М. Кравчук.
(Київ.)

Уваги до Laguerre'ового способу наближеного розвязання рівнань.

1.

Візьмімо мероморфну функцію

$$\varphi(z) = P_0(z) + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{A_i}{z-\alpha_i} + P_i(z) \right), \tag{1}$$

де $P_0(z)$ та $P_i(z)$ є многочлени ступеня не вищого за $p-1$ для $p \geqq 1$ та нулі для $p = 0$.

Впровадьмо зазначення:

$$S_k(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{(z-\alpha_i)^k} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\varphi^{(k-1)}(z) \qquad (k=p+1,\ p+2, \ldots) \tag{2}$$

Отже нпр. у випадку, коли

$$\varphi(z) = \frac{H(z)}{G(z)},$$

де

$$\begin{aligned} G(z) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \\ H(z) &= b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \end{aligned}$$

є цілі функції, суми (2) є вимірні функції від сучинників a_i, b_j

Нпр.

$$S_k(z) = -\frac{1}{(k-1)!\ G_k} \cdot \begin{vmatrix} H, & 0, & 0, & 0, & G \\ H', & 0, & 0, & G, & \binom{1}{1}G' \\ H'', & 0, & 0, & \binom{2}{1}G', & \binom{2}{2}G'' \\ & \cdot & & & \cdot \\ H^{(k-1)}, & \binom{k-1}{1}G', & \binom{k-1}{2}G'', \ldots, & \binom{k-1}{k-2}G^{(k-2)}, & \binom{k-1}{k-1}G^{(k-1)} \end{vmatrix}$$

$$(k=p+1,\ p+2,\ \ldots),$$

а коли

$$H(z) = G'(z),$$

то

$$S_k(z) = \frac{(-1)_k}{(k-1)!\ G^k} \cdot \begin{vmatrix} 0, & 0, & 0, & G, & G' \\ 0, & 0, & G, & \binom{1}{1}G', & G'' \\ 0, & 0, & \binom{2}{1}G', & \binom{2}{2}G'', & G''' \\ . & . & & . & . \\ \binom{k-1}{1}G', & \binom{k-1}{2}G'', & \ldots, \binom{k-1}{k-2}G^{(k-2)}, & \binom{k-1}{k-1}G^{(k-1)}, & G^{(k)} \end{vmatrix}$$

Нехай ще

$$\varphi(z) = \frac{d}{dz} \log f(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z-\alpha_i},$$

де $f(z)$ є многочлен n-го ступеня; тоді всі суми

$$S_0(z),\ S_1(z),\ S_2(z),$$

є вимірні функції й від z; з осібна

$$S_0(z) = n$$

$$S_1(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

$$S_2(z) = \frac{f(z)\,f''(z) - [f'(z)]^2}{[f(z)]^2}$$

Завважмо ще, що вирази

$$M(z) = \frac{S_1(z)}{S_0(z)} = \frac{1}{n}\,\frac{f'(z)}{f(z)} \tag{3}$$

та

$$\left[M_k(z)\right]^k = \frac{(n-1)^{k-1}}{(n-1)^{k-1}+1} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{z-\alpha_i} - M(z)\right]^k \quad (k=0,1,2,\ldots) \tag{4}$$

є цілі функції від сум $S_i(z)$.

2.

Коли дійсні числа a_i справджують умову

$$a_1 + a_2 + \quad + a_n = 0,$$

то, на підставі Hölder'овоі нерівности, маємо:

$$|a_1|^k \leqq (n-1)^{k-1}(|a_2|^k + |a_3|^k + \quad + |a_n|^k) \qquad (k \geqq 1),$$

звідки

$$|a_1|^k \leqq \frac{(n-1)^{k-1}}{(n-1)^{k-1}+1} \left[|a_1|^k + |a_2|^k + \quad + |a_n|^k\right]$$

Отже коли x є дійсне число, а корені многочлена $f(z)$ всі дійсні, то

(5) $$\frac{1}{x-\alpha} - M(x) \leq |M_{2l}(x)|,$$

де α є довільний із тих нулів. При тім завжди можна вважати, що

(6) $$M(x) \geqq 0$$

(бо в противнім разі можна $f(z)$ заступити многочленом $(-1)^n f(-z)$). А тоді серед чисел α_i є не більші від x. Нехай найбільше з них є α; воно справджує нерівність:

(7) $$0 \leqq \frac{1}{x-\alpha} - M(x) \leqq |M_{2l}(x)|,$$

а тому число x_1 у рівності

(8) $$\frac{1}{x-x_1} - M(x) = |M_{2l}(x)|$$

справджує умови:

(9) $$\begin{aligned} &\alpha \leqq x_2 \leqq x \\ &M(x_2) \geqq M(x) \end{aligned}$$

Так само число x_2 з рівности

(10) $$\frac{1}{x_1-x_2} - M(x_1) = |M_{2l_1}(x)|$$

справджує умови:

(11) $$\begin{aligned} &\alpha \leqq x_2 \leqq x_1 \\ &M(x_2) \geqq M(x_1) \end{aligned}$$

І т. д. Нарешті для числа x_2 з рівности

(12) $$\frac{1}{x_{r-1}-x_r} M(x_{r-1}) = |M_{2l_{r-1}}(x_{r-1})|$$

маємо:

(13) $$\begin{aligned} &\alpha \leqq x_r \leqq x_{r-1} \\ &M(x_r) \geqq M(x_{r-1}) \end{aligned}$$

З огляду на нерівності

$$x \geqq x_1 \geqq x_2 \geqq \quad \geqq \alpha$$

існує число

$$\beta = \lim_{i=\infty} x_i \geqq \alpha,$$

а граничний перехід у рівності (12) дає:

$$M(\beta) + |M_{\underset{\infty}{2l}}(\beta)| = \infty$$

звідки

$$\beta = \alpha.$$

Отож числа $x_1, x_2, \ldots, x_r$ можна розглядати як ступневі наближення кореня α нашого многочлена, причім для досить великого r ріжниця $x_r - \alpha$ є така мала, як хочемо.

Застосовуючи цей спосіб наближеного обчислення коренів многочлена, нема потреби вперед їх відділяти ані дбати за сталість знаків функції $f(x)$ та її похідних на певнім інтервалі, як це доводиться робити нпр. у Newton'овім способі.

3.

Щоби зважити, як швидко збігається поданий процес, візьмімо під увагу, що, з огляду на (7),

$$\frac{1}{x-\alpha} - M(x) = k_0|M_{21}(x)|, \tag{14}$$

де

$$0 \leqq k_0 \leqq 1.$$

Віднявши рівність (14) від (8), дістанемо:

$$0 \leqq \frac{x_1-\alpha}{(x-\alpha)(x-x_1)} = (1-k_0)|M_{21}(x)|$$

або:

$$0 \leqq \frac{x_1-\alpha}{x-\alpha} = \frac{(1-k_0)|M_{21}(x)|}{M(x)+|M_{21}(x)|} \tag{15}$$

Так само

$$0 \leqq \frac{x_2-\alpha}{x_1-\alpha} = \frac{(1-k_1)|M_{21_1}(x_1)|}{M(x_1)+|M_{21_1}(x_1)|}, \tag{16}$$

де

$$k_0 \leqq k_1 \leqq 1$$

І т. д. Нарешті

$$0 \leqq \frac{x_r-\alpha}{x_{r-1}-\alpha} = \frac{(1-k_{r-1})|M_{21_{r-1}}(x_{r-1})|}{M(x_{r-1})+|M_{21_{r-1}}(x_{r-1})|} \tag{17}$$

Із рівностей (15), (16), ..., (17) дістаємо остаточно:

$$(18)\qquad 0 \leqq x_2 - a \leqq (x-a) \prod_{i=0}^{r-1} \frac{1-k_i}{\left|+\left|\frac{M(x_i)}{M_{2l_i}(x_i)}\right|\right|}$$

де

$$\lim_{i=\infty} k_i = 1, \quad \lim_{i=\infty} \left|\frac{M(x_i)}{M_{2li}(x_i)}\right| = \frac{n}{n-1}$$

Що до чисел k_i, то їх легко визначити наближено з недостачею з рівностей

$$\frac{1}{x_i - a_i} - M(x_i) = k_i \, |M_{2li}(x_i)|$$

добираючи числа a_i менші від x_i так, щоби справджувалися нерівності

$$M(a_i) < 0$$

Легко переконатися з рівности (14) та їй подібних, що коли $l-l_1=l_2=\ldots$, то

$$1 - k_i < (x_i - a) \, P_{2l},$$

де P_{2l} є певне додатне число незалежне від i; а тоді з (15), (16),...,(17) дістаємо:

$$x_i - a < (x_{i-1} - a)^2 \, P_{2l} \qquad (i=1, 2, \ldots, r)$$

звідки

$$(19)\qquad x_r - a < P_{2l}^{2^r-1} (x-a)^{2^r}$$

Остання нерівність показує, що процес збігається дуже швидко, як що тільки число $x-a$ є досить мале.

Практично, провадячи обчислення з k цифрами, замісць того, щоб звертатися до нерівности (18) або (19), доведеться просто спинитися на тому наближенні x_i, що в k перших цифрах не відріжняється від x_{r+1}.

4.

Цей самий спосіб, з неістотними відмінами, можна застосувати й до обчислення нулів переступних функцій. Обмежмося випадком цілої функції $G(z)$ скінченого роду $\leqq p-1$, що має самі дійсні нулі. Тоді можна взяти

$$\varphi(z) = \frac{G'(z)}{G(z)},$$

і функції

$$\left| \sqrt[2l]{S_{2l}(x)} \right| \qquad (2l \geqq p)$$

можуть грати ту саму ролю, що в попередніх двох параграфах функції $|M_{2l}(x)|$.

За умови

$$\frac{G'(x)}{G(x)} \geqq o$$

ступневі наближення $x_1, x_2, \ldots.$ числа α, найбільшого з нулів не менших від x, визначаться з рівнань:

$$\text{(20)} \qquad \frac{1}{(x_{i-1} - x_i)^{2l}} = S_{2l_{i-1}}(x_{i-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots);$$

при тім

$$x \geqq x_1 \geqq x_2 \geqq$$

отже існує

$$\lim_{i=\infty} x_i = \beta \geqq \alpha$$

А що, як бачимо з (20),

$$\lim_{i=\infty} S_{2l_i}(x_i) = \infty$$

то

$$\beta = \alpha$$

Крім того маємо

$$\text{(21)} \qquad \frac{1}{(x_i - \alpha)^{2l}} = k^{2l} S_{2l_{i-1}}(x_{i-1})$$

де

$$o \leqq x_r - \alpha \leqq (x - \alpha) \prod_{i=1}^{r-1} (1 - k_i)$$

При тім, коли число α_i є менше від x_i та справджує вимогу:

$$\frac{G'(\alpha_i)}{G(\alpha_i)} < 0,$$

то

$$k_i > \frac{1}{x_i - \alpha_i} \qquad \frac{1}{\left| \sqrt[2l]{S_{2l_i}(x)} \right|}$$

Збіжність способів, що їх дають формули (17) та (20), поліпшується, коли збільшувати число l. Для досить великого l ступневі наближення стають непотрібні, і все в істоті сходить на т. зв. спосіб Graeffe наближеного розвязання рівнань; при тім вимога, щоб многочлен $f(z)$ не мав недійсних нулів, стає непотрібна.

15. грудня 1928.