N. Kryloff et N. Bogoliouboff
(à Kiew, Ucraïne).

„Sur quelques critères concernant l' existance des dérivées d' une fonction d' une variable réelle".

Dans son article „Sur la dérivée séconde géneralisée de Riemann-Schwarz" (Comptes rendus du 4-me Congrès des Mathématiciens Scandinaves, 1920) Prof. Dr. Bendixson a démontré un théorème, qui donne un critère de l' existance de la dérivée et dont la géneralisation aux dérivées d' ordre supérieur peut présenter, ce semble, un certain intêret, vu les conséquences et les différentes applications qui en découlent.

A cette question qui a été jadis l' objet des savantes recherches de Prof. Dr. P. Montel[1]) ont été consacrées aussi ce dernier temps les importants articles de Prof. Dr. M. Krawtchouk[2]) et l' un d' eux a paru récemment sur les pages de ce journal. Tout dérnièement le problème dont il s' agit a été traité avec une grande géeralité dans un travail[3]) étendu soutenu par M. Marchaud comme thèse de doctorat devant la Faculté des Sciences de Paris.

Ce que précède prouve déjà l' intêret du sujet qui, vu son ampleur, est loin d' être épuisé.

L' objet de cette note est de présenter quelques remarques rélatives au sujet considéré et faites au cours du séminaire mathématique de Prof. Dr. N. Kryloff (Kiew).

La démonstration du § 1. appartient à N. Kryloff, celle du § 2. à N. Bogoliouboff.

Le § 3 contient un théorème qui a paru aux auteurs pas depourvu de tout l' intêret.

---

[1]) Montel. Notice sur ses travaux. Paris 1920.

[2]) t. XXVI. V. aussi M. Кравчук. До теорії функцій дійсного змінного. Київ 1926.

[3]) M. Marchand. Sur les dérirées et sur les différences des fonctions de variables réelles. Paris. G. Villars 1927.

§ 1. Théorème. Si la $(k+1)$ diférence divisée d' une fonction $y(x)$ est uniformément bornée, c. à d. si

$$\left|\frac{\Delta^{k+1}y}{\Delta x^{k+1}}\right| \leqq \lambda$$

alors $y(x)$ possède la k-me dérivée, vérifiant la condition de Lipschitz.

Ce téorème connu encore à M. Montel et à M. Brouwer et généralisant celui de M. Bendixson peut être démontré en peu des mots de la manière que voici.

Soit

$$(1)\qquad y_h(x) = \frac{1}{h^{k+1}}\int_x^{x+h} \qquad \int_x^{x+h} y(x)\,dx^{k+1}, \text{ d' où } \frac{\Delta^{k+1}y}{\Delta x^{k+1}} = y_h^{(k+1)}(x);$$

alors d' après (1) on aura indépendemment de h

$$\left|y_h^{(k)}(x'') - y_h^{(k)}(x')\right| \leqq \lambda\,|x'' - x'|;$$

ceci prouve déjà que la suite des fonctions

$$(2)\qquad y_{h_1}^{(k)},\quad y_{h_2}^{(k)},\qquad\qquad y_{h_n}^{(k)}$$

est également continue. Pour démontrer que cette suite (2) est aussi uniformement bornée partons de l' identité

(3)

$$y_h(x) = \int_0^x \qquad \int_0^x y_h^{k+1)}\,d^{k+1}x + C_{0,h} + C_{1,h}x + \qquad + C_{k,h}x^k;$$

Or $y_h(x) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} y(x)$, donc $|y_h(x)| < M$, par conséquent

$$(4)\qquad |P_{k,h}(x)| = |C_{0,h} + C_{1,h}x + \qquad + C_{k,h}x^k| \leqq M + \frac{\lambda}{(k+1)!};$$

d' autre part on a évidemment

$$C_{j,h} = \sum_{i=0}^{x} a_{ji}^{(k)} P_{k,h}\left(\frac{i}{k}\right),$$

où $a_{ji}^{(k)}$ ne dépendent que de k, donc en vertu du (4) on s' assure que la suite (2) est uniformément bornée.

Cela étant, d' après le théorème bien connu d' Arzélà on peut extraire de (2) des suites uniformément convergentes $[y_{h_\nu}]$ telles que $y_{h_\nu}^{(k)} \longrightarrow \varphi(x)$ pour $\nu \longrightarrow \infty$.

En prenant donc l' identité

$$(5)\quad y_{h_\nu}(x) = \int_0^x \cdots \int_0^x y_{h_\nu}^{(k)} \overline{dx}^k + C_{0,h_\nu} + C_{1,h_\nu} x + \cdots + C_{k-1,h_\nu} x^{k-1}$$

et en remarquant que $y_{h_\nu}(x) \xrightarrow[\nu \to \infty]{} y(x)$ on s'assure comme précedemment que $P_{k-1,h_\nu}(x) \xrightarrow[h_\nu \to 0]{} P_{k-1}(x)$, où $P_{k-1}(x)$ est un polynome du dégré $k-1$. Le passage à la limite conduit donc à la rélation

$$y(x) = \int_0^x \cdots \int_0^x \varphi(x)\, \overline{dx}^k + P_{k-1}(x)$$

d' où l' on voit entre autre que la fonction limite $\varphi(x)$ est unique. De (5) on tire

$$|\varphi(x'') - \varphi(x')| \leq \lambda\, |x'' - x'|,$$

ce que prouve le théorème dont la démonstration peut encore être simplifiée. Il va sans dire que le texte du théorème peut être énnoncé comme il suit: „la condition nécessaire et suffisante pour que $y(x)$ possède la k-me dérivée satisfaisant à la condition de Lipschitz est que la $(k+1)$ différence divisée est uniformément bornée"[1]).

§ 2. Pour obtenir les différentes géneralisations du théorème précedent on peut procéder de bien de manières et entre autre on peut raisonner comme il suit, en supposant, ce qui est toujours possible, que $y(x)$ possède la période égale à un dans $(-\delta,\ 1+\delta)$, où $\delta > 0$; alors pour Δx suffisamment petit $[(k+1)\Delta x \leq \delta]$ les différences divisées $\frac{\Delta^i y}{\Delta x^i}$, $i = 1, 2 \ldots k+1$ sont aussi périodiques.

D' autre part on a:

$$\sum_{i=0}^{n} y(x_i)\, sin\, m\pi x_i\, \Delta x = \frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}}}{\lambda_m^{\frac{k+1}{2}}} \sum_{i=0}^{n} \frac{\Delta^{k+1} y(x_i)}{\Delta x^{k+1}}\, sin\, m\pi x_i\, \Delta x;$$

(si $(k+1)$ est pair)

$$\sum_{i=0}^{n} y(x_i)\, sin\, m\pi x_i\, \Delta x = \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{\lambda_m^{\frac{k+2}{2}}} \sum_{i=0}^{n} \frac{\Delta^{k+1} y_i}{\Delta x^{k+1}} \frac{\Delta\, sin\, m\pi x_i}{\Delta x}\, \Delta x;$$

(si $(k+1)$ est impair)

[1]) v. Krawtchouk. Zur Théorie der Funktionen der reellen Veränderlichen. p. 99.

$$\sum_{i=0}^{n} y(x_i)\cos m\pi x_i\,\Delta x = \frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}}}{\overline{\lambda}_m^{\frac{k+1}{2}}}\sum_{i=0}^{n}\frac{\Delta^{k+1}y(x_i)}{\Delta x^{k+1}}\cos m\pi x_i\,\Delta x\,;$$

(si $(k+1)$ est pair)

$$\sum_{i=0}^{n} y(x_i)\cos m\pi x_i\,\Delta x = \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{\overline{\lambda}_m^{\frac{k+2}{2}}}\sum_{i=0}^{n}\frac{\Delta^{k+1}y_i}{\Delta x^{k+1}}\,\frac{\Delta\cos m\pi x_i}{\Delta x}\,\Delta x\,;$$

(si (k+1) est impair)

où $\overline{\lambda}_m = 2\left(\frac{1-\cos m\pi\Delta}{\Delta^2}\right) = m^2\pi^2 - \frac{m^4\,.\,\pi^4}{12}\Delta^2 +$

alors

$$2\sum_{m=N}^{m=M}\left[\overline{\lambda}_m^{k+1}\left\{\left(\sum_{i=0}^{n} y(x_i)\sin m\pi x_i\Delta x\right)^2 + \left(\sum_{i=0}^{n} y(x_i)\cos m\pi x_i\,\Delta x\right)^2\right\} =\right.$$

$$= 2\sum_{m=N}^{n=M}\left\{\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{\Delta^{k+1}y_i}{\Delta x^{k+1}}\sin m\pi x_i\,\Delta x\right)^2 +\right.$$

$$\left. + \left(\sum_{i=0}^{n}\frac{\Delta^{k+1}y_i}{\Delta x^{k+1}}\cos m\pi x_i\,\Delta x\right)^2\right\} \leq \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{\Delta^{k+1}y(x_i)}{\Delta x^{k+1}}\right)^2\Delta x\,;$$

(si $(k+1)$ est pair)

$$2\sum_{m=N}^{m=M}\left[\overline{\lambda}_m^{k+1}\left\{\left(\sum_{i=0}^{n} y(x_i)\sin m\pi x_i\,\Delta x\right)^2 + \left(\sum_{i=0}^{n} y(x_i)\cos m\pi x_i\,\Delta x\right)^2\right\} =\right.$$

$$= 2\sum_{m=N}^{m=M}\frac{1}{\overline{\lambda}_m}\left\{\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{\Delta^{k+1}y(x_i)}{\Delta x^{k+1}}\,\frac{\Delta\sin m\pi x_i}{\Delta x}\right)^2 +\right.$$

$$\left. + \left(\sum_{i=0}^{n}\frac{\Delta^{k+1}y(x_i)}{\Delta x}\,\frac{\Delta\cos m\pi x_i}{\Delta x}\,\Delta x\right)^2\right\} \leq \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{\Delta^{k+1}y(x_i)}{\Delta x^{k+1}}\right)^2\Delta x$$

(si $(k+1)$ est impair)

où N et M sont deux nombres entiers positifs. D' ici pour $n \to \infty$, M et N étant fixés, on tire

$$2\sum_{m=N}^{m=M}[m^2\pi^2]^{k+1}\left\{\left(\int_0^1 y(x)\sin m\pi x\,dx\right)^2 + \left(\int_0^1 y(x)\cos m\pi x\,dx\right)^2\right\} \leq \lambda^2,$$

si l'on suppose qu'indépendemment de Δ on a

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{\Delta^{k+1}y(x_i)}{\Delta^{k+1}x}\right)^2 \Delta x \leqq \lambda^2;$$

par conséquent la série

$$2\sum_{1}^{\infty}(m^2\pi^2)^{k+1}\left\{\left(\int_0^1 y(x)\sin m\pi x\,dx\right)^2+\left(\int_0^1 y(x)\cos m\pi x\,dx\right)^2\right\}$$

est convergente. Donc d'après le théorème bien connu de Riesz-Fischer il existe presque partout dans (0,1) une fonction $\varphi(x)$ de carré sommable, dont les coéfficients de Fourier sont:

$$\sqrt{2}(-1)^{\frac{k+1}{2}}(m\pi)^{k+1}\int_0^1 y(x)\sin m\pi x\,dx,$$

$$\sqrt{2}(-1)^{\frac{k+1}{2}}(m\pi)^{k+1}\int_0^1 y(x)\cos m\pi x\,dx,$$

(si $(k+1)$ est pair)

$$\sqrt{2}(-1)^{\frac{k}{2}}(m\pi)^{k+1}.\int_0^1 y(x)\cos m\pi x\,dx;$$

$$-\sqrt{2}(-1)^{\frac{k}{2}}(m\pi)^{k+1}\int_0^1 y(x)\cos m\pi x\,dx,$$

(si $(k+1)$ est impair).

Cela étant, soit $F(x)$ l'integrale du système différentiel

$$\frac{d^{k+1}F(x)}{dx^{k+1}} = \varphi(x);\quad F(0) = F(1);\quad F^{(i)}(0) = F^{(i)}(1),\quad i=1,2,\qquad k$$

en intégrant par parties on s'assure que

$$\int_0^1 F(x)\sin m\pi x\,dx = \int_0^1 y(x)\sin m\pi x\,dx;$$

$$\int_0^1 F(x)\cos m\pi x\,dx = \int_0^1 y(x)\cos m\pi x\,dx;$$

donc en vertu de la fermeture des fonctions trigonométriques on a $y(x) = F(x)$, c. q. f. d.

Ceci prouve le théorème:

„La condition necessaire est suffisante pour que $y(x)$ possède $(k+1)$-me dérivée presque partout dans $(0,1)$ est que

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{\Delta^{k+1}y(x_i)^2}{\Delta x^{k+1}}\right)^2 \Delta x \leqq \lambda^2$$

où $\lambda^2 = const.$

§ 3. Pour conclure établissons le théorème suivant géneralisant le resultat de M. P. Montel[1]):

„Si

$$\left|\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right| < \omega(\Delta x)$$

où $\omega(\delta)$ pour $\delta \to 0$ est une fonction positive non croissante et telle que la série

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\omega\left(\frac{1}{2^m}\right)$$

est convergente, alors $y(x)$ possède la prémière dérivée continue“[2]).

En effet, soit

$$F_h = \frac{y(x+h)-y(x)}{h},$$

alors

$$F_h(x) - F_{\frac{h}{2}}(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x+\frac{h}{2}) + y(x)}{h};$$

donc

$$\left|F_h(x) - F_{\frac{h}{2}}(x)\right| \leqq 2\,\omega\left(\tfrac{h}{2}\right).$$

Envisageons la série

$$F_1(x) + \left(F_{\frac{1}{2}}(x) - F_1(x)\right) + \qquad + \left(F_{\frac{1}{2^{m+1}}}(x) - F_{\frac{1}{2^m}}(x)\right) +$$

où

$$\left|F_{\frac{1}{2^{m+1}}}(x) - F_{\frac{1}{2^m}}(x)\right| < 2\,\omega\left(\frac{1}{2^{m+}}\right);$$

---

[1]) Notice sur le travaux scientifiques de M. Paul Montel. 1920 p. 15 lignes 34–36.

[2]) Comp. avec les resultats de M. Marchand. Thèse. pp. 43–60.

cette série, d' après l' hypothèse admise, converge absolument et uniformément vers une fonction continue $\varphi(x)$, c. à d.:

$$F_{\frac{1}{2^m}}(x) \longrightarrow \varphi(x), \qquad \text{pour } m \longrightarrow \infty .$$

Or on a identiquement

$$y(x_i) = \sum_{0}^{i-1} F_{\frac{1}{2^m}}(x_i)\, \Delta x + y(0),$$

où

$$x_i = \frac{i}{2^m}, \qquad i = 1, 2, \ldots 2^m; \qquad \Delta x = \frac{1}{2^m},$$

donc en passant à la limite on aura

$$y(x) = \int_0^x \varphi(x)\, dx + y(0),$$

d' où l' on tire $\varphi(x) = y'(x)$, ce que démontre le théorème.

D' ici découle comme cas particulier le théorème de M. Montel: si $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^{1+\alpha}}$ est bornée $(0 < \alpha \leqq 1)$ on peut affirmer que la dérivée première existe partout.

Il est évident que le resultat de ce § se géneralise immédiatement pour les différences d' ordre supérieur.

En explicitant la fonction $\omega(\Delta x)$ de différentes façons on peut obtenir du théorème ci-dessus démontré bien de resultats assez curieux.

12. V. 1928.
Kiew, Ucraïne.