівні нулеві.

Означім тепер поступ суцільних функцій $\{f_n(x)\}$ при помочі наступних умов:

Напишім $f_1(x) = \varphi(x; 0, 1)$.

Образ функції $f_1(x)$ складається зі счисленої кількости відтинків.

Найбільший зоміж інтервалів, що лежать в інтервалі $(0, 1)$ і що в них функція $f_1(x)$ є лінійна, має кінці $\frac{1}{2}$ і 1.

Напишім: $f_2(x) = f_1(x) + \varphi(x; \frac{1}{2}, 1)$.

Є два найбільші інтервали:

$$\tfrac{1}{4} < x < \tfrac{1}{2} \text{ і } \tfrac{3}{4} < x < 1,$$

в котрих функція $f_2(x)$ є лінійна.

Напишім тепер:

$$f_3(x) = f_2(x) + \varphi(x; \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}) + \varphi(x; \tfrac{3}{4}, 1).$$

Функція $f_3(x)$ має чотири такі найбільші інтервали, в котрих вона є лінійна:

$$(\tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{4}), (\tfrac{3}{8}, \tfrac{1}{2}), (\tfrac{5}{8}, \tfrac{3}{4}) (\tfrac{7}{8}, 1).$$

Означім тепер:

$$f_4(x) = f_3(x) + \varphi(x; \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{4}) + \varphi(x; \tfrac{3}{8}, \tfrac{1}{2}) + \varphi(x; \tfrac{5}{8}, \tfrac{3}{4}) + \varphi(x; \tfrac{7}{8}, 1)$$

Продовжуючи ті означення дістанемо монотонічно розтучий поступ суцільних функцій.

Маємо очевидно:

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) < \frac{1}{2^n}$$

отже наш поступ є рівномірно збіжний і його границя:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

є функція суцільна.

Ми бачили, що функція $\varphi(x; a, b)$ має безконечно велику повну змінливість в інтервалі (a, b). Отже функція $f_1(x)$ має безконечну повну змінливість в інтервалі $(0, 1)$. Функція $f_2(x)$ має безконечну повну змінливість в інтервалах $(0, \frac{1}{2})$ і $(\frac{1}{2}\, 1)$, функція $f_3(x)$ в інтервалах $(0, \frac{1}{4})$, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ і $(\frac{3}{4}, 1)$, функція $f_4(x)$ в інтервалах: $(0, \frac{1}{8})$, $(\frac{1}{8}, \frac{1}{4})$, $(\frac{1}{4}, \frac{3}{8})$, $(\frac{3}{8}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{5}{8})$ $(\frac{5}{8}, \frac{3}{4})$, $(\frac{3}{4}, \frac{7}{8})$ і $(\frac{7}{8}, 1)$.

Загально має функція $f_n(x)$ безконечно велику повну змінливість в α^{n-1} рівних інтервалах:

$$\frac{m}{2^{n-1}} < x < \frac{m+1}{2^{n-1}},\ m = 0, 1, 2, \ldots \left(2^{n-1} - 1\right)$$

В кожнім інтервалі (α, β), що лежить в інтервалі $(0, 1)$ можна очевидно (через відповідний добір числа n) найти такий інтервал

$$\frac{m}{2^{n-1}} < x < \frac{m+1}{2^{n-1}},$$

що в нім функція $f_n(x)$ має безконечно велику повну змінливість, отже в кожнім інтервалі (α, β) зачинаючи від якогось $n < N$ всі функції $f_n(x)$ будуть мати безконечно велику повну змінливість.

З того виходить, що функція $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ не є обмежено змінлива в жаднім інтервалі, що міститься в інтервалі (o, 1).

Відома в теорії функцій теорема каже, що скінчена функція означена в замкненім інтервалі $a \leqq x \leqq b$ є обмежено змінлива тоді і тільки тоді, коли λ-ова змінливість тої функції є скінчена в розімкненім інтервалі $a < x < b$.

Отже λ-ова змінливість нашої суцільної функції $f(x)$ є безконечно велика.

4. Розглянемо тепер приклад функції, що є суцільна, але не є абсолютно суцільна.

Нехай на відтинку $< o, 1 >$ на оси абсцис буде зазначена завершена негуста множина Cantor'a A, що її міра є нулем $L(A) = o$, а розімкнені інтервали, що творять доповнення тої множини до відтинка $< 0, 1 >$ нехай будуть:

$$\delta_1 = (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}),\ \delta_2 = (\tfrac{1}{9}, \tfrac{2}{9}),\ \delta_3 = (\tfrac{7}{9}, \tfrac{8}{9}),\ \delta_4 = (\tfrac{1}{27}, \tfrac{2}{27}), \ldots\ldots$$

Кінці інтервалу δ_n зазначім літерами α_n і β_n.

На відтинку $< o, 1 >$ на оси ординат збудуймо таку негусту завершену множину, щоби її міра була $= \frac{1}{2}$. Зазначім на відтинка $< o, 1 >$ розімкнений концентричний з ним інтервал $\triangle_1$ довгий на $\frac{1}{4}$. Ріжниця $< o, 1 > - \triangle_1$ складається з двох замкнених інтервалів, на кожнім з них зазначім концентричний розімкнений інтервал $\triangle_2$ і $\triangle_3$ довгий на $\frac{1}{4^2}$ і т. д. Сума довжин всіх тих розімкнених інтервалів буде:

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{2^2}{4^3} + \frac{2^3}{4^4} + \ldots = \frac{1}{2}.$$

Отже ріжниця $< o, 1 > - \sum_{n=1}^{\infty} \triangle_n = B$ буде мати міру (Lebesgue'a):

$$L(B) = \tfrac{1}{2}.$$

Кінці інтервалу Δ_n нехай будуть a_n і b_n.

Означім тепер на відтинку $o \leqq x \leqq 1$ функцію $f(x)$ при помочі наступних умов:

1) Коли $x \varepsilon \delta_n$, то:

$$f(x) = \frac{b_n - a_n}{\beta_n - \alpha_n} x + \frac{a_n \beta_n - \alpha_n b_n}{\beta_n - \alpha_n}.$$

Очевидно кінцям інтервалу δ_n будуть відповідати взаїмно однозначно кінці інгервалу Δ_n, коли умовимося, що:

2) для $x = \alpha_n$ і $x = \beta_n$, має бути також:

$$f(x) = \frac{b_n - a_n}{\beta_n - \alpha_n} x + \frac{a_n \beta_n - \alpha_n b_n}{\beta_n - \alpha_n}.$$

3) Коли $x \varepsilon A$, але не є кінцем жадного інтервалу δ_n (отже коли x є точкою скупчення кінців інтервалів δ_n) означуємо функцію $f(x)$ так, щоби $f(x)$ була суцільна в цілім відтинку $< 0, 1 >$.

Так означена функція сповняє очевидно умову:

$$\text{коли: } x_1 < x_2, \text{ то } f(x_1) < f(x_2).$$

Отже функція $f(x)$ дає взаємно однозначне і суцільне припорядкування межи точками інтервалу: $0 \leqq x \leqq 1$ і точками інтервалу: $0 \leqq f(x) \leqq 1$.

Але хоч та функція є суцільна і все ростуча, то вона не є абсолютно суцільна. Множина A має міру рівну пулеві, отже її можна накрити таким поступом інтервалів γ_n, що їх сума довжин λ може бути довільно мала. Образи інтервалів γ_n обіймають цілу множину B, що має міру $L(B) = \frac{1}{2}$, отже сума довжин образів інтервалів γ_n не може бути довільно мала і маємо:

$$\lim_{\lambda \to 0} \iota(\lambda) \neq 0,$$

а це значить, що функція $f(x)$ не є абсолютно суцільна.

Повна змінливість функції $f(x)$ рівнається очевидно одиниці, бо вона є монотонічна і приймає всі вартости від 0 до 1.

Наша функція має ще одну цікаву властивість. Вона припорядковує множині A, що її міра $L(A) = 0$, таку множину B, що її міра $L(A) = \frac{1}{2}$.

Можна тепер найти таку немірну множину C, що є частиною множини B. Функція $f(x)$ припорядковує множині C якусь частину c' множини A і мусить очевидно бути $L(c') = 0$, отже множина c' є мірна.

Бачимо отже, що суцільна і монотонічна функція $f(x)$ може припорядковувати мірній множині іншу множину, що не є мірна (в розумінні Lebesgue'a).

В наступнім розділі пізнаємо ще докладніше інші суцільні функції, що дають таке немірне припорядкування.