М. Кравчук (Київ).

Замітка про контурні інтеґрали.

Як відомо, загальний довід знаної рівности

$$\int_C P(x, y)\, dy = \iint_s \frac{\partial P}{\partial x}\, ds \tag{1}$$

зводиться на випадок, коли C є обвід прямокутника з вершками $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_1)$, $(x_2 y_2)$, $(x_1 y_2)$ *). Ми доведемо тут правдивість рівности (1) для всякого замкненого контура C в данім обсягу Σ, як що для всякого такого контура права й ліва сторона цеї рівности існують (не вимагаючи нпр. суцільности функцій P та $\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right)$.

Зазначивши через C_n обвід згаданого прямокутника та через s_n його поле, можемо дібрати числа b та B на інтервалі $(y_1 y_2)$ так, що буде:

$$[P(x_2 b) - P(x_1 b)](y_2 - y_1) \leqq \int_{C_n} P\, dy = \tag{2}$$

$$= \int_{y_1}^{2} [P(x_2 y) - P(x_1 y)]\, dy \leqq [P(x_2 B) - P(x_1 B)](y_2 - y_1),$$

тоб то:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a, b) \,.\, s_n \leqq \int_{C_n} P\, dy \leqq \frac{\partial P}{\partial x}(A, B) \,.\, s_n \qquad (x_1 < a,\ A < x_2) \tag{3}$$

А що поле s можна з довільним наближенням заступити сумою піль типу s_n $(n = 1, 2, \ldots, N)$, то

$$lim \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial P}{\partial x}(a, b) \,.\, s_n = \iint_s \frac{\partial P}{\partial x}\, ds = lim \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial P}{\partial x}(A, B) \,.\, s_n$$

*) Пор. артикул „Про Green'ове та Stokes'ове перетворення“ в т. XXV цього „Збірника“ (рік 1926); в цій замітці взагальнено деякі з його вислідів. При цій нагоді завважмо, що помічну теорему на стор. 86 у тім артикулі слід опустити (що не порушить дальших вислідів).

і так само

$$\int_C P\,dy = \lim \sum_{n=1}^{N} \int_{C_n} P\,dy\,;$$

це, з огляду на (3), і доводить наше твердження.

Подібнимиж міркуваннями дійдемо рівностей:

$$(4)\qquad \begin{aligned} \int_C (P\,dy - Q\,dx) &= \iint_s \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) ds\,, \\ \int_C (P\,dx + Q\,dy) &= \iint_s \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) ds\,, \end{aligned}$$

як що для довільного числа $\varepsilon > 0$ можна обсяг Σ поділити на такі квадратові обсяги типу s_n, що в кожнім із них бодай одна точка (a, b) справджує нерівности:

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\left| P(xy) - P(a\,b) - (x-a)\frac{\partial P}{\partial x}(a\,b) - (y-b)\frac{\partial P}{\partial y}(a\,b)\right| \leqq \varepsilon\sqrt{s_n} \\ &\left| Q(xy) - Q(a\,b) - (x-a)\frac{\partial Q}{\partial x}(a\,b) - (y-b)\frac{\partial Q}{\partial y}(a\,b)\right| \leqq \varepsilon\sqrt{s_n}\,, \end{aligned}$$

коли точка (x, y) перебігає контур C_n.

Справді, останні нерівности дозволяють написати:

$$\left|\int_{C_n}\left[P(xy) - P(a\,b) - (x-a)\frac{\partial P}{\partial x}(a\,b) - (y-b)\frac{\partial P}{\partial y}(a\,b)\right] dy\right| =$$

$$= \left|\int_{C_n} P\,dy - \frac{\partial P}{\partial x}(a, b)\,.\,s_n\right| \leqq \varepsilon\sqrt{s_n}\,(y_2 - y_n) = \varepsilon\,.\,s_n$$

$$\left|\int_{C_n} Q\,dx + \frac{\partial Q}{\partial y}(a, b)\,.\,s_n\right| \leqq \varepsilon\,.\,s_n$$

З цих двох формул дістаємо:

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\int_{C_n}(P\,dy - Q\,dx) - \sum_{n=1}^{N}\left[\frac{\partial P}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial Q}{\partial y}(a, b)\right].\,s_n\right| \leqq 2\,\varepsilon\,.\sum_{n=1}^{N} s_n\,,$$

що, по переході до границі і зведеться на першу формулу (4). Як приклад, візьмімо функцію

$$f(z) = P(xy) + i\,Q(xy)$$

комплексного змінного $z = x + iy$, що має скрізь у обсягу Σ похідну (не конче суцільну); рівність

(6) $$\lim \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} - i\frac{\partial P}{\partial y}$$

показує, що умови (5) можна справдити, а тому, з огляду на (4) та (6), маємо:

$$\int_C (P\,dy - Q\,dx) = 0, \quad \int_C (P\,dx + Q\,dy) = 0, \quad \text{тоб то} \int_C f(z)\,dz = 0.$$

Наведені міркування взагальнюються на функції кількох змінних та на кратні інтеґрали.