М. Кравчук (Київ).

Про збіжність деяких ланцюгових (ступанкових) дробів.

Візьмімо нескінчений ступанковий дріб

$$(1)\qquad \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 +}}}$$

де a_i та b_i є якісь комплексні числа, і впровадьмо зазначення:

$$A_0 = 0,\ A_1 = a_1,\ A_2 = a_1 b_2,$$

$$(2)\qquad A_i = b_i A_{i-1} + a_i A_{i-2}$$

$$B_0 = 1,\ B_1 = b_1,\ B_2 = b_1 b_2 + a_2,$$

$$(3)\qquad B_i = b_i B_{i-1} = a_i B_{i-2}$$

Тоді, як відомо, буде:

$$\frac{A_n}{B_n} = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 +} \quad + \cfrac{a_n}{b_n}}.$$

Цей дріб називаємо n-им ступанковим наближенням дроба (1), а A_n та B_n — відповідно чисельником та знаменником n-го ступанкового наближення.

Нагадаймо одну Pringsheim'ову[1]) теорему:

Коли числа a_i та b_i справджують нерівности:

$$(4)\qquad |a_i| \leqq |b_i| - 1 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

то ступанковий дріб

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2 +}$$

збігається і його абсолютна вартість є не більша від 1, тоб то існує $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{A_n}{B_n}$ і

[1]) Див. Sitzgsber. Münch. Akademie, 1898, також O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, ст. 254.

$$\left| \lim_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n} \right| \leqq 1.$$

З (2) та (3) легко дістаємо:

$$A_i B_{i-1} - B_i A_{i-1} = (-1)^{i-1} a_1 a_2 \ldots a_i ;$$

отже

(6) $$\frac{A_i}{B_i} - \frac{A_{i-1}}{B_{i-1}} = (-1)^{i-1} \frac{a_1 a_2 \ldots a_i}{B_{i-1} B_i},$$

звідки

(7) $$\frac{A_n}{B_n} = \frac{a_1}{B_1} - \frac{a_1 a_2}{B_1 B_2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{B_2 B_3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{B_{n-1} B_n}.$$

З другого боку, як показують залежности (3),

$$|B_i| \geqq |b_i| \; |B_{i-1}| - |a_i| \; |B_{i-2}|$$

$$|B_i| \geqq (|b_i| - 1) \; |B_{i-1}| - |a_i| \; |B_{i-2}|,$$

що з огляду на (4) дає:

$$|B_i| - |B_{i-1}| \geqq (|b_i| - 1)(|B_{i-1}| - |B_{i-2}|),$$

отже

$$|B_n| - |B_{n-1}| \geqq (|b_1| - 1)(|b_2| - 1) \ldots (|b_n| - 1) \geqq |a_1 a_2 \ldots a_n|$$

або

(8) $$\left| \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{B_{i-1} B_i} \right| \leqq \frac{1}{|B_{i-1}|} - \frac{1}{|B_i|}$$

Ряд із додатних чисел (8), очевидно, збігається, бо сума з його перших n членів не перевищує 1; отже збігається й ряд

$$\frac{a_1}{B_1} - \frac{a_1 a_2}{B_1 B_2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{B_2 B_3} - \ldots$$

тобто, як видко з (7), існує $\lim\limits_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n}$.

Можна ще завважити, що

$$\left| \frac{A_{n+p}}{B_{n+p}} - \frac{A_n}{B_n} \right| \leqq \sum_{i=n+1}^{n+p} \left| \frac{a_1 a_2 \ldots a_i}{B_{i-1} B_i} \right| \leqq \frac{1}{|B_n|} - \frac{1}{|B_{n+p}|}$$

та

$$\left| \lim_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n} - \frac{A_m}{B_m} \right| \leqq \frac{1}{|B_m|}.$$

Далі подаємо та використовуємо деякі прості та важливі висновки з цеї теореми.

§. 1.

Маємо наступні твердження:

1) Коли множини чисел $|p_i|$ та $|q_i|$ є обмежені, то ступанковий дріб

$$(9) \qquad \frac{p_1}{z+q_1-\dfrac{p_2}{z+q_2-\dfrac{p_3}{z+q_3-}}}$$

одностайно збігається поза колом $|z| = R$ досить великого радіюса. Справді, щоб здійснити для цього дроба нерівности (4), досить узяти

$$|z| \geqq |p_n| + |q_n| + 1$$

2) Коли числа q_i всі мають однаковий арґумент Θ і множина чисел $|p_i| - |q_i|$ є обмежена, то ступанковий дріб

$$(10) \qquad \frac{p_1}{r_1 z+q_1-\dfrac{p_2}{r_2 z+q_2-\dfrac{p_3}{r_3 z+q_3-}}}$$

збігається для всіх тих вартостей змінного z, що справджують умови

$$r_i z e^{-i\Theta} \geqq |p_i| - |q_i| + 1 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

Справді, бо в такім разі

$$|p_i| \leqq |r_i z + q_i| - 1$$

Нехай маємо тепер ряд функцій

$$(11) \qquad f_0(z) = f(z),\ f_1(z),\ f_2(z),\ f_3(z),$$

звязаних залежностями:

$$f_i(z) = \frac{s_0^{\,i}}{z - \dfrac{s_1^{\,i}}{s_0^{\,i}} - s_0^{\,i} f_{i+1}(z)}$$

Тоді

$$f(z) = \frac{s_0}{z-\dfrac{s_1}{s_0}-\dfrac{s_0 s_0^{\,1}}{z-\dfrac{s_1^{\,1}}{s_0^{\,1}}-\dfrac{s_0^{\,1}s_0^{\,2}}{z-\dfrac{s_1^{\,2}}{s_0^{\,2}}- \quad - \dfrac{s_0^{\,k-2}s_0^{\,k-1}}{z-\dfrac{s_1^{\,k-1}}{s_0^{\,k-1}}-s_0^{\,k-1}f_k(z)}}}},$$

де очевидно повинно бути

$$s_0 \neq 0, \quad s_0^{\,1} \neq 0, \qquad\qquad s_0^{\,k-1} \neq 0.$$

Взявши $k = \infty$, можна поставити питання за збіжність ступанкового дроба

(12)
$$\cfrac{s_0}{z - \cfrac{s_1}{s_0} - \cfrac{s_0 s_0^1}{z - \cfrac{s_1^1}{s_0^1} - \cfrac{s_0^1 s_0^2}{z - \cfrac{s_1^2}{s_0^2} - }}}$$

і за правдивість рівности:

(13)
$$f(z) = \cfrac{s_0}{z - \cfrac{s_1}{s_0} - \cfrac{s_0 s_0^1}{z - \cfrac{s_1^1}{s_0^1} - }}$$

в разі, коли дріб (12) збігається.

Для збіжности дроба (12) поза колом $|z| = R$ досить великого радіюса, як бачимо з попереднього, досить, щоб числа s_0^i, s_1^i, справджували нерівности:

(14)
$$|s_0^{i-1} s_0^i| < k, \quad \left| \frac{s_1^{i-1}}{s_0^{i-1}} \right| < k \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

де k є якесь стале число; ці нерівности правдиві нпр., коли дріб (12) є періодичний. Але не можемо твердити, що з умов (14) випливає рівність (13). Припустімо, що крім нерівностей (14) маємо ще для $|z| > R_1$

(15)
$$f(z) = \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \frac{s_2}{z^3} +$$

отже, що функція $f(z)$ розвивається в степеневий ряд в обсягу точки $z = \infty$. Тоді рівність (13) є правдива в усякім обсягу, що належить одночасно до $|z| > R$ та до $|z| > R_1$.

Справді, як відомо, розвинення n-го ступанкового наближення $\frac{A_n}{B_n}$ дроба (12) у степеневий ряд:

(16)
$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \qquad + \frac{s_{2n-1}}{z^{2n}} + \frac{\sigma_{2n}^{(n)}}{z^{2n+1}} + \frac{\sigma_{2n+1}^{(n)}}{z^{2n+2}} +$$

має перші $2n$ членів ті самі, що ряд (15); крім того, з огляду на обмеженість множини функцій $\frac{A_n}{B_n}$ в обсягу $|z| > R$, ряди (16) всі в тім обсягу збігаються, і до тогож для $|z| > \varrho > R$

$$\left| \frac{A_n}{B_n} - \frac{s_0}{z} - \frac{s_1}{z^2} - \qquad - \frac{s_{2n-1}}{z^{2n}} \right| \leqq \left| \frac{\sigma_{2n}^{(n)}}{z^{2n+1}} + \frac{\sigma_{2n+1}^{(n)}}{z^{2n+2}} + \quad . \right| \leqq$$

$$\leqq M\left(\left|\frac{\varrho}{z}\right|^{2n+1}+\left|\frac{\varrho}{z}\right|^{2n+2}+\quad\right),$$

де

$$M \geqq \left|\frac{A_n}{B_n}\right| \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

Так бачимо, що

$$\left|\frac{A_n}{B_n}-f(z)\right| \leqq \left|\frac{A_n}{B_n}-\frac{s_0}{z}-\frac{s_1}{z^2}-\ldots-\frac{s_{2n-1}}{z^{2n}}\right|+\left|\frac{s_{2n}}{z^{2n+1}}+\frac{s_{2n+1}}{z^{2n+2}}+\ldots\right| \leqq$$

$$\leqq M\left(\left|\frac{\varrho}{z}\right|^{2n+1}+\left|\frac{\varrho}{z}\right|^{2n+2}+\quad\right)+\left|\frac{s_{2n}}{z^{2n+1}}+\frac{s_{2n+1}}{z^{2n+2}}+\ldots\right| \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 0$$

Отже

$$f(z) = \lim \frac{A_n}{B_n} \tag{17}$$

для

$$|z| > R \text{ та } R_1,$$

що й малося довести.

Слід ще відзначити, що на підставі відомої теореми Stieltjes'a — Vitali[1]), рівність (13) або (що те саме) рівність (17) правдива одностайно в усякім замкненім обсягу площі комплексного змінного z, де множина функцій $\frac{A_n}{B_n}$ є обмежена.

Звідси, між иншим, висновок, що обсяг збіжности ряду (15) є не менший за обсяг $|z| > R$.

§ 2.

Нехай сучинники ряду (15) є дійсні і справджують вимоги:

$$s_0 > 0, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} > 0, \ldots \tag{18}$$ [2])

Із нерівностей (18), на підставі відомої Jacobi'євої формули в теорії визначників випливають ще наступні

$$s_{2k} > 0, \quad \begin{vmatrix} s_{2k} & s_{2k+1} \\ s_{2k+1} & s_{2k+2} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} s_{2k} & s_{2k+2} \\ s_{2k+2} & s_{2k+4} \end{vmatrix} > 0, \ldots \tag{19}$$

Далі з залежности

$$f(z) = \frac{s_0}{z - \frac{s_1}{s_0} - s_0 f_1(z)}$$

---

[1]) Див. нпр. Vitali. Annali di Matematica, (3), т. 10, 1904, Carathéodory und Landau, Sitzgsber. Berl. Akad., 1911, Jacobsthal, Jahresbericht der Deutsch. Math.-Ver., т. 36.

[2]) Цей випадок розібрав Grommer (Crelle's Journal, т. 144.), виходячи з инших засад.

де за $f_1(z)$ беремо ряд того самого, що $f(z)$:

$$f_1(z) = \frac{s_0'}{z} + \frac{s_1'}{z_2} + \frac{s_2'}{z_3} + \tag{20}$$

через порівнання сучинників вираховуємо:

$$s_i' = \frac{(-1)^{i+1}}{(s_0)^{i+3}} \begin{vmatrix} s_1 & s_0 & 0 & 0 \dots\dots 0 \\ s_2 & s_1 & s_0 & 0 \dots\dots 0 \\ & & & \\ s_{i+1} & s_i & s_{i-1} & s_{i-2} \dots s_0 \\ s_{i+2} & s_{i+1} & s_i & s_{i-1} \dots s_1 \end{vmatrix} \qquad (i = 0, 1, 2, 3, \dots) \tag{21}$$

Далі, знов із допомогою Jacob'євої формули, пишемо:

$$\begin{vmatrix} s_1 & s_0 & 0 & 0 \dots\dots 0 \\ s_2 & s_1 & s_0 & 0 \dots\dots 0 \\ & & & \\ s_{i+1} & s_i & s_{i-1} & s_{i-2} \dots s_0 \\ s_{i+2} & s_{i+1} & s_i & s_{i-1} \dots s_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_1 & s_0 & 0 & .0 \\ s_2 & s_1 & s_0 & \dots\dots 0 \\ & & & \\ s_i & s_{i-1} & s_{i-2} & \dots s_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} s_1 & s_0 & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & s_0 . & 0 \\ & & & \\ s_{i+1} & s_i & s_{i-1} & \dots s_1 \end{vmatrix}^2 - (s_0)^{i+1} \begin{vmatrix} s_2 & s_1 & s_0 & 0 \dots . 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & s_0 \quad 0 \\ & & & \\ s_{i+2} & s_{i+1} & s_i & s_{i-1} \dots s_2 \end{vmatrix}$$

або, беручи під увагу (21):

$$- \begin{vmatrix} s_2 & s_1 & s_0 & 0 \quad 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & s_0 \dots . 0 \\ & & & \\ s_{i+1} & s_{i+1} & s_i & s_{i-1} \dots s_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s'_{i-2} & s'_{i-1} \\ s'_{i-1} & s'_i \end{vmatrix} . (s_0)^{i+3} \tag{22}$$

Так само:

$$\begin{vmatrix} s_2 & s_1 & s_0 & 0 \quad 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & s_0 \dots . 0 \\ & & & \\ s_{i+2} & s_{i+1} & s_i & s_{i-1} \dots s_2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} s_2 & s_1 & s_0 \dots . . 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 \dots . . 0 \\ & & \\ s_i & s_{i-1} & s_{i-2} \dots s_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} s_2 & s_1 & s_0 & 0 \dots . 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & s_0 \dots . 0 \\ & & & \\ s_{i+1} & s_i & s_{i-1} & s_{i-2} \dots s_2 \end{vmatrix}^2 = (-s_0)^{i+1} \quad s^i_{i-2} \begin{vmatrix} s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & 0 \dots 0 \\ s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & s_0 \dots 0 \\ & & & & \\ s_{i+2} & s_{i+1} & s_i & s_{i-1} & \dots s_3 \end{vmatrix}$$

або, беручи під увагу (22):

$$\begin{vmatrix} s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & 0 \dots 0 \\ s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & s_0 \dots 0 \\ & & & & \\ s_{i+2} & s_{i+1} & \dots\dots & \dots & s_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s'_{i-4} & s'_{i-3} & s'_{i-2} \\ s'_{i-3} & s'_{i-2} & s'_{i-1} \\ s'_{i-2} & s'_{i-1} & s'_i \end{vmatrix} \quad (s_0)^{i+3} \tag{23}$$

І т. д. Поклавши тепер в (21) $i = 0$, в (22) $i = 2$, в (23) $i = 4$, дістанемо:

$$(24) \quad s'_0 = \frac{1}{(s_0)^3} \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} s'_0 & s'_1 \\ s'_1 & s'_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} s'_0 & s'_1 & s'_2 \\ s'_1 & s'_2 & s'_3 \\ s'_2 & s'_3 & s'_4 \end{vmatrix} > 0,$$

Отож нерівности (18) [а так само і (19)] не порушуються, коли в них числа s_k замінити відповідно числами s'_k.

Тепер з (24) та з (19) маємо:

$$(25) \quad \left| s_0^{i-1} s_0^{i} \right| \leqq \frac{s_2^{i-1}}{s_0^{i-1}} < \frac{s_4^{i-1}}{s_2^{i-1}} < \frac{s_6^{i-1}}{s_4^{i-1}} <$$

$$(26) \quad \left| \frac{s^{i}_{2k+1}}{s^{i}_{2k}} \right| < \left| \frac{s^{i}_{2k+2}}{s^{i}_{2k+1}} \right|$$

отже

$$(27) \quad \left| \frac{s_1^{i}}{s_0^{i}} \right| < \sqrt{\frac{s_2^{i}}{s_0^{i}}} < \sqrt{\frac{s_4^{i}}{s_2^{i}}} < \sqrt{\frac{s_6^{i}}{s_4^{i}}} <$$

$$(28) \quad \left| \frac{s_3^{i}}{s_2^{i}} \right| < \sqrt{\frac{s_4^{i}}{s_4^{i}}} < \sqrt{\frac{s_6^{i}}{s_4^{i}}} < \sqrt{\frac{s_8^{i}}{s_6^{i}}} < \dots$$

Останні нерівности доводять існування оцих границь:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt{\frac{s_{2k+2}}{s_{2k}}} = \alpha \leqq R \text{ та } \lim \frac{s^{i}_{2k+2}}{s^{i}_{2k}} > 0,$$

і тоді (25), (27) та (28) дають:

$$(29) \quad \left| s_0 s_0^{i} \right| \leqq \alpha^2, \quad \left| \frac{s_0}{s_1} \right| \leqq \alpha, \quad \left| \frac{s_{2k+1}}{\alpha} \right| \leqq s_{2k}$$

Тепер доведімо, що для всякого i правдиві нерівности:

$$(30) \quad \left| s_0^{i-1} s_0^{i} \right| \leqq \alpha^2, \quad \left| \frac{s_0^{i}}{s_1^{i}} \right| \leqq \alpha, \quad \left| \frac{s^{i}_{2k+1}}{s^{i}_{2k}} \right| \leqq \alpha \leqq R$$

Справді, колиб найдальша від $z=0$ особлива точка β функції $f_1(z)$ лежала поза колом

$$|z| = \alpha,$$

то вона моглаб бути лише (простим або кратним) полюсом функції $f_1(z)$, тоб то нулем функції $f(z)$; при тім цей полюс не міг бути дійсним, бо для такого дійсного числа β

$$\beta f(\beta) = \left(s_0 + \frac{s_1}{\beta}\right) + \frac{1}{\beta_2}\left(s_2 + \frac{s_3}{\beta}\right) +$$
$$+ \quad > \left(s_0 - \left|\frac{s_1}{\alpha}\right|\right) + \frac{1}{\beta_2}\left(s_2 - \left|\frac{s_3}{\alpha}\right|\right) + \quad \geqq 0$$

Отож нехай цей полюс є

$$\beta = |\beta| \quad e^{i\Theta} \qquad (\Theta \neq k\pi,\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots),$$

а його résidu

$$B = |B| \quad e^{i\varphi};$$

коли більше полюсів з модулем $|\beta|$, крім $|\beta| e^{i\Theta}$, функція $f_1(z)$ не має, то дістаємо неможливу нерівність:

$$0 < \lim_{n=\infty} \frac{s'_{2n+2}}{\varrho^2 s'_{2n}} = \lim_{n=\infty} \frac{\cos(\overline{2n+2}\,\Theta + \varphi)}{\cos(2n\,\Theta + \varphi)} =$$
$$= \lim_{n=\infty} \left[\cos 2\Theta - \sin 2\Theta\, tg\,(2n\Theta + \varphi)\right],$$

бо ця границя або не існує або $\left(\text{у випадку } \Theta = \pm\frac{\pi}{2}\right)$ є -1. Той самий висновок і з припущення кількох пар полюсів з модулем $|\beta|$: воно неможливе з огляду на додатність відношення $\frac{s'_{2n+2}}{s_{2n}}$.

Так доведемо, що за умов (18) всі ряди $f_i(z)$ збігаються в обсягу $|z| > R$; одночасно доведемо нерівності (30) і рівність:

$$f(z) = \cfrac{s_0}{z - \cfrac{s_1}{s_0} - \cfrac{s_0 s_0^1}{z - \cfrac{s_1^1}{s_0^1} - }} \tag{31}$$

для досить великих вартостей $|z|$, за тих самих умов.

§ 3.

До типу функцій $f(z)$ попереднього параграфу належать інтеґрали Stieltjes'a — Маркова:

$$f(z) = \int_a^b \frac{d\psi(x)}{z - x}, \tag{32}$$

де функція $\psi(x)$ є обмежена і не меншає на інтервалі (a, b) (інтеґрал узято в розумінні Stieltjes'овім). Тут очевидно $f(z)$ є аналітична функція від z скрізь на площі комплексного змінного z, окрім точок інтервалу (a, b). Поза колом

$$|z| = R$$

досить великого радіюса маємо:

$$f(z) = \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \frac{s_2}{z^3} +$$

як що a та b є числа скінчені; тут

$$s_i = \int_a^b x^i \, d\,\psi(x) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

Звідси, з огляду на нерівність:

$$d\,\psi(x) \geqq 0\,,$$

як простий висновок нерівности:

$$s_0 > 0\,, \qquad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} > 0\,, \qquad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} > 0\,, \ldots$$

Отже функція (32) розвивається в ступанковий дріб, що збігається до цеї функції скрізь поза колом $|z| = R$ досить великого радіюса.

Не так легко стоїть справа досліду збіжности ступанкових дробів, що в них розвиваються інтеґрали (32) з нескінченими межами. Нпр. відомо, що $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}}{z-x}\,dx$ розвивається в ступанковий дріб[1])

$$(33) \qquad \cfrac{1}{z-1-\cfrac{\frac{1}{2}}{\cfrac{z-3}{2}-} - \cfrac{\frac{m}{m+1}}{\cfrac{z-2m-1}{m+1}-}}$$

Збіжність цього дроба для вартостей змінного

$$z < 0$$

випливає з п. 2) § 1, до слід лише покласти:

$$r_i = \frac{1}{i+1}\,, \qquad \Theta = \pi\,;$$

тоді бо буде

$$|p_i| - |q_i| + 1 = \frac{i}{i+1} - \frac{2i+1}{i+1} + 1 = 0$$

---

[1]) Пор. А. Марков, Исчисление конечных разностей, стор. 121.

Але питання, чи правдива рівність

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{z-x} = \cfrac{1}{z-1-\cfrac{\frac{1}{2}}{\cfrac{z-3}{2}-\dots}}$$

цим не розвязується. Теорія Маркова та Stieltjes'а дає на нього позитивну відповідь.

Завважмо на останку оце відоме просте твердження: нулі та полюси n-го ступанкового наближення $\frac{A_n}{B_n}$ дроба (31) всі ріжні, дійсні і чергуються, отже résidus всіх полюсів додатні. Ця властивість не залежить від збіжности нашого дроба і правдива для всякого дроба типу

$$\cfrac{p_1}{z+q_1-\cfrac{p_2}{z+q_2-\cfrac{p_3}{z+q_3-\dots}}}$$

де числа q_i є *дійсні*, а *числа* p_i — додатні.

Отож

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{R_1}{z-x_1} + \frac{R_2}{z-x_2} + \dots + \frac{z-x_n}{R_n},$$

де числа x_i дійсні, а числа R_i додатні і при тім

$$R_1 + R_2 + \dots + R_n = s_0 \tag{34}$$

і тому

$$f(z) = \lim_{n=\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{z-x_i} \tag{35}$$

З огляду на (34) бачимо, що всі $\frac{A_n}{B_n}$ обмежені в усякім обсягу поза дійсною віссю площі комплексного змінного z. Отже, на підставі теореми Vitali (див. § 1) рівність (35) (або рівноважна рівність (31)) є правдива на всій площі, крім, може, частини дійсної оси.

Що до рівности (35), то вона особливо виявляє, оскільки загальний приклад умов (18) дає функція (32).

§ 4.

Нехай тепер сучинники ряду

$$f(z) = \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z_2} + \frac{s_2}{z_3} + \dots,$$

лишаючися дійсними, справджують вимоги

(36)
$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \dots s_{i-1} \\ s_1 & s_2 \dots s_i \\ & . \\ s_{i-1} & s_i \dots s_{2i-2} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} s_0 \, s_1 & s_i \\ s_1 \, s_2 \dots & s_{i+1} \\ & . \\ s_i \, s_{i+1} \dots & s_{2i} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_{i+1} \\ s_1 & s_2 & s_{i+2} \\ s_{i+1} & s_{i+2} \dots & s_{2i+2} \end{vmatrix} > 0, \dots,$$

почавши з якогось значка $i > 0$. Узагальняючи обчислення параграфу 2 легко приходимо до формули:

$$\begin{vmatrix} s^1_0 & s^1_1 \dots\dots & s^1_{i+p-1} \\ s^1_1 & s^1_2 \dots\dots & s^1_{i+p} \\ s^1_{i+p} & s^1_{i+p+1} \dots & s^1_{2i+2p-2} \end{vmatrix} = (s_0)^{-2i\ 2p-1} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_{i+p} \\ s_1 & s_2 \dots\dots & s_{i+p+1} \\ & & . \\ s_{i+p} & s_{i+p+1} \,. & . \, s_{2i+2p} \end{vmatrix}$$

Так само:

$$\begin{vmatrix} s^2_0 & s^2_1 \dots s^2_{i+p-2} \\ s^2_1 & s^2_2 \dots s^2_{i+p-1} \\ . & . \\ s^2_{i+p-2} & \dots s^2_{2i+2p-4} \end{vmatrix} = (s^1_0)^{-2i-2p+1} \begin{vmatrix} s^1_0 & s^1_1 \dots\dots & s^1_{i+p-1} \\ s^1_1 & s^1_2 \dots\dots & s^1_{2i+2p-2} \\ . & & . \\ s^1_{i+p} & s^1_{i+p+1} \dots & s^1_{2i+2p-2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} s^i_0 \, s^i_1 \dots\dots & s^i_p \\ s^i_p \, s^i_{p+1} \dots & s^i_{2p} \end{vmatrix} = (s^{i-1}_0)^{-2p-3} \begin{vmatrix} s^{i-1}_0 & \dots s^{i-1}_p & s^{i-1}_{p+1} \\ . & & . \\ s^{i-1}_{p+1} & \dots s^{i-1}_{2p-1} & s^{i-1}_{2p+2} \end{vmatrix}$$

Перемноживши ці рівности, дістанемо:

(37)
$$\begin{vmatrix} s^i_0 \, s^i_1 \dots\dots & s^i_p \\ s^i_p \, s^i_{p+1} \dots & s^i_{2p} \end{vmatrix} = (s_0)^{-2i-2p-1} \left(s^1_0\right)^{-2i-2p+1} \quad \left(s^{i-1}_0\right)^{-2p-3} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \dots\dots & s_{i+p} \\ s_1 & s_2 \dots\dots & s_{i+p+1} \\ & & . \; . \\ s_{i+p} & s_{i+p+1} \dots & s_{2i+2p} \end{vmatrix}$$

Зосібна тут можна взяти $i-1$ замісць i та 0 замісць p:

(38)
$$s^{i-1}_0 = (s_0)^{-2i+1} \left(s^1_0\right)^{-2i+3} \dots \left(s^{i-2}_0\right)^{-3} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \dots s_{i-1} \\ s_1 & s_2 \dots s_i \\ . & . \\ s_{i-1} & s_i \dots s_{2i-2} \end{vmatrix}$$

Дві останні формули показують, що вирази

$$\begin{vmatrix} s^i_0\, s^i_1 \ldots\ldots s^i_p \\ s^i_1\, s^i_2 \ldots\ldots s^i_{p+1} \\ \cdot\ \cdot \qquad\qquad \cdot\ \cdot \\ s^i_p\, s^i_{p+1} \ldots s^i_{2p} \end{vmatrix} \quad \text{та} \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \ldots s_{i-1} \\ \cdot & \cdot \qquad \cdot \\ s_{i-1} & s_i \ldots s_{2i-2} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \ldots\ldots s_{i+p+1} \\ s_1 & s_2 \ldots\ldots s_{i+p} \\ \cdot & \\ s_{i+p} & s_{i+p+1} \ldots s_{2i+2p} \end{vmatrix}$$

мають однаковий знак. Отож із умов (36) випливає, коли покласти $p = 0, 1, 2, 3, \ldots$:

$$(37) \qquad s^i_0 > 0, \qquad \begin{vmatrix} s^i_0 & s^i_1 \\ s^i_1 & s^i_2 \end{vmatrix} > 0, \qquad \begin{vmatrix} s^i_0 & s^i_1 & s^i_2 \\ s^i_1 & s^i_2 & s^i_3 \\ s^i_2 & s^i_3 & s^i_4 \end{vmatrix} > 0, \ldots$$

Звідси, в звязку з тим, що доведено в параграфі 3, висновок: ступанковий дріб

$$f_i(z) = \cfrac{s^i_0}{z - \cfrac{s^i_1}{s^i_0} - \cfrac{s^i_0 s^{i+1}_0}{z - \cfrac{s^{i+1}_1}{s^{i+1}_0} - \ldots}}$$

збігається до функції $f_i(z)$ поза колом $|z| = R$ досить великого радіюся; якийби не був значок i, за умов (36) функція $f(z)$ розкладається в збіжний ступанковий дріб так, що

$$f(z) = \cfrac{s_0}{z - \cfrac{s_1}{s_0} - \cfrac{s_0 s^1_0}{z - \cfrac{s^1_1}{s^1_0} - }}$$

поза колом $|z| = R$ досить великого радіюса.

Очевидно умови (37) рівноважні з нерівностями:

$$(38) \qquad s^i_0 > 0, \qquad s^{i+1}_0 > 0, \qquad s^{i+2}_0 > 0, \ldots$$

Але з (37) або з (38) не конче випливають нерівности (36), а умови трохи загальні:

$$\frac{\begin{vmatrix} s_0\, s_1 \ldots\ldots s_i \\ s_1\, s_2 \ldots\ldots s_{i+1} \\ \cdot \qquad\qquad \cdot \\ s_i\, s_{i+1} \ldots s_{2i} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_0\, s_1 \ldots s_{i-1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ s_{i-1} \ldots s_{2i-2} \end{vmatrix}} > 0, \qquad \frac{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \ldots\ldots s_{i+1} \\ s_1 & s_2 \ldots\ldots s_{i+2} \\ \cdot & \cdot \qquad \cdot \\ s_{i+1} & s_{i+2} \ldots s_{2i+2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \ldots s_{i-1} \\ \cdot & \qquad \cdot \\ s_{i-1} & s_i \ldots s_{2i-2} \end{vmatrix}} > 0,$$

$$\frac{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{i+2} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{i+3} \\ \cdot & & & \cdot \\ s_{i+2} & s_{i+3} & \dots & s_{2i+4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{i-1} \\ \cdot & & & \cdot \\ s_{i-1} & s_i & \dots & s_{2i-2} \end{vmatrix}} > 0, \dots,$$

що є цілком рівноважні з умовами (37).

Résumé.

Sur la convergence des certaines fractions continues

par M. Krawtchouk.

En se basant sur un critière connu de Pringsheim on peut affirmer que la fraction continue

$$\cfrac{p_1}{z + q_1 - \cfrac{p_2}{z + q_2 - \cfrac{p_3}{z + q_3 - }}} \quad ,$$

converge pour $|z| > R$, si les nombres p_i et q_i vérifient la condition suivante:

$$|p_i| + |q_i| \leqq R + 1$$

En développant la fonction

$$f(z) = \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \frac{s_2}{z^3} +$$

en fraction continue:

$$(1) \qquad \cfrac{s_0}{z - \cfrac{s_1}{s_0} - \cfrac{s_0 s_0^1}{z - \cfrac{s_1^1}{s_0^1} - \cfrac{s_0^1 s_0^2}{z - \cfrac{s_1^2}{s_0^2} - }}}$$

on peut établir que

$$f(z) = \cfrac{s_0}{z - \cfrac{s_1}{s_0} - \cfrac{s_0 s_0^1}{z - \cfrac{s_1^1}{s_0^1} - }}$$

pour $|z|$ assez grand pourvou que les nombres

$$|s_0^{i-1} s_0^i| + \left|\frac{s_1^i}{s_0^i}\right| \qquad (i = 1, 2, 3, \dots) \qquad \text{soient bornés.}$$

L'auteur démontre que cette dernière condition est remplie dans le cas

$$s_0 > 0, \qquad s_0^1 > 0, \qquad s_0^2 > 0, \ldots$$

ainsi que dans le cas plus général:

$$s_0^k > 0, \qquad s_0^{k+1} > 0, \qquad s_0^{k+2} > 0, \ldots$$

Ce dernières conditions se réduisant aux suivantes:

$$\frac{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_k \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{k+1} \\ & & & \\ s_k & & \ldots & s_{2k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{k-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_k \\ \cdot & & & \cdot \\ s_{k-1} & s_k & \ldots & s_{2k-2} \end{vmatrix}} > 0, \qquad \frac{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots\ldots & s_{k+1} \\ s_1 & s_2 & \ldots\ldots & s_{k+2} \\ & & & \\ s_{k+1} & s_{k+2} & \ldots & s_{2k+2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{k-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_k \\ \cdot & & & \cdot \\ s_{k-1} & s_k & \ldots & s_{2k-2} \end{vmatrix}} > 0,$$

$$\frac{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots\ldots & s_{k+2} \\ s_1 & s_2 & \ldots\ldots & s_{k+3} \\ \cdot & & & \\ s_{k+2} & s_{k+3} & \ldots & s_{2k+4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{k-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_k \\ \cdot & \cdot & & \\ s_{k-1} & s_k & \ldots & s_{2k-2} \end{vmatrix}} > 0,$$

on parvient de la sorte à la généralisation des inégalités connues

$$s_0 > 0, \qquad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} > 0, \qquad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} > 0, \ldots$$

suffisantes pour la convergence de la fraction conitnue (1).