БУДОВА ГРУПИ УНІТРИКУТНИХ АВТОМОРФІЗМІВ КІЛЬЦЯ МНОГОЧЛЕНІВ ВІД ДВОХ ЗМІННИХ НАД ПОЛЕМ НУЛЬОВОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ

©*2009 р.* *Ж. І. ДОВГЕЙ*[1], *В. І. СУЩАНСЬКИЙ*[2]

[1] Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича,
вул. Коцюбинського, 2, Чернівці, 58012
[2] Сілезький технічний університет,
м.Глівіце, Польща

Редакція отримала статтю 16 вересня 2009 р.

Описано основні властивості групи унітрикутних автоморфізмів алгебри многочленів $K[x, y]$ над полем характеристики 0. Охарактеризовано верхній і нижній центральні ряди і класи спряженості цієї групи. Описано гратку її вербальних підгруп.

1 Вступ

Група автоморфізмів кільця многочленів від двох змінних над фіксованим полем K, яка ще відома як група автоморфізмів афінної площини K^2 або двовимірна афінна група Кремони, є одним з основних об'єктів сучасної алгебраїчної геометрії [1, 2]. Вона має також важливі застосування в теорії динамічних систем [3-6], комутативній алгебрі [2], теорії асоціативних алгебр [7, 8] тощо. Проте з теоретико-групової точки зору ця група вивчена ще зовсім мало. Це стосується також її основних підгруп: підгрупи трикутних перетворень (інакше – афінної групи Жонк'єра або елементарної групи) та підгрупи унітрикутних перетворень. Остання, з теоретико-групової точки зору влаштоване нібито зовсім просто: вона є розширенням адитивної групи зліченновимірного векторного простору

УДК 512.54 , MSC 2000: 20E15,20E36 ,20E25

над полем K за допомогою адитивної групи поля K. Але тип розширення такий, що ця група має цілий ряд цікавих властивостей. Метою даної публікації є опис основних властивостей унітрикутної групи автоморфізмів кільця $K[x, y]$ над полем характеристики нуль. Ми характеризуємо верхній і нижній центральні ряди цієї групи, її класи спряженості, встановлюємо, що в ній виконується нормалізаторна умова і вона є повною та описуємо ґратку її вербальних підгруп. Всі позначення в роботі загальноприйняті; означення використаних тут понять можна знайти в [9, 10].

2 Необхідні допоміжні відомості

Нехай K – фіксоване поле характеристики нуль, $G = AutK[x, y]$ – група автоморфізмів кільця многочленів $K[x, y]$ від двох змінних x, y над полем K. Довільний автоморфізм $K[x, y]$ однозначно визначається образами елементів $x, y \in K[x, y]$:

$$x \mapsto a(x, y), y \mapsto b(x, y), \tag{1}$$

причому ці образи повинні бути такими, щоб відображення кільця $K[x, y]$ в себе, яке задається відповідністю

$$f(x, y) \mapsto f(a(x, y), b(x, y)), \quad f(x, y) \in K[x, y], \tag{2}$$

було бієктивним, а обернене до нього також задавалося парою многочленів, тобто відповідністю вигляду (1).

Автоморфізм кільця $K[x, y]$ називається трикутним, якщо він задається парою многочленів (a, b), перша компонента якої не залежить від змінної y. Для трикутних автоморфізмів функція $x \to a(x)$ має бути оборотною, тобто $a(x)$ мусить бути многочленом першого степеня. Звідси легко вивести, що пара (a, b) задає трикутний автоморфізм згідно з (1),(2) лише тоді, коли многочлен $b(x, y)$ має вигляд $\alpha y + f(x)$, де $\alpha \neq 0, f(x) \in K[x]$. Таким чином, кожен трикутний автоморфізм $K[x, y]$ задається парою многочленів

$$(\alpha_1 x + \beta_1, \alpha_2 y + b(x)), \tag{3}$$

де $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2 \in K, \alpha_1 \cdot \alpha_2 \neq 0, b(x) \in K[x]$. Трикутні автоморфізми називають ще елементарними [2, стор. 68]. Множина всіх трикутних автоморфізмів групи G є підгрупою в групі $AutK[x, y]$, яка називається (афінною) групою Жонк'єра і позначається $J_2(K)$.

Означення 1. Трикутний автоморфізм виду (3) назвемо *унітрикутним*, якщо $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1$.

Всі унітрикутні автоморфізми кільця $K[x,y]$ утворюють підгрупу в групі $J_2(K)$, яку позначатимемо символом $UJ_2(K)$. Елементи групи $UJ_2(K)$ будемо скорочено позначати як пари вигляду

$$[\beta, f(x)], \beta \in K, f(x) \in K[x]. \tag{4}$$

При такій формі запису групова операція в $UJ_2(K)$ визначається рівністю

$$[\beta, f(x)][\gamma, g(x)] = [\beta + \gamma, f(x) + g(x + \beta)], \tag{5}$$

нейтральному елементу e групи $UJ_2(K)$ відповідає пара $[0,0]$, а оберненою до пари (4) буде пара

$$[-\beta, -f(x - \beta)]. \tag{5'}$$

Зрозуміло, що групу $UJ_2(K)$ можна вводити як незалежну конструкцію (4) з груповою дією (5).

Лема 1. *Множина H автоморфізмів вигляду $[0, f(x)], f(x) \in K[x]$, є нормальним дільником в $UJ_2(K)$.*

Доведення. Очевидно, H є підгрупою $UJ_2(K)$. Оскільки кожен правий клас суміжності за підгрупою H при деякому $\beta \in K$ має вигляд $\{[\beta, f(x)] \mid f(x) \in K[x]\}$ і є одночасно лівим класом суміжності, то $H \triangleleft G$.

Множина $\hat{K}$ пар вигляду $[\beta, 0], \beta \in K$, також утворює підгрупу в $UJ_2(K)$, але ця підгрупа не є нормальною. Оскільки $\widehat{K} \cap H = \{e\}$, то звідси дістаємо

Лема 2. *Група $UJ_2(K)$ розкладається в напівпрямий добуток своїх підгруп $\widehat{K}$ і H:*

$$UJ_2(K) = \widehat{K} \leftthreetimes H. \tag{6}$$

Оскільки $\widehat{K}$ і H – абелеві, то з (6) випливає, що $UJ_2(K)$ – метабелева група.

3 Нижній і верхній центральні ряди групи $UJ_2(K)$

Почнемо з встановлення двох допоміжних тверджень.

Лема 3. *Для довільного многочлена* $f(x) \in K[x]$ *і довільного ненульового елемента* $a \in K$ *існує многочлен* $u(x) \in K[x]$, *такий, що справджується рівність*

$$u(x+a) - u(x) = f(x). \tag{7}$$

Доведення. Припустимо, що $f(x)$ – многочлен степеня n. Многочлен степеня n над K однозначно визначається своїми значеннями в $n+1$ точці. Покладемо $u(0) = c$, де c – фіксований елемент поля K, і розглянемо систему рівностей

$$\begin{gathered} u(a) - u(0) = f(0), \\ u(2a) - u(a) = f(a), \\ \text{- - - - - - - - - - - - - - -} \\ u((n+1)a) - u(na) = f(na). \end{gathered}$$

З цих рівностей значення многочлена $u(x)$ в точках $a, 2a, 3a, ...(n+1)a$ визначаються через значення многочлена $f(x)$ в точках $0, a, ..., na$. Тим самим маємо набір значень в $(n+2)$-х точках $0, a, 2a, ..., (n+1)a$. Існує лише один многочлен степеня $n+1$, який набуває таких значень в цих точках. Нехай $u(x)$ дорівнює цьому многочлену. Тоді для довільного $x \in K$ має місце рівність (7).

Зауваження. З доведення леми випливає, що для многочлена $f(x)$ степеня n існує многочлен $u(x)$ степеня $n+1$ такий, що справджується рівність (7). Оскільки має місце строга нерівність

$$ст.(u(x+a) - u(x)) < ст.(u(x)) \tag{8}$$

(де символом $ст.u(x)$ позначено степінь многочлена $u(x)$), то $n+1$ – найменше можливе значення степеня $u(x)$, для якого рівність (7) можлива.

Лема 4. *Нехай* $f(x)$ *є многочленом степеня* k. *Тоді існує безліч елементів* a *поля* K, *таких, що має місце рівність*

$$ст.(f(x+a) - f(x)) = k - 1. \tag{9}$$

Доведення. Нехай $f(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + ... + a_k, a_i \in K$ $(0 \leqslant i \leqslant k)$. Тоді $f(x+a) = a_0(x+a)^k + a_1(x+a)^{k-1} + ... + a_k = \sum\limits_{l=0}^{k} a_0C_k^l a^l x^{k-l} +$

$\sum\limits_{l=0}^{k-1} a_1 C_{k-1}^{l} a^l x^{k-l-1} ... + a_k$. Різниця $f(x+a) - f(x)$ є многочленом степеня $\leq k-1$, причому це залежить від коефіцієнта при x^{k-1}, який дорівнює $a_0 ak = (a_0 a)k$. Оскільки K – це поле характеристики нуль, то при довільних ненульових a, a_0 цей коефіцієнт відмінний від нуля і степінь многочлена $f(x+a) - f(x)$ дорівнює $k-1$. Отже, лема доведена.

Лема 5. *Для довільних перетворень $u = [\alpha, f(x)]$ і $v = [\beta, g(x)]$ із групи $UJ_2(K)$ мають місце рівності*

$$a) \quad u^{-1}vu = [\beta, -f(x-\alpha) + g(x-\alpha) + f(x-\alpha+\beta)]; \tag{10}$$

$$b)(u,v) = u^{-1}v^{-1}uv =$$

$$= [0, -f(x-\alpha) - g(x-\alpha-\beta) + f(x-\alpha-\beta) + g(x-\beta)]. \tag{11}$$

Доведення здійснюється безпосередньою перевіркою.

Нагадаємо, що ширина комутанта G' групи G визначається як найменше натуральне число k, таке, що довільний елемент із G' є добутком не більше ніж k комутаторів; якщо такого числа не існує, то вважається, що ширина комутанта нескінченна. Нижній центральний ряд $\gamma_i(G), i \geq 1$, групи G визначається таким чином: $\gamma_1(G) = G$, а при $i > 1$ $\gamma_i(G)$ є підгрупою породженною комутаторами (u,v), де $u \in \gamma_{i-1}(G), v \in G$.

Теорема 1. *Комутант $UJ_2(K)'$ групи $UJ_2(K)$ збігається з підгрупою $H = \{[0, f(x)] : f(x) \in K[x]\}$. Ширина комутанта дорівнює 1. Нижній центральний ряд групи $UJ_2(K)$ стабілізується на комутанті.*

Доведення. З леми $5, b)$ випливає що комутант $UJ_2(K)'$ міститься в H. Для того, щоб переконатися, що має місце рівність $UJ_2(K)' = H$, досить пересвідчитися, що кожен елемент із H є комутатором певних елементів із $UJ_2(K)$. Нехай $u = [0, g(x)]$ – довільний елемент з H. Згідно з лемою 3 існує многочлен $f(x) \in K[x]$ такий, що має місце рівність

$$f(x+1) - f(x) = g(x).$$

Розглянемо такі два перетворення із $UJ_2(K)$:

$$v = [0, f(x)], w = [-1, 0].$$

За лемою $5, b)$ для цих перетворень дістаємо

$$(w,v) = [0, f(x+1) - f(x)].$$

Отже, має місце рівність $u = (w, v)$, тобто $u \in UJ_2(K)'$. Таким чином, має місце потрібна рівність. З наведених міркувань випливає також, що кожен елемент із $UJ_2(K)'$ є комутатором, тобто ширина комутанта дорівнює 1. Підгрупа $\gamma_3(UJ_2(K))$ породжується комутаторами вигляду (u, v), де $u \in \gamma_2(UJ_2(K)) = UJ_2(K)'$, а $v \in UJ_2(K)$. Згідно з доведеним довільний елемент $u \in H$ є комутатором деякого перетворення із H з перетворенням $[-1, 0]$, тобто $\gamma_3(UJ_2(K)) = UJ_2(K)'$, а це означає, що нижній центральний ряд групи $UJ_2(K)$ стабілізується на комутанті. Теорему доведено.

Верхній центральний ряд даної групи G визначається індуктивно таким чином: $Z_0(G) = \{1\}, Z_1(G) = Z(G)$, а при $i > 1$ $Z_i(G)$ складається з наиможливіших елементів $u \in G$ таких, що для довільного $g \in G$ комутатор (u, g) міститься в $Z_{i-1}(G)$.

Теорема 2. *n-тий член верхнього центрального ряду $Z_n(UJ_2(K))$ групи $UJ_2(K)$ збігається з підгрупою*

$$H_n = \{[0, f(x)] | ст.f(x) \leq n - 1\},$$

а його ω-тий член – з підгрупою H. Група $UJ_2(K)$ має верхній центральний ряд довжини $\omega + 1$.

Доведення. Скористаємося індукцією відносно n. Випадок $n = 1$ є очевидним, оскільки центр групи $UJ_2(K)$ складається з перетворень вигляду $[0, a], a \in K$. Ці і тільки ці перетворення комутують з усіма іншими. Припустимо, що при $k \leq n$ має місце рівність $H_k = Z_k(UJ_2(K))$ і пересвідчимося, що ця рівність має місце при $k = n+1$. Комутатор (u, v) довільного перетворення $u = [a, f(x)]$ з перетворенням $v = [0, g(x)] \in H$ має вигляд

$$(u, v) = [0, -g(x - a) + g(x)].$$

Оскільки $ст.(-g(x - a) + g(x)) < ст.g(x)$, то з включення $v \in H_{n+1}$ випливає, що $(u, v) \in H_n$ для довільного $u \in UJ_2(K)$. Це означає, згідно з припущенням індукції, що $H_{n+1} \subseteq Z_{n+1}(UJ_2(K))$. Залишилося переконатися, що жодне перетворення $v \in H$, для якого $ст.g(x) \geq n + 2$ не належить до $Z_{n+1}(UJ_2(K))$. Якщо $ст.g(x) = k \geq n+2$, то за лемою 4 існує такий елемент $a \in K$, що $ст.(g(x + a) - g(x)) = n + 1$. Звідси випливає, що ненульова координата комутатора таблиць $u = [a, 0]$ і v є многочленом степеня $n+1$, тобто $(u, v) \notin Z_n(UJ_2(K))$. А тому $v \notin Z_{n+1}(UJ_2(K))$, тобто $Z_{n+1}(UJ_2(K)) = H_{k+1}$.

Далі, ω-тий член верхнього центрального ряду визначається як $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} Z_n(UJ_2(K))$. Отже, $Z_\omega(UJ_2(K)) = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} H_n = H$. Оскільки для довільних перетворень $u \in H$ і $v \in UJ_2(K)$ маємо $(u, v) \in H$, то

$$Z_{\omega+1}(UJ_2(K)) = UJ_2(K).$$

Теорему доведено.

4 Класи спряженості групи $UJ_2(K)$ і нормалізаторна умова

Адитивна група поля K діє на кільці многочленів $K[x]$ зсувами аргументу:

$$f(x) \mapsto f(x + \alpha), f(x) \in K[x], \alpha \in K. \tag{12}$$

Нерухомими точками при такій дії є многочлени нульового степеня. На множині всіх многочленів ненульового степеня дія (12) є точною, а всі орбіти – нескінченні, оскільки при довільних цілих k, l, $k \neq l$, маємо $f(x + k\alpha) \neq f(x + l\alpha)$. Множину орбіт дії (12) на множині многочленів ненульового степеня над K позначимо символом Ω. Класи спряженості групи $UJ_2(K)$ описуються таким чином.

Теорема 3. *Нехай* $u = [\alpha, g(x)]$ *- довільний елемент із* $UJ_2(K)$. *Клас спряженості* $\langle U \rangle$ *цього елемента має вигляд:*

$(i)\{[\alpha, h(x)] | h(x) \in K[x]\}$, при $\alpha \neq 0$;

$(ii)\{[0, h(x)] | h(x) \in \theta\}, \theta \in \Omega$, при $\alpha = 0, cm.g(x) \geq 1$;

$(iii)\{[0, c]\}$, при $\alpha = 0, g(x) \equiv c$.

Доведення (i). Нехай u – такий елемент, що $\alpha \neq 0$. Згідно з лемою 5, рівність (10), елемент, спряжений з $[\alpha, g(x)]$ за допомогою перетворення $[\beta, f(x)]$ має вигляд $[\alpha, -f(x-\beta)+g(x-\beta)+f(x-\beta+\alpha)]$. Для довільного многочлена $h(x) \in K[x]$ рівняння

$$-f(x - \beta) + g(x - \beta) + f(x - \beta + \alpha) = h(x)$$

є рівнянням типу (7), а тому згідно з лемою 3 має розв'язок. Нехай $f_0(x)$ – один з розв'язків цього рівняння, а перетворення v визначене як $[\beta, f_0(x)]$. Тоді $v^{-1}uv = [\alpha, h(x)]$. Оскільки $h(x) \in K[x]$ – довільний, то частину (i) теореми 3 доведено.

(ii) Якщо $u = [0, g(x)]$, то для довільного перетворення $v = [\beta, f(x)]$ маємо
$$v^{-1}uv = [0, g(x - \beta)].$$
Оскільки $\beta \in K$ може бути довільним, то $g(x - \beta)$ пробігає деяку орбіту $\theta \in \Omega$, тобто клас спряженості $\langle U \rangle$ має потрібний вигляд.

Випадок (iii) очевидний. Теорему доведено.

Для довільного натурального n підгрупа
$$\widehat{K} \cdot H_n = \{[\alpha, f(x)] | \alpha \in K, f(x) \in K[x], ст.f(x) \leq n\}$$
має верхній центральний ряд вигляду
$$E < Z(UJ_2(K)) = H_0 < H_1 < ... < H_{n-1} < \widehat{K} \cdot H_n, \qquad (13)$$
тобто є нільпотентною класу n. Безпосередньо перевіряється, що (13) є також нижнім центральним рядом групи $\widehat{K} \cdot H_n$. Оскільки кожна скінченнопороджена підгрупа групи $UJ_2(K)$ міститься при деякому n у підгрупі $\widehat{K} \cdot H_n$, то група $UJ_2(K)$ є локально нільпотентною. Більше того, має місце таке твердження.

Теорема 4. *Для довільного поля K характеристики нуль в групі $UJ_2(K)$ виконується нормалізаторна умова, тобто кожна її підгрупа відмінна від свого нормалізатора.*

Доведення. Проаналізуємо, які умови повинні виконуватися для підгрупи $A < UJ_2(K)$ для того, щоб її нормалізатор $N(A)$ в $UJ_2(K)$ збігався з самою підгрупою A.

По-перше, підгрупа A не може бути скінченнопородженою, оскільки інакше при деякому n мало би місце включення $A < \widehat{K} \cdot H_n$. З нільпотентності $\widehat{K} \cdot H_n$ випливає, що навіть нормалізатор A в $\widehat{K} \cdot H_n$ відмінний від A, тобто A не є самонормалізовною в $UJ_2(K)$. Крім того, A не може бути підгрупою H, бо тоді $N(A) \neq A$, оскільки $A \lhd H$, $H \lhd UJ_2(K)$.

По-друге, підгрупа A повинна містити центр $Z(UJ_2(K))$, бо інакше, оскільки $N(A) > Z(UJ_2(K))$, то $N(A) \neq A$.

Припустимо тепер, що існує таке число $n \geq 0$, що підгрупа A містить H_n, але не містить H_{n+1}. Тоді $N(A) \neq A$, бо для довільного перетворення $v = [0, g(x)] \in H_{n+1}$ будь-якого перетворення $u = [\alpha, f(x)] \in A$ трансформа $v^{-1}uv$ міститься в A. Справді,
$$v^{-1}uv = [\alpha, -g(x) + f(x) + g(x + \alpha)] = [0, -g(x) + g(x + \alpha)] \cdot [\alpha, f(x)].$$

Оскільки $[0, -g(x) + g(x + \alpha)]$ міститься в $H_n < A$, то добуток $[0, -g(x) + g(x+\alpha)] \cdot u$ також належить до A. Отже, $N(A) > H_{n+1}$, тобто $N(A) \neq A$. Таким чином, для самонормалізовної підгрупи ця умова виконуватися не може.

Залишилося розглянути випадок, коли підгрупа A містить підгрупи H_n при довільному натуральному n. Тоді $A > H$, тобто $A = B \cdot H$, де B – деяка підгрупа адитивної групи поля K. Якщо $B \neq K$, то $B \cdot H \triangleleft UJ_2(K)$, тобто в такому разі також маємо $N(A) \neq A$. Отже, підгрупи $A < UJ_2(K)$, для якої виконувалася б умова $N(A) = A$ не існує. Теорему доведено.

5 Вербальні підгрупи і повнота групи $UJ_2(K)$.

Нагадаємо [9, с. 165], що група G називається повною, якщо для довільного натурального числа n і довільного елемента $g \in G$ рівняння $x^n = g$ має розв'язок в групі G.

Лема 6. *Для довільного перетворення $u = [\alpha, f(x)] \in UJ_2(K)$ при будь-якому натуральному k має місце рівність*

$$u^k = [k\alpha, \sum_{j=0}^{k-1} f(x + j\alpha)]. \tag{14}$$

Доведення здійснюється безпосередньою індукцією за числом k.

Теорема 5. *Для довільного поля характеристики нуль група $UJ_2(K)$ є повною.*

Доведення. Потрібно переконатися, що для довільного перетворення $u = [\alpha, f(x)] \in UJ_2(K)$ і будь-якого натурального числа k існує перетворення $v \in UJ_2(K)$, таке, що $v^k = u$. Покладемо, що шукане перетворення v має вигляд: $v = [\beta, g(x)], \beta \in K, g(x) \in K[x]$. Тоді згідно з (14) маємо

$$v^k = [k\beta, \sum_{j=0}^{k-1} g(x + j\beta)] = [\alpha, f(x)].$$

Звідси

$$k\beta = \alpha, \ \sum_{j=0}^{k-1} g(x + j\beta) = f(x). \tag{15}$$

Оскільки K – поле характеристики нуль, то з першої рівності дістаємо $\beta = \alpha/n$ і залишається перевірити, що друге рівняння (15) має розв'язок в кільці $K[x]$. Скористаємося індукцією за числом k. Випадок $k = 2$ доводиться тими ж міркуваннями, що використовуються при доведенні леми 3. При цьому має місце рівність $cm.g(x) = cm.f(x)$. Нехай твердження теореми є правильним для всіх $k < n$ і розглянемо його при $k = n$. За припущенням індукції рівняння

$$\sum_{i=0}^{n-1} g(x + i\beta) = h(x) \tag{16}$$

відносно невідомої $g(x)$ має розв'язок при довільному многочленові $h(x)$. З цієї рівності дістаємо рівність

$$\sum_{i=0}^{n-1} g(x + (i+1)\beta) = h(x + \beta). \tag{17}$$

Додаючи рівності (16), (17) дістаємо

$$g(x) + 2g(x + \beta) + \ldots + 2g(x + (n-1)\beta) + g(x + n\beta) = h(x) + h(x + \beta).$$

З іншого боку, рівняння $g(x) + g(x + n\beta) = p(x)$ відносно $g(x)$ також має розв'язок при довільному многочленові $p(x)$, $cm.p(x) = cm.h(x)$. Додаючи цю рівність до попередньої дістаємо

$$2(g(x) + g(x + \beta) + \ldots + g(x + n\beta)) = h(x) + h(x + \beta) + p(x).$$

Залишилося підібрати многочлени $h(x)$ і $p(x)$ так, щоб $\frac{1}{2}(h(x)+h(x+\beta)+p(x)) = f(x)$, що можна зробити вибравши $p(x)$ довільно, і розв'язавши рівняння $h(x)+h(x+\beta) = 2f(x)-p(x)$ відносно $h(x)$. Теорему доведено.

Поняття вербальної підгрупи в заданій групі визначається таким чином. Груповим словом в алфавіті $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ називається довільний елемент вільної групи з системою вільних твірних $x_1, x_2, \ldots$ Кожне групове слово має вигляд $v(x_1, x_2, \ldots, x_s) = x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \ldots x_{i_s}^{\epsilon_s}$, де $\epsilon_i \in \{1, -1\}, 1 \le i \le s, \quad i_1, i_2, \ldots, i_s \in \{1, 2, \ldots\}$.

Як елементи вільної групи F з вільними твірниими $x_1, x_2, \ldots$ розглядаються лише нескоротні слова, тобто такі, що не містять фрагментів вигляду $x_i x_i^{-1}$ або $x_i^{-1} x_i$. Слово $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається комутаторним, якщо воно міститься в комутанті групи F. Прості комутаторні слова визначаємо індуктивно:

- Кожен комутатор $(x_i, x_j), x_i, x_j \in X, i \neq j$ є простим комутаторним словом;
- Якщо $v(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ – просте комутаторне слово, то комутатори $(v(x_1, x_2, \ldots, x_k), x_{k+1})$, $(x_{k+1}, v(x_1, x_2, \ldots, x_k))$ є простими комутаторними словами;
- Інших простих комутаторних слів немає.

Комутатор $(\ldots((x_1, x_2), x_3), \ldots, x_k)$ називається простим лівонормованим, а комутатор $(x_1, (x_2, \ldots, (x_{k-1}, x_k) \ldots))$– правонормованим.

Значенням групового слова $v(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ в групі G називається довільний елемент групи G, який має вигляд $v(g_1, g_2, \ldots, g_s)$, де $g_1, g_2, \ldots, g_s \in G$ – довільні. Нехай $V \subseteq F$ – деяка множина групових слів. Вербальною підгрупою, що визначається множиною слів V в групі G називається підгрупа $V(G)$, породжена всіма значеннями слів із V в групі G:

$$V(G) =< \{v(g_1, g_2, \ldots, g_s) | v \in V, g_1, g_2, \ldots, g_s \in G\} > .$$

Кожна вербальна підгрупа є цілком інваріантною в групі G; всі вербальні підгрупи в G утворюють ґратку щодо включення, яка, взагалі кажучи, не є підґраткою ґратки всіх підгруп групи G (див. [11]). Сама група G і одинична підгрупа E завжди будуть вербальними підгрупами в G. Всі інші підгрупи називаються власними вербальними підгрупами G.

Два набори слів V_1, V_2 називаються рівносильними над групою G (див. [11]), якщо $V_1(G) = V_2(G)$.

Лема 7. *Над довільною метабелевою групою кожна множина слів V рівносильна деякій одноелементній множині слів.*

Доведення випливає з основного результату [5].

Як наслідок з леми 7 дістаємо, що кожна вербальна підгрупа метабелевої групи G може бути породжена одним словом.

Важливим для подальших міркувань є також наступне твердження.

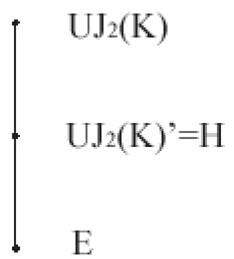
Лема 8. *Кожне групове слово є рівносильним парі слів, одне з яких має вигляд x^n, а друге є комутаторним словом.*

Доведення див. в [11].

Теорема 6. *Комутант групи $UJ_2(K)$ є єдиною власною вербальною підгрупою цієї групи.*

Доведення. За теоремою 5 вербальна підгрупа, породжена словом x^k в групі $UJ_2(K)$ при довільному $k \in N$ збігається з самою групою $UJ_2(K)$. Звідси випливає, що вербальна підгрупа, породжена парою слів x^k, v, де v – довільне слово також збігається з групою $UJ_2(K)$. Отже, враховуючи леми $6, 7$, маємо, що кожна власна вербальна підгрупа групи $UJ_2(K)$ породжується деяким комутаторним словом. Припустимо, що комутаторне слово не є простим ані суперпозицією простого слова зі словами вигляду x_i^k. Тоді воно містить підслово вигляду $((x_{i_1}, x_{i_2}), (x_{i_3} x_{i_4}))$, яке в групі $UJ_2(K)$, оскільки вона метабелева, тотожно дорівнює одиничному елементу. А тому, вербальна підгрупа, що породжується в групі $UJ_2(K)$ цим словом, є одиничною. Далі, з теореми 5 випливає, що кожне слово, яке утворюється з простого комутатора суперпозицією зі словом вигляду x_i^k є рівносильним початковому простому комутатору. Таким чином, досить розглянути вербальні підгрупи, породжені простими комутаторами. З теореми 1 випливає, що у випадку коли вербальна підгрупа, породжена словом $v(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$ збігається з $UJ_2(K)$, то вербальна підгрупа, породжена словом $(v(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}), x_{i_{n+1}})$ або $(x_{i_{n+1}}, v(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}))$ також збігається з $UJ_2(K)$. Тепер доведення завершується очевидною індукцією за кількістю символів x_i, з яких утворено простий комутатор. Теорему доведено.

Наслідок. *Ґратка вербальних підгруп групи $UJ_2(K)$ має вигляд (рис.1)*



Наведемо наприкінці без доведення ще одне твердження про групу $UJ_2(K)$.

Теорема 7. *Нормалізатор групи $UJ_2(K)$ в групі $AutK[x, y]$ збігається з групою трикутних автоморфізмів $J_2(K)$.*

[1] *Arno van der Essen.* Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture. – Basel: Birkhausen Verlag, 2000. – 329 p.

[2] *Alexander A.Mikhalev, Vladimir Shpilrain, Jie-Tai Yu.* Combinatorial Methods. Free groups, Polynomials and Free Algebras. – New-York etc: Springer, 2004. – 314 p.

[3] *Shmuel Friedland, John Milnor.* Dynamical properties of plane polynomial automorphisms. – Ergod. Th. & Dynam. Syst., **9**(1989). – P. 67-99.

[4] *A.Gȯmez, J.D. Meiss.* Reversible polynomial automorphisms of the plane, the involutory case. – Phisic letters A, **312** (2003). – P. 49-58.

[5] *D.E. Cohen.* On the laws of metabelian variety. – J.Algebra, **5**(1967). – P. 267-273.

[6] *Christian Wolf.* Hausdorff and topological dimension for polynomial automorphism of C^2. – Ergod.Th. & Dynam. Syst. **22** (2002). – P. 1313-1327.

[7] *A.G.Czerniakiewicz.* Automorphisms of free Associative Algebra of rang 2. I,II. – Trans. Amer. Math.Soc., **160** (1971), P. 393-401, **171** (1972). – P. 309-315

[8] *Л. Макар-Лиманов.* Автоморфизмы свободной ассоциативной алгебры с двумя образующими, Функциональный анализ и приложения. – 4(1970), **3**. – С. 107-108.

[9] *М. И. Каргополов, Ю. И. Мерзляков.* Основы теории групп. – М.: Наука, 1982. – 288 с.

[10] *В. І. Сущанський, В. С. Сікора.* Операції на групах підстановок. – Чернівці: Рута, 2003. – 255 с.

[11] *Х. Нейман.* Многообразия груп. – Москва : Мир, 1969. – 264 с.

THE STRUCTURE OF THE UNITRIANGLE AUTOMORPHISM GROUP OF THE RING OF TWO POLYNOMIALS VARIABLE OVER THE FIELD OF ZERO CHARACTERISTIC

Zhanna DOVGEY [1], *Vitaliy SUSHCHANSKYY* [2]

[1] Yuriy Fed'kovych Chernivtsi National University,
2 Kotsjubynskyi Str., Chernivtsi 58012, Ukraine
[2] Insttytut Matematyki, Politechnika Slaska

We describe main properties of the unitriangle automorphism group of the polynomial algebra $K[x,y]$ over a field K of the characteristic 0. The lower and upper central series and conjugate classes of this group are characterized. The lattice of it's verbal subgroup is described.