Др Володимир Левицький

Ріжничкове рівнання модулової еліптичної функції $J(\tau)$.

1. Як відомо, еліптична модулова функція $J(\tau)$ дається представити або у формі[1]:

$$J(\tau) = \frac{\left\{\frac{1}{12} + 20 \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 \frac{h^{2n}}{1-h^{2n}}\right\}^3}{h^2 \prod\limits_{n=1}^{\infty} (1-h^{2n})^{24}} \qquad 1)$$

де: $h = e^{\pi i \tau}$, $\tau = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ ($2\omega_1$ та $2\omega_2$ первісні періоди еліптичних функцій), або коли візьмем означення з теорії еліптичних функцій:

$$\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \varkappa^2 = \lambda \text{ (модул)}$$

у виді:

$$J(\tau) = \frac{4}{27} \frac{(1 - \lambda + \lambda^2)^3}{\lambda^2 (1 - \lambda)^2} \qquad 2)$$

при чому:

$$\lambda(\tau) = 16\, h \left[\frac{\Pi (1 + h^{2n})}{\Pi (1 - h^{2n})}\right]^8 \qquad 3)$$

З теорії еліптичних модулових та автоморфних функцій відомо, що $J(\tau)$ є автоморфною функцією[2]) з групою

$$\left(\tau, \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) \text{ де } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1.$$

Далі звісна є річ, що кожна автоморфна функція має те свійство, що її шварціян поділений квадратом похідної дає на

---

[1]) Пор. пр. В. Левицький: Еліптичні функції модулові (Записки Наук. Тов. ім. Шевченка т. VII), де подано літературу того предмету.

[2]) Ibid.

вислід також автоморфну функцію[1]); а що кожна автоморфна функція є альґебраїчною функцією якоїнебудь другої автоморфної функції тої самої групи, тож для кожної автоморфної функції F(z) мусить істнувати альґебраїчна реляція:

$$G\left(F(z), \frac{\{F(z), z\}}{F'(z)^2}\right) = 0 \tag{4}$$

де $\{F(z), z\}$ є символ Cayley'а на означення шварціяна

$$\frac{F'''(z)}{F'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{F''(z)}{F'(z)}\right)^2$$

2. В нинішній ноті пошукаємо ріжничкового рівнання 3. порядку форми 4), яке на основі теорії мусить сповняти функція $J(\tau)$.

В тій цили в формі 2) функції $J(\tau)$ вставимо:

$$\lambda^2 - \lambda = u(\tau) \tag{5}$$

а в виду сего дістанемо

$$\frac{27}{4} J(\tau) = \frac{(1 + u)^3}{u^2} \tag{6}$$

Звідси постепенне ріжничковання дасть нам:

$$\frac{27}{4} J' = \frac{u' (1 + u)^2 (u - 2)}{u^3} \tag{7}$$

$$\frac{27}{4} J'' = \frac{u'' (1 + u)^2 (u - 2)}{u^3} + \frac{6 u'^2 (1 + u)}{u^4} \tag{8}$$

$$\frac{27}{4} J''' = \frac{u''' (1 + u)^2 (u - 2)}{u^3} + \frac{18 u' u'' (1 + u)}{u^4} - \frac{6 (3u + 4) u'^3}{u^5} \tag{9}$$

З рівнань 8) та 7) дістанемо:

$$\frac{J''}{J'} = \frac{u''}{u'} + \frac{6u'}{u (1 + u) (u-2)},$$

а з 9) та 7):

$$\frac{J'''}{J'} = \frac{u'''}{u'} + \frac{18u''}{u (1 + u) (u-2)} - \frac{6 (3u + 4) u'^2}{u^2 (1+u)^2 (u-2)}.$$

В виду сего дістанемо на: $\frac{J'''}{J'} - \frac{3}{2}\left(\frac{J''}{J'}\right)^2$:

$$\{J(\tau), \tau\} = \{u, \tau\} - \frac{6 u'^2}{u^2 (1 + u)^2 (u - 2)^2} [(u + 1)^2 + 2 u^2]. \tag{10}$$

---

[1]) Пор. В. Левицький: Короткий начерк теорії автоморфних функцій. (Збірник мат.-прир. секції Наук. Тов. ім. Шевченка VII. 2).

Утворім тепер вираження $\frac{\{J(\tau), \tau\}}{J'(\tau)^2}$, то дістанемо:

$$\frac{\{J(\tau), \tau\}}{J'(\tau)^2} = \frac{\{u, \tau\}}{J'(\tau)^2} - \frac{6u'^2[(u+1)^2+2u^2]}{u^2(1+u)^2(u-2)^2 J'^2}$$

А що:

$$\frac{J'(\tau)}{J(\tau)} = \frac{u'(u-2)}{u(1+u)} \qquad 11),$$

т. є.

$u(1+u) = \frac{J}{J'} u'(u-2)$,

то послідне рівнання дасть:

$$\frac{\{J(\tau), \tau\}}{J'(\tau)^2} = \frac{\{u, \tau\}}{J'^2} - \frac{6[(u+1)^2+2u^2]}{J^2(u-2)^2} \qquad 12).$$

Вставмо тепер по правій стороні:

$$J'^2 = \frac{u'^2(u-2)^2 J^2}{u^2(1+u)^2}$$

то дістанемо:

$$\frac{\{J(\tau), \tau\}}{J'(\tau)^2} = \frac{\{u, \tau\} u^2(1+u)^2}{u'^2(u-2)^2 J^2} - \frac{6[(u+1)^2+2u^2]}{(u-2)^4 J^2}$$

або

$$\frac{\{J(\tau), \tau\}}{J'(\tau)^2} = \frac{1}{(u-2)^2 J^2}\left[\frac{\{u, \tau\} u^2(1+u)^2}{u'^2} - \frac{6[(u+1)^2+2u^2]}{(u-2)^2}\right] \qquad 13)$$

Коли отже вставимо в рівнання 10) за J z, дістанемо рівнання ріжчничкове 3. порядку: 14)

$$\left[\frac{z'''}{z'} - \frac{3}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2\right] - \left[\frac{u'''}{u'} - \frac{3}{2}\left(\frac{u''}{u'}\right)^2\right] = -\frac{6u'^2[(u+1)^2+2u^2]}{u^2(1+u)^2(u-2)^2}$$

якого одним інтеґралом є функція:

$$z = \frac{(1+u)^3}{u^2}$$

яке отже сповняє модулова функція $J[\lambda(\tau)]$. Рівнання 12) написане при помочі z у формі:

$$(u-2)^4\{z, \tau\}\frac{z^2}{z'^2} = (u-2)^2(u+1)^2\{u, \tau\}\frac{u^2}{u'^2} - 6[(u+1)^2+2u^2] \qquad 15)$$

дає шукану альґебраїчну реляцію:

$$G\left(z, \frac{\{z, \tau\}}{z'^2}\right) = 0,$$

де z є модуловою еліптичною функцією J.

В жовтні 1929.