Ґурґула Юрій (Рогатин).

Окремий випадок цикльоїдальних кривих. Слимаковата лінія.

У пошукуванні за такими величинами, які можнаби уживати як співрядні точок у просторі і які булиби незалежні від осий співрядних, ми опираючися на підставових працях Софуса Ліє, визнаємо їх у проміню осціляційного кола $\overline{R}$ і довжині дуги даної кривої лінії $\overline{s}$. Вони зовуться діфференційними інваріянтами.

Ми виведемо деякі підставові формули природної ґеометрії, які дають нам можність находити рівнання природні кривих ліний цикльоїдальних. Теорія ґеометрії природної є розбудована Е. Чезаром.[1])

Насамперед ми можемо уявити собі такий уклад осий співрядних, якого початок лежить на кривій лінії і постійно зміняє своє положення. При помочи теорії векторів і розважань граничних ми доходимо до формул, які дають нам звязок між співрядними природними а співрядними цего укладу осий співрядних, який завжди є у руху.

§. 1.

Умовні ріжничкові рівнання для непорушности точки на площі.

Величини: $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OO'}$, $\overrightarrow{O'P}$ є подумані у значінню векторів. (Фіґ. 1.)

Точки O і O' є дві сусідні точки одної і тої самої кривої лінії, оси x-сів і x'-сів є стичними цеї кривої; оси y-онів і y'-онів є нормальними (прямовісними) цеї кривої лінії.

[1]) E. Césare — Vorles. über natürliche Geometrie. Leipzig 1901.

Проекційне рівнання векторів на вісь $\overrightarrow{x'}$ звучить:

$$\overrightarrow{OP_{x'}} = \overrightarrow{\overrightarrow{OO'_{x'}} + \overrightarrow{O'P_{x'}}}$$

де:
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{\vec{x} + \vec{y}}$$
$$\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{\overrightarrow{\Delta x} + \overrightarrow{\Delta y}}$$
$$\overrightarrow{O'P_{x'}} = \overrightarrow{(x + dx)}$$

Ми одержимо отже:

$$x \,.\, \cos d\tau + y \,.\, \sin d\tau = \Delta x \,.\, \cos d\tau + \Delta y \,.\, \sin d\tau + x + dx$$

або:

$$\cos d\tau \,.\, (x - \Delta x) + \sin d\tau \,.\, (y - \Delta y) = x + dx$$

При помочи розважувань граничних ми одержимо:

$$\lim \cos d\tau = 1$$
$$\lim \sin d\tau = d\tau$$

Отже:
$$x - \Delta x + y \,.\, d\tau - d\tau \,.\, \Delta y = x + dx$$

$d\tau \,.\, \Delta y$ як величину другого порядку опускаємо.

$$- \Delta x + y \,.\, d\tau = dx$$

Ділимо рівнання через ds.

$$- \frac{\Delta x}{ds} + y \,.\, \frac{d\tau}{ds} = \frac{dx}{ds}, \text{ але: } ds = R \,.\, d\tau$$

$$\text{отже: } \frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{R}$$

$$\lim \frac{\Delta x}{ds} = 1.$$

Ми одержимо отже взір:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{y}{R} - 1 \tag{1}$$

Проекційне рівнання векторів на вісь $\vec{y}$-онів звучить:

$$\overrightarrow{OP_{y'}} = \overrightarrow{\overrightarrow{OO'_{y}} + \overrightarrow{O'P_{y'}}}$$

або:

$$- x \,.\, \sin d\tau + y \,.\, \cos d\tau = \Delta x \,.\, \sin d\tau + \Delta y \,.\, \cos d\tau + y + dy$$

На підставі висше сказаного про розважування граничні ми маємо:

$$- x \,.\, d\tau + y = \Delta x\, d\tau + \Delta y + y + dy.$$

$$- x \,.\, \frac{d\tau}{ds} = \frac{\Delta y}{ds} + \frac{dy}{ds}$$

але: $lim \frac{\Delta y}{ds} = 0$, а $\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{R}$

Ми одержуємо отже:

$$\frac{dy}{ds} = -\frac{x}{R} \tag{2)}$$

s = дуга кривої лінії.
R = промінь осціляційного кола.

Рівнання 1) і 2) є умовні ріжничкові рівнання для непорушности точки P на площі у випадку сукцессивної зміни укладу осий співрядних.

§. 2.

Точка R порушаєся на площі укладу осий співрядних x, y і творить нову криву лінію, якої природними співрядними є: $\overline{s}$, $\overline{R}$.

Лінія крива Γ має рівнання: $R = f(s)$, а лінія крива $\overline{\Gamma}$ має рівннання: $\overline{R} = f(\overline{s})$.

Величини: $\overrightarrow{OP'}$, $\overrightarrow{OO'}$, $\overrightarrow{O'P'}$ є подумані у значінню векторів, δy, δx є пересуненнями (Verschiebungen) точки P на площі: x—y. (Фіґ. 2.)

Рівнання проекційне на вісь векторів $\overrightarrow{x'}$ звучить:

$$\overrightarrow{\overrightarrow{OP'}_{x'} = \overrightarrow{OO'}_{x'} + \overrightarrow{O'P'}_{x'}}$$

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{\overrightarrow{(x + \delta x)} + \overrightarrow{(y + \delta y)}}$$

$$\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{\overrightarrow{\Delta x} + \overrightarrow{\Delta y}}$$

$$\overrightarrow{O'P'}_{x'} = \overrightarrow{(x + dx)}$$

Ми одержуємо отже:

$$\overrightarrow{\overrightarrow{(x + \delta x)}_{x'} + \overrightarrow{(y + \delta y)}_{x'}} = \overrightarrow{\overrightarrow{\Delta x}_{x'} + \overrightarrow{\Delta y}_{x'} + \overrightarrow{(x + dx)}}$$

або:

$$(x+\delta x) \,.\, cos\, d\tau + (y+\delta y) \,.\, sin\, d\tau = \Delta x \,.\, cos\, d\tau + \Delta y \,.\, sin\, d\tau + x + dx.$$

При помочи розважувань граничних і з поминенням величин другого порядку ми одержимо:

$$lim\; cos\, d\tau = 1, \quad lim\; sin\, d\tau = d\tau$$

$$x + \delta x + (y + \delta y) \,.\, d\tau = \Delta x + \Delta y \,.\, d\tau + x + dx$$

$\Delta y \,.\, d\tau$ опускаємо, отже:

$$\delta x + y \,.\, d\tau = \Delta x + dx$$

Ціле рівнання ділимо через ds

$$\frac{\delta x}{ds} + y \cdot \frac{d\tau}{ds} = \frac{\Delta x}{ds} + \frac{dx}{ds}$$

Але: $\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{R}$, $lim \frac{\Delta x}{ds} = 1.$

Ми одержуємо:

$$\underline{\frac{\delta x}{ds} = \frac{dx}{ds} - \frac{y}{R} + 1.} \qquad 3)$$

Подібно випроваджуємо також:

$$\overrightarrow{\overrightarrow{(x + \delta x)}_{y'} + \overrightarrow{(y + \delta y)}_{y'}} = \overrightarrow{\overrightarrow{\Delta x}_{y'} + \overrightarrow{\Delta y}_{y'} + \overrightarrow{(y + dy)}}$$

або:

$$-(x + \delta x) . sin\, d\tau + (y + \delta y) . cos\, d\tau = -\Delta x . sin\, d\tau + \Delta y . cos\, d\tau + y + dy.$$

При помочи розважувань граничних ми одержуємо:

$-\, x . d\tau + \delta y = \Delta y + dy$; ділимо ціле рівнання через ds.

$$-\, x . \frac{1}{R} + \frac{\delta y}{ds} = \frac{\Delta y}{ds} + \frac{dy}{ds};\; lim: \frac{\Delta y}{ds} = 0.$$

Отже:

$$\underline{\frac{\delta y}{ds} = \frac{dy}{ds} + \frac{x}{R}} \qquad 4)$$

Рівнання 3) і 4) є умовними ріжничковими рівнаннями для пересунень точок лінії кривої $\overline{\Gamma}$ на площі осий співрядних: $x{-}y$.

§. 3.

Відношення між кривою Γ а $\overline{\Gamma}$.

$$(d\overline{s})^2 = (\delta x)^2 + (\delta y)^2 \qquad 5)$$

Вставивши у рівнання 5) рівнання 3) і 4) одержимо:

$$d\overline{s} = ds \underbrace{\sqrt{\left(\frac{dx}{ds} - \frac{y}{R} + 1\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} + \frac{x}{R}\right)^2}}_{\varkappa}$$

або: $d\overline{s} = ds . \varkappa$

$$\overline{s} = \int \varkappa . ds \qquad 6)$$

Відношення між: R і $\overline{R}$.

З фіґ. 2) одержимо: $\vartheta + d\overline{\tau} = d\tau + \vartheta + d\vartheta$

або: $d\overline{\tau} = d\tau + d\vartheta$, — ділимо через ds

$$\frac{d\overline{\tau}}{ds} = \frac{d\tau}{ds} + \frac{d\vartheta}{ds};\ \text{але що: } ds = \frac{d\overline{s}}{\varkappa},$$

то маємо: $$\frac{d\overline{\tau}}{ds} = \frac{\varkappa}{\overline{R}},$$

отже: $$\frac{\varkappa}{\overline{R}} = \frac{1}{R} + \frac{d\vartheta}{ds} \tag{7}$$

З рівнань 6) і 7) одержуємо через елімінування з них дуги s загальне природне рівнання (explicite): $\overline{R} = f(\overline{s})$.

§. 4.

Лінії кочення (Rollkurven) у співрядних природних. (Фіґ. 3.)

Крива Γ є стала крива лінія (Basiskurve) о природних співрядних R, s, по якій котиться крива Π о природних співрядних R_λ, s_λ; точка P остає непорушною на площі кривої Π, це значить: вона не зміняє свойого положення зглядом цеї кривої лінії. В даній хвилі є точка O спільна для обох кривих ліній.

Крива лінія $\overline{\Gamma}$ є власне лінією кочення (Rollkurve) о співрядних $\overline{R}$, $\overline{s}$.

Щоби найти рівнання цеї кривої лінії у природних співрядних, ми послугуємося рівнаннями, найденими у попередних уступах.

Насамперед ми маємо умовні ріжничкові рівнання для непорушности точки P на площі кривої лінії Π; з рівнань 1) і 2) першого уступу ми одержуємо у тому випадку слідуючі умовні ріжничкові рівнання:

$$\frac{dx}{ds_\lambda} = \frac{y}{R_\lambda} - 1 \tag{8}$$

$$\frac{dy}{ds_\lambda} = -\frac{x}{R_\lambda} \tag{9}$$

Однак тому, що крива лінія Π котиться по Γ, точка P зміняє безустанно своє положення супроти цеї лінії. Ми одержимо отже умовні ріжничкові рівнання для пересунень точок лінії кривої $\overline{\Gamma}$ на площі сталої лінії Γ; з рівнань 3) і 4) другого уступу ми одержуємо у тому випадку слідуючі умовні ріжничкові рівнання:

$$\frac{\delta x}{ds} = \frac{dx}{ds} - \left(\frac{y}{-R}\right) + 1$$

$$\frac{\delta x}{ds} = \frac{dy}{ds} + \left(\frac{x}{-R}\right)$$

або увільнивши рівнання від скобок ми одержимо:

$$\frac{\delta x}{ds} = \frac{dx}{ds} + \frac{y}{R} + 1 \tag{10}$$

$$\frac{\delta y}{ds} = \frac{dy}{ds} - \frac{x}{R} \tag{11}$$

Тому, що крива лінія Π котиться по кривій Γ, мусить бути: $s = s_\lambda$, або $ds = ds_\lambda$.

Отже: $$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{ds_\lambda}; \quad \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{ds_\lambda}.$$

Тепер ми підставляємо рівнання 8) і 9) у рівнання 10) і 11); з цего слідує:

$$\frac{\delta x}{ds} = \frac{y}{R_\lambda} - 1 + \frac{y}{R} + 1$$

або: $$\frac{\delta x}{ds} = y\left(\frac{1}{R_\lambda} + \frac{1}{R}\right) = \frac{y}{Q} \tag{12}$$

$$\frac{\delta y}{ds} = -\frac{x}{R_\lambda} - \frac{x}{R}$$

або: $$\frac{\delta y}{ds} = -x\left(\frac{1}{R_\lambda} + \frac{1}{R}\right) = -\frac{x}{Q} \tag{13}$$

бо: $$\frac{1}{R_\lambda} + \frac{1}{R} = \frac{1}{Q} \tag{14}$$

Як бачимо, то крива лінія $\overline{\Gamma}$ повстає кінетичною дорогою; вона є образом руху точки P на площі кривої Γ.

З рівнань 12) і 13) одержуємо:

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= ds \cdot \frac{y}{Q} && 12' \\ \delta y &= -ds \cdot \frac{x}{Q} && 13' \end{aligned}\right\}$$

З ріжничкової ґеометрії беремо взір:

$$(d\bar{s})^2 = (\delta y)^2 + (\delta x)^2 = (ds)^2\left\{\left(\frac{y}{Q}\right)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2\right\}$$

$$(d\bar{s})^2 = \left(\frac{ds}{Q}\right)^2 \cdot (x^2 + y^2)$$

або: $$d\bar{s} = \frac{ds}{Q}\,\varrho$$ гляди фіґ 3.

З цего одержуємо інтеґрал:

$$\bar{s} = \int \frac{\varrho}{Q} \cdot ds \tag{15}$$

де сочинник: $\varkappa = \frac{\varrho}{Q}$.

Відношення між R і $\bar{R}$.

$$\Theta = \vartheta - \frac{\pi}{2}; \quad \text{отже: } d\Theta = d\vartheta.$$

$$\frac{d\vartheta}{ds} = -\frac{1}{R_\lambda} + \frac{\sin\Theta}{\varrho} \tag{16}$$

рівнання знане з природної ґеометрії. Рівнання 16) є умовне ріжничкове рівнання для непорушности точки P на площі кривої лінії Π.

На підставі рівнання 7) маємо:

$$\frac{\varkappa}{\bar{R}} = \frac{1}{R} - \frac{d\vartheta}{ds} \tag{17}$$

Вставивши у рівнання 17) з рівнання 16) вираз за $\frac{d\vartheta}{ds}$ ми одержимо:

$$\frac{\varkappa}{\bar{R}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_\lambda} - \frac{\sin\Theta}{\varrho} = \frac{1}{Q} - \frac{\sin\Theta}{\varrho} \tag{18}$$

Тому, що $\varkappa = \frac{\varrho}{Q}$, $\varrho = \varkappa \, . \, Q$, ми можемо рівнання 18) написати також у слідуючій формі:

$$\frac{1}{\bar{R}} = \frac{1}{\varrho} - \frac{Q \, . \sin\Theta}{\varrho^2} \tag{18'}$$

Рівнання 15) і 18') є параметричні рівнання ліній кочення у загальному виді.

§. 5.

Тепер ми займемося лініями кривими, які носять назву епіцикльоїдальних; з них візьмемо під увагу цю ґрупу ліній епіцикльоїдальних, які повстають тоді, коли криві лінії Γ і Π є колами о ріжних промінях: $R_\lambda = r$, $R = R$. Точку P приймаємо на обводі кола Π. (Фіґ. 4.)

Точка M є своєчасно точкою стичности обох кіл, ω = кут кочення.

З рисунку бачимо, що $\widehat{MP} = \widehat{MP_0} = \sigma$, а $\sigma = 2r\Theta = R \, . \, \omega$.

Ми покористуємося формулами попередного уступу; і так маємо: $d\bar{s} = \varkappa \, . \, ds = \frac{\varrho}{Q} \, . \, ds$, де вираз за Q одержимо з рівнання 14), а radius vector ϱ виражуємо сінусом кута Θ.

І так:

$$Q = \frac{R \, . \, r}{R + r} \qquad 19)$$

$$\varrho = 2r \, . \, sin\, \Theta \qquad 20)$$

$$ds = \varkappa \, . \, d\sigma \qquad 21)$$

Але: $\sigma = 2r \;\; \Theta$, $d\sigma = 2r \, . \, d\Theta$, $\varkappa = \frac{\varrho}{Q}$. Вставивши повисші вирази у рівнання 21), ми одержимо:

$$d\bar{s} = \frac{4r(R+r)}{R} \, . \, sin\, \Theta \, . \, d\Theta \qquad 22)$$

або: $$d\bar{s} = a \, . \, sin\, \Theta \, . \, d\Theta \qquad 22')$$

рівнання, у якому $a = \frac{4r \, . \, (R+r)}{R}$ є величиною знаною.

Ми беремо тепер під увагу рівнання 18')

$$\frac{1}{\bar{R}} = \frac{1}{\varrho} - \frac{Q \, . \, sin\, \Theta}{\varrho^2},$$

яке пишемо у слідуючій формі:

$$\frac{1}{\bar{R}} = \frac{\varrho - Q \, . \, sin\, \Theta}{\varrho^2} \qquad 18'')$$

Підставивши у рівнання 18'') вирази з рівнань 19) і 20), ми одержимо:

$$\bar{R} = \frac{4r\,(R + r)}{R + 2r} \quad sin\, \Theta \qquad 23)$$

або: $$\bar{R} = b \, . \, sin\, \Theta \qquad 23')$$

рівнання, у якому: $b = \frac{4r\,(R + r)}{R + 2r}$ є величиною знаною.

Ріжничкове рівнання 22') дає нам по інтеґрованню слідуюче рівнання:

$$\bar{s} = a \, . \, cos\, \Theta + c \qquad 24)$$

Рівнання 23') і 24) є параметричними рівнаннями лінії епіцикльоїдальної $\bar{\Gamma}$.

Поділивши рівнання 23') через b, а рівнання 24) через a, ми одержимо:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\bar{s} - c}{a} &= cos\, \Theta \\ \frac{\bar{R}}{b} &= sin\, \Theta \, . \end{aligned}\right\} \qquad 25)$$

Степенуючи оба рівнання і додавши їх до себе, ми одержимо слідуюче альґебраічне рівнання епіцикльоїдальної $\bar{\Gamma}$ у природних співрядних:

$$\frac{(\bar{s}-c)^2}{a^2} + \frac{\bar{R}^2}{b^2} = 1 \tag{26}$$

З рівнань 25) і 26) ми доходимо до слідуючих заключень; по перше ми зауважуємо, що для $\Theta = 0$, $\bar{R} = 0$, ми маємо для дуги $\bar{s}$ Minimum:

$$\bar{s} = a + c$$

а для: $\Theta = \frac{\pi}{2}$, $\bar{R} = b$, ми одержуємо $\bar{s} = c$ (maximum).

Рахуючи дугу епіцикльоїдальної від її вершка (Scheitel), де $\Theta = \frac{\pi}{2}$, $\bar{s} = c = 0$, ми одержимо слідуюче рівнання цеї кривої лінії:

$$\frac{\bar{s}^2}{a^2} + \frac{\bar{R}^2}{b^2} = 1 \tag{26'}$$

Як бачимо рівнання 26') є схоже з рівнанням еліпси у співрядних Декарта.

Для $\Theta = 0$, $\varrho = 0$, $\bar{R} = 0$ ми маємо острину (Spitze). Рахуючи дугу епіцикльоїдальної від цеї острини ми маємо: $\bar{s} = a + c = 0$, отже: $c = -a$; тоді рівнання епіцикльоїдальної одержує такий вид:

$$\frac{(\bar{s}+a)^2}{a^2} + \frac{\bar{R}^2}{b^2} = 1 \tag{26''}$$

Не вдаючися у дальшу дискусію ліній кривих епіцикльоїдальних, яка у свойому дальшому перебігу має свій окремий інтерес і не входить у обсяг цеї праці, — ми задержимося ще лиш на відношенню між слідуючими величинами: radius-vector-ом $= \varrho$, та промінями осціляцийних кіл: R і $\bar{R}$.

Ми маємо: $\varrho = 2r \, . \sin\Theta$

$$\bar{R} = b \, . \sin\Theta = \frac{4r(R+r)}{R+2r} \sin\Theta$$

або:

$$\bar{R} = \frac{2(R+r)}{R+2r} \quad \varrho = \mu \, . \varrho \tag{27}$$

де:

$$\mu = \frac{2(R+r)}{R+2r} \tag{28}$$

Рівнання 27) ми напишемо у іншій формі:

$$\bar{R} = \frac{2\left(1+\frac{r}{R}\right)}{1+2\frac{r}{R}} \varrho \qquad 27')$$

На підставі повищих рівнань ми одержимо слідуючі вартости:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{для: } R = \infty, & \text{ми маємо: } & \mu = 2,\ \bar{R} = 2\varrho \\ R = r, & & \mu = \frac{4}{3},\ \bar{R} = 1{\cdot}25 . \varrho \\ R = 0, \text{ або } r = \infty, & \text{„} \quad \text{„} & \mu = 1,\ \bar{R} = \varrho \end{array}\right\} \qquad 28)$$

Загально ми бачимо, що: $\bar{R} > \varrho$.

Для кута $\bar{\tau}$ ми маємо рівнання:

$$d\bar{s} = \bar{R} \ \ d\bar{\tau} \qquad 29)$$

або:

$$d\bar{\tau} = \frac{d\bar{s}}{\bar{R}} \qquad 30)$$

Для ліній епіцикльоїдальних ми одержимо:

$$\bar{\tau} = \int \frac{d\bar{s}}{\bar{R}} = \int \frac{a \,.\, sin\,\Theta \,.\, d\Theta'}{b \,.\, sin\,\Theta} = \frac{a}{b} \int d\Theta \qquad 31)$$

рахуючи дугу епіцикльоїдальної від її вершка (Scheitel).

Отже: $\bar{\tau}' = \frac{a}{b} . \Theta + c_1$

або:

$$\bar{\tau} = \frac{R+2r}{R} . \Theta + c_1 \qquad 32)$$

§. 6.

Окремі випадки епіцикльоїдальних кривих.

Ми візьмемо під увагу три випадки, яким підлягають лінії епіцикльоїдальні:

випадок A) для: $R_\lambda = r = \infty$ — евольвента кола
„ B) „ $R = \infty$ — цикльоїда
„ C) „ $R = 0$.

Що до випадку C), то ми тут можемо відріжнити дві можливости; їх розгляд буде переведений у слідуючім уступі.

Випадок A). Коло о проміни $R_\lambda = r$ переходить у лінію пряму. Перекочуючи цю пряму по сталім колі Γ (фіґ. 4) ми одержимо очевидно евольвенту цего кола.

Рівнання 26'') ми пишемо в експліцитовій формі; ми дістанемо отже:

$$\bar{R}^2 = -2\frac{b^2}{a}.\bar{s} - \frac{b^2}{a^2}\ \bar{s}^2.$$

для: $lim\, r = \infty$, ми маємо:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{r \to \infty} \frac{b^2}{a} &= \frac{4\left(\frac{R}{r}+1\right).R}{\left(\frac{R}{r}+2\right)^2} = R \\ \lim_{r \to \infty} \frac{b}{a} &= \frac{\frac{R}{r}}{\frac{R}{r}+2} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad 34)$$

Узглянднивши формули 34) ми дістанемо природне рівнання евольвенти кола як слідує:

$$\underline{\bar{R}^2 = 2R.\bar{s}} \qquad 35)$$

Очевидно, що $\bar{R} = \varrho$ гл. рівнання 28).

Випадок В). Коло стале Γ о проміню $= R$ переходить у лінію пряму. Коло Π котиться тоді по цій прямій і точка P на обводі цего кола творить криву лінію, знаною в літературі під назвою цикльоїди.

Покористуючися взорами з попереднього уступу ми одержимо для $R = \infty$:

$$R = 2\varrho \qquad \text{з рівнання 28)}$$

$$a = \frac{4r\left(1+\frac{r}{R}\right)}{1+2\frac{r}{R}} = 4r$$

$$b = 4r\left(1+\frac{r}{R}\right) = 4r$$

Отже: $a = b = 4r$.

Підставивши вартости за a і b у рівнання 23) і 24) ми дістанемо:

$$\left.\begin{aligned} \bar{R} &= 4r.\sin\Theta \\ \bar{s} &= 4r.\cos\Theta \end{aligned}\right\} \qquad 36)$$

рахуючи дугу цикльоїди від її вершка (Scheitel).

З рівнань 36) ми випроваджуємо легко природне альґебраічне рівнання цикльоїди:

$$\bar{R}^2 + \bar{s}^2 = 16r^2 \qquad 37)$$

Як бачимо, рівнання 37) є схоже з рівнанням кола у співрядних Декарта.

$$\bar{\tau} = \frac{a}{b} \quad \Theta + c_1 = \Theta + \frac{\pi}{2} \tag{38}$$

бо для $\Theta = 0$, $c_1 = \frac{\pi}{2}$.

§. 7.

Тепер ми беремо під увагу випадок, що $R = 0$, це значить, що промінь кола сталого (des ruhenden Kreises) Γ стремить до зера і це коло переходить у точку. (Фіґ. 4.)

Цей випадок становить власне головний предмет нашої праці.

Перш за всего, оперуючи формулами, взятими із загального трактату про лінії епіцикльоїдальні, ми доходимо до висліду, що у тому випадку лінія епіцикльоїдальна не істнує, або інакше дефінюючи, вона переходить у точку (фіґ. 5).

Бо дійсно, у тому випадку коло стале Γ (фіґ. 4) переходить для $R \doteq 0$ у точку M. Приймивши отже початок дуги епіцикльоїдальної у точці M на обводі рухомого кола Π ми з фіґ. 5 бачимо, що при обороті цего кола довкруги точки M принята точка залишуєся все на одному і тому самому місці, це значить, що образом нашої кривої лінії є власне ця точка M.

Осередок рухомого кола Π робить дорогу по обводі кола, якого осередком є точка M, а промінем промінь рухомого кола $\Pi = r$.

На підставі рівнань 28) мусить бути для $R = 0$, $\mu = 1$, $\bar{R} = \varrho$. У тому випадку $\bar{R} = 0$, $\varrho = 0$.

На основі формули: $R \,.\, \omega = 2r\Theta$ ми мусимо прийти до висліду, що коли промінь сталого кола $\Gamma = R$ є рівний зеру, то також і кут Θ мусить зовсім зникнути; з цего слідує, що і $\sin\Theta = 0$, а також $\bar{R} = b \,.\, \sin\Theta = 0$ (23'), $a : \bar{s} = a \quad \cos\Theta = \infty$ (24); також: $\varrho = 2r \,.\, \sin\Theta$ (20) мусить бути рівний зеру.

Для: $R = 0$ $a = \infty$, бо:

$$\lim_{R \to 0} a = \lim_{R \to 0} \frac{4r(R+r)}{R} = \infty;$$

$$\bar{\tau} = \int \frac{d\bar{s}}{\bar{R}} = \frac{a}{b}\Theta + c_1 \qquad \text{гл. рівнання 31), 32)}$$

а що: $d\bar{s} = a \,.\, \sin\Theta \,.\, d\Theta$ 22'), то для $R = 0$, $a = \infty$, $\sin\Theta = 0$, $\bar{R} = 0$, $c_1 = 0$, $b = 0$, отже: $\bar{\tau} = \infty \,.\, 0$ неозначена форма.

На основі повисше сказаного ми приходимо до слідуючого твердження:

Коли промінь R сталого кола Γ стремить до зера, то — принявши за початок дуги кривої лінії точку M, яку уважаємо образом здеґенерованого кола Γ, — то тоді образом цеї кривої лінії є власне ця точка M.

Однак у тому випадку, коли ми за початок кривої лінії оберемо іншу точку на обводі кола Π відмінну від точки M, то тоді образом псевдоепіциклькоїдальної лінії буде коло о проміни: $\bar{R} = \varrho$. (Фіґ. 6.)

Бо дійсно, коли обертатимемо коло Π довкруги точки M, то тоді точка P_0, обрана нами за початок дуги нашої кривої лінії $\bar{\Gamma}$, є завжди однаково віддалена від точки M.

На основі рівнань 28) ми дістанемо для $R = 0$ такі вартости:

$$\mu = \frac{2(R+r)}{R+2r} = 1; \quad \bar{R} = \varrho.$$

З цего слідує, що коли у випадку $R = 0$ ми зачнемо рахувати лінію епіциклькоїдальну від кождої іншої точки на обводі кола Π, яка не накривається з точкою M цего самого кола, то лінія псевдо-епіциклькоїдальна $\bar{\Gamma}$, яку одержимо, є колом о проміни рівнім ϱ, а тим самим рівнім $\bar{R}$, як проміневи цего самого осціляційного кола.

§. 8.

Зовсім інакше однак представляється справа тоді, коли приймемо, що коло Π о проміни $= r$ обертається само у собі, це значить, коли приймемо, що кожда точка цего кола виконує рух довкола його осередка. У випадку, коли цей осередок займає на площі $x - y$ все однакове положення, а точка M лежить на тім колі, ми очевидно одержимо рівнання власне цего самого кола.

До цего висліду ми можемо рахунком дійти теж в цей спосіб:

Ми уявляємо собі загально, що коло Π не лише котиться на підставовім колі Γ, але заразом обертається „само у собі“, це значить, що кожда точка цего кола виконує два рухи: один рух, це рух оборотовий довкруги осередка цего кола, а другий рух, це рух кочення (rollende Bewegung). (Фіґ. 7.)

Ми означуємо s_λ дугу кола Π, яка є вислідом руху кочення (roll. Bew.), а σ дугу цего самого кола, яку отримуємо в наслідок руху оборотового „самого у собі“. Підставове коло означуємо буквою Γ, рухоме коло буквою Π, а нову вислідну лінію руху оборотового і руху кочення буквою $\bar{\Gamma}$. (Фіґ. 7.)

На підставі повисше сказаного ми отримаємо отже:

$$\left.\begin{aligned} s &= s_\lambda \\ s' &= s_\lambda + \sigma \end{aligned}\right\} \qquad 39)$$

Точка $P(x, y)$ є нерозлучно звязана з колом Π, отже мусить бути:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{ds'} &= \frac{y}{R_\lambda} - 1 \\ \frac{dy}{ds'} &= -\frac{x}{R_\lambda} \end{aligned}\right\} \qquad 40)$$

Рівнання 40) є тотожні з рівнаннями 1) і 2) першого уступу.

Але: $$ds' = ds_\lambda + d\sigma = ds + d\sigma \qquad 41)$$

З цего слідує: $$\left.\begin{aligned} dx &= \left(\frac{y}{R_\lambda} - 1\right) \quad (ds + d\sigma) \\ dy &= -\frac{x}{R_\lambda} \, . (ds + d\sigma) \end{aligned}\right\} \qquad 42)$$

Але супроти кола Γ точка P зміняє постійно своє положення; в тому випадку ми покористуємося умовними ріжничковими рівнаннями 3), 4) другого уступу для пересунень точок кривої лінії $\bar{\Gamma}$ на площі кола Γ.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta x}{ds} &= \frac{dx}{ds} + \left(\frac{y}{R} + 1\right) \\ \frac{\delta y}{ds} &= \frac{dy}{ds} - \frac{x}{R} \end{aligned}\right\} \text{ гл. рівн. 10), 11)} \qquad 43)$$

Або: $$\left.\begin{aligned} \delta x &= dx + \left(\frac{y}{R} + 1\right) \quad ds \\ \delta y &= dy - \frac{x}{R} \quad ds \end{aligned}\right\} \qquad 44)$$

Покористуючися рівнаннями 42) ми одержимо:

$$\delta x = y\left(\frac{1}{R_\lambda} + \frac{1}{R}\right) . ds + \left(\frac{y}{R_\lambda} - 1\right) . d\sigma$$

або: $$\delta x = \frac{y}{Q} \, . \, ds + \left(\frac{y}{R_\lambda} - 1\right) \quad d\sigma \qquad 45)$$

Анальоґічно маємо:

$$\delta y = -\frac{x}{Q} \quad ds - \frac{x}{R_\lambda} \quad d\sigma \tag{46}$$

де: $Q = \frac{R \cdot r}{R + r}$; для: $R = o$, також: $Q = o$.

У відсутности руху кочення, це є для $R = o$, ми маємо до діла тоді лише з рухом оборотовим; отже: $s_\lambda = s = o$; в тому випадку рівнання 45) і 46) одержують слідуючий вид:

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= \left(\frac{y}{R_\lambda} - 1\right) \quad d\sigma \\ \delta y &= -\frac{x}{R_\lambda} \quad d\sigma \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

В тому випадку отже осередок кола Π займає на площі x—y все однакове положення. Як сказано, вислідною руху оборотового мусить бути коло. Принявши точку P на обводі кола Π, ми дістанемо як вислідну руху оборотового цеї точки це саме коло Π.

На підставі рівнання 5) третого уступу ми маємо:

$$(d\overline{s})^2 = (\delta x)^2 + \delta y)^2 = (d\sigma)^2 \left[\left(\frac{y}{R_\lambda} - 1\right)^2 + \frac{x^2}{R_\lambda{}^2}\right] \tag{48}$$

Ми одержимо отже:

$$\overline{s} = \int \frac{d\sigma}{R_\lambda} \sqrt{\varrho^2 - 2 R_\lambda . y + R_\lambda{}^2} \tag{49}$$

бо: $\varrho^2 = x^2 + y^2$.

Принявши точку P на обводі кола Π ми маємо:
$R_\lambda = r$, $\varrho = 2r \quad sin\,\Theta$, $y = \varrho \quad sin\,\Theta = 2r \quad sin^2\,\Theta$ (гл. фіґ. 8).

Вставивши повисші вартости у рівнання 49), ми одержимо:

$$\overline{s} = \int \frac{d\sigma}{r} \sqrt{4r^2 \quad sin^2\,\Theta - 2r \,.\, 2r \,.\, sin^2\,\Theta + r^2} = \int d\sigma \tag{50}$$

для: $\sigma = 2r\,\Theta$, $d\sigma = 2r \quad d\,\Theta$

тоді: $$\overline{s} = 2r \int d\,\Theta = 2r\,\Theta + C \tag{51}$$

Рівнання 51) власне і є рівнанням кола Π у співрядних природних. (Фіґ. 8.)

У параметричнім представленню маємо два рівнання кола:

$$y = 2r \quad sin^2\Theta$$
$$x = r \,.\, sin\,2\Theta$$
$$x^2 + y^2 = \varrho^2 = 4r^2 \,.\, sin^2\Theta.$$

§. 9.

В уступі семім ми показали, що у випадку $R = O$, коло Π обертаєся довкруги точки M (фіґ. 5 і 6) і точка P_0 на обводі цего кола творить нове коло $\overline{\Gamma}$ о проміню $= \varrho$; у випадку, коли P_0 накриваєся з точкою M, коло $\overline{\Gamma}$ переходить у тую саму точку M.

Тепер ми приймемо, що не лише коло Π обертаєся довкруги точки M, але і точка P_0 обертаєся довкруги осередка цего кола Π (фіґ. 9). Іншими словами, коло Π обертаєся „само у собі", це є: точка P_0 обертаєся довкруги осередка цего кола з такою самою скоростю, що пряма MO' довкруги точки M. Це значить, що кут обороту ω є для кождого положення цего кола рівний кутови осередочному кола Γ' о проміни $= r$, по обводі якого порушаєся осередок оборотового кола. Цей осередочний кут числимо від додатного напряму оси y-онів підставового укладу осий співрядних $x-y$.

Навязуючи до попередних розважувань в уступах першім і другім цеї праці, ми беремо насамперед під увагу два уклади осий співрядних; один із них, означений римською цифрою (I), це кождочасний уклад осий співрядних, якого початок лежить у точці O'. Початок другого укладу осий співрядних лежить у точці M, а вісь y-онів є для обох системів спільною. Супроти кола Γ' точка P постійно зміняє своє положення на площі. Покористуючися отже укладом (I), ми дістанемо слідуючі умовні ріжничкові рівнання (з рівнань 3 і 4 другого уступу):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta x}{ds} &= \frac{dx}{ds} - \frac{y_1}{R} + 1 \\ \frac{\delta y}{ds} &= \frac{dy}{ds} - \frac{x_1}{R} \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

δx, δy — є пересуненнями точки P на площі $x' - y'$.

Точка P лежить на обводі кола Π, отже ми одержимо для непорушности цеї точки на площі названого кола слідуючі умовні ріжничкові рівнання:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{y_2}{R} - 1 \\ \frac{dy}{ds} &= -\frac{x_2}{R} \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Рівнання 53) одержуємо з рівнань 1) і 2) першого уступу. x_2, y_2 — належать до укладу осий співрядних, означеного римською цифрою (II).

А що: $R = r$, то з фіґ. 9 одержуємо:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= r\left(1 - 2 \,.\, sin^2 \frac{\varphi}{3}\right) \\ y_2 &= 2r \,.\, sin^2 \frac{\varphi}{3} \\ x_1 &= r \,.\, cos\left(90 - \frac{2\varphi}{3}\right) = r \,.\, sin\ \frac{2\varphi}{3} \\ x_2 &= 2r \,.\, sin \frac{\varphi}{3} \,.\, cos \frac{\varphi}{3} = r \,.\, sin\ \frac{2\varphi}{3} \end{aligned}\right\} \qquad 54)$$

Отже: $x_1 = x_2 = r \,.\, sin\ \dfrac{2\varphi}{3}$;

Вставивши рівнання 53) у рівнанне 52), одержимо:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta x}{ds} &= \frac{y_2}{R} - 1 - \frac{y_1}{R} + 1 = \frac{1}{r}\,(y_2 - y_1) \\ \frac{\delta y}{ds} &= -\ \frac{2x}{r} \end{aligned}\right\} \qquad 55)$$

Вставивши рівнання 54) у рівнання 55), дістанемо:

$$y_2 - y_1 = 2r \,.\, sin^2 \frac{\varphi}{3} - r + 2r \,.\, sin^2 \frac{\varphi}{3}$$

Отже:
$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta x}{ds} &= 4\, sin^2 \frac{\varphi}{3} - 1 \\ \frac{\delta y}{ds} &= -\ 2\, sin\, \frac{2\varphi}{3} = -\ 4 \,.\, sin \frac{\varphi}{3} \,.\, cos\ \frac{\varphi}{3} \end{aligned}\right\} \qquad 56)$$

Для елементу дуги нової кривої лінії, яку в описаний висше спосіб одержано, маємо слідуючий вираз із ріжничкової ґеометрії (гл. рівн. 5 з третого уступу):

$$d\bar{s} = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2} \qquad 57)$$

З рівнань 56) маємо:

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= (4\, sin^2 \frac{\varphi}{3} - 1) \,.\, ds \\ \delta y &= -\,4 \,.\, sin\ \frac{\varphi}{3} \,.cos\ \frac{\varphi}{3} \,.\, ds \end{aligned}\right\} \qquad 56')$$

з фіґ. 9 відчитуємо: $s = r \,.\, \omega = r\ \dfrac{2\varphi}{3}$ 58)

З цего слідує: $(\delta x)^2 + (\delta y)^2 = 16 \,.\, sin^4 \left(\frac{\varphi}{3}\right) - 8\ \ sin^2 \left(\frac{\varphi}{3}\right) + 1 +$
$$+\ 16\, sin^2 \left(\frac{\varphi}{3}\right)\ \left[1 - sin^2 \left(\frac{\varphi}{3}\right)\right]$$

або: $(\delta x)^2 + (\delta y)^2 = 8 \,.\, sin^2 \left(\frac{\varphi}{3}\right) + 1$ 59)

59) вставляємо у 57):

$$d\bar{s} = \sqrt{8 \quad sin^2 \left(\frac{\varphi}{3}\right) + 1} \quad \frac{2r}{3} \quad d\varphi$$

Отже: $\bar{s} = \frac{2r}{3} \int \sqrt{8 \,.\, sin^2 \left(\frac{\varphi}{3}\right) + 1} \,.\, d\varphi$ 60)

Рівнання 60) є параметричне рівнання для дуги $\bar{s}$ нової кривої лінії, яку в цей спосіб одержуємо і яку з огляду на її форму і подібність до Паскалевої лінії назвемо лінією слимаковатою.

§. 10.

Конструкція і дискусія слимаковатої лінії у співрядних Декарта (фіґ. 10).

З фіґ. 9 дістаємо слідуючі відношення:

$$\varphi = \frac{3}{2}\omega, \text{ або: } \frac{\varphi}{3} = \frac{\omega}{2}$$

Полярне рівнання (Polargleichung) слимаковатої лінії звучить:

$$\varrho = 2r \,.\, sin \frac{\varphi}{3} \qquad 61)$$

В параметричнім представленню маємо:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varrho \quad cos\,\varphi \\ y &= \varrho \quad sin\,\varphi \\ \text{також:} \quad x^2 + y^2 &= \varrho^2 = 4r^2 \quad sin^2 \left(\frac{\varphi}{3}\right) \end{aligned}\right\} \qquad 62)$$

$$\text{або:} \quad \left.\begin{aligned} x &= 2r \quad sin \frac{\varphi}{3} \quad cos\,\varphi \\ y &= 2r \quad sin \frac{\varphi}{3} \quad sin\,\varphi \end{aligned}\right| \qquad 62')$$

Конструкція слимаковатої лінії.

До конструкції слимаковатої лінії ми послугуємося полярними рівнаннями: $\varrho = 2r \,.\, sin \frac{\varphi}{3}$, або: $\varrho = 2r \,.\, sin \frac{\omega}{2}$; ми кладемо $r = 1$ і шукаємо для ріжних вартостий за „ω“ відповідних „radius-vector“-ів $= \varrho$. В цей спосіб ми можемо уложити на примір таку табличку для $r = 1$. $\varrho = 2 \,.\, sin \frac{\omega}{2}$, $\varphi = \omega + \frac{\omega}{2}$;

для:	$\omega_1 = 30^0$,	$\varphi_1 = 45^0$,	$\varrho_1 = 0{\cdot}50764$,
	$\omega_2 = 60^0$,	$\varphi_2 = 90^0$,	$\varrho_2 = 1$,
	$\omega_3 = 90^0$,	$\varphi_3 = 135^0$,	$\varrho_3 = 1{\cdot}41422$,
	$\omega_4 = 120^0$,	$\varphi_4 = 180^0$,	$\varrho_4 = 1{\cdot}73206$,
	$\omega_5 = 150^0$,	$\varphi_5 = 225^0$,	$\varrho_5 = 1{\cdot}93186$,
	$\omega_6 = 180^0$,	$\varphi_6 = 270^0$,	$\varrho_6 = 2$,

від $\omega_6 = 180^0$ до $\omega = 360^0$ іде слимаковата лінія симетрально. (У фіґ. 10 ми узяли $r = 2{\cdot}5$ cm.)

Дискусія слимаковатої лінії:

Ми беремо під увагу рівнання 62).

$$\left.\begin{aligned} dx &= -\varrho \,.\, sin\,\varphi \,.\, d\varphi + cos\,\varphi \,.\, d\varrho \,.\, d\varphi \\ dy &= \varrho \,.\, cos\,\varphi \,.\, d\varphi + sin\,\varphi \,.\, d\varrho \,.\, d\varphi \end{aligned}\right\} \qquad 63)$$

Отже: $$\left. y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\varrho \,.\, cos\,\varphi + sin\,\varphi \,.\, d\varrho}{cos\,\varphi \,.\, d\varrho - \varrho \,.\, sin\,\varphi} \right\} \qquad 64)$$

Але: $\varrho = 2r \,.\, sin\,\frac{\varphi}{3}$, $d\varrho = \frac{2}{3} \,.\, r \,.\, cos\frac{\varphi}{3} \,.\, d\varphi = \frac{\varrho}{3} \,.\, ctg\,\frac{\varphi}{3}\quad d\varphi$

З цего слідує: $$y' = \frac{\varrho \quad cos\,\varphi + sin\,\varphi \quad \frac{1}{3} \quad \varrho \quad ctg\,\frac{\varphi}{3}}{cos\,\varphi \quad \frac{1}{3} \quad \varrho \quad ctg\,\frac{\varphi}{3} - \varrho \quad sin\,\varphi}$$

або: $$y' = \frac{3 \quad cos\,\varphi \quad sin\,\frac{\varphi}{3} + sin\,\varphi \,.\, cos\,\frac{\varphi}{3}}{cos\,\varphi \quad cos\,\frac{\varphi}{3} - 3 \,.\, sin\,\varphi \,.\, sin\,\frac{\varphi}{3}} \qquad 65)$$

a) Maxima і Minima.

Для $y' = 0$ маємо: $$y' = \frac{3 + tg\,\varphi \,.\, cotg\,\frac{\varphi}{3}}{cotg\,\frac{\varphi}{3} - 3 \,.\, tg\,\varphi} \qquad 65')$$

Отже мусить бути: $$3 + tg\,\varphi \,.\, cotg\,\frac{\varphi}{3} = 0$$

або: $$3 \,.\, tg\,\frac{\varphi}{3} + tg\,\varphi = 0$$

$$tg\,\varphi = \frac{3 \quad tg\,\frac{\varphi}{3} - tg^3\left(\frac{\varphi}{3}\right)}{1 - 3 \quad tg^2\left(\frac{\varphi}{3}\right)}$$

З цего слідує: $$3 \,.\, tg\frac{\varphi}{3} = \frac{tg^3\left(\frac{\varphi}{3}\right) - 3 \,.\, tg\left(\frac{\varphi}{3}\right)}{1 - 3 \,.\, tg^2\left(\frac{\varphi}{3}\right)}$$

$$3 - 9 \quad tg^2\left(\frac{\varphi}{3}\right) = tg^2\left(\frac{\varphi}{3}\right) - 3$$

Отже: $$tg\frac{\varphi}{3} = \pm \sqrt{\frac{3}{5}} = \pm\, 0{\cdot}7746 = tg\left(\pi - \frac{\varphi}{3}\right)$$

$$\varphi_1 = 113^0\ 17'\ 04{\cdot}5''$$
$$\varphi_2 = \ 66^0\ 42'\ 55{\cdot}5''$$

Слимаковата лінія має отже два maxim-a, де $y' = 0$, $tg\bar{\tau} = 0$; ці дві точки мають супроти оси y-онів симетральне положення.

Але: $y' = 0$ також тоді, коли у формулі 65) чисельник є рівний зеру.

Отже: $$3 \,.\, cos\,\varphi \,.\, sin\,\frac{\varphi}{3} + sin\,\varphi \,.\, cos\,\frac{\varphi}{3} = 0$$

оба члени цего рівнання мусять бути рівні зеру; це стаєся тоді, коли $\varphi = 270^0$, бо дійсно, $cos\ 270^0 = 0$,

$$cos\,\frac{270}{3} = 0,$$
$$sin\,\frac{270}{3} = 1,$$
$$sin\ 270^0 = -1.$$

Для $\varphi = 270^0$, ордината y осягає своє minimum; ми маємо:

$$y = 2r \quad sin\,\frac{\varphi}{3} \quad sin\,\varphi$$

для: $\varphi = 270^0$, $y = y_{min} = -2r$

$\varphi = 90^0$, $y = r = \varrho$ гл. формули: 61, 62'.

$y' = 0$ також для: $\varphi = 0$ і для $\varphi = 540^0$, це значить, що у точці M вісь x-сів є стичною кривої лінії (дві стичні накриваються).

Ми ще завважуємо, що для: $\varphi = 90^0$, $tg\bar{\tau} = y' = -\frac{\sqrt{3}}{3}$,

а для: $\varphi = 450^0$, $tg\bar{\tau} = +\frac{\sqrt{3}}{3}$, отже: $\bar{\tau} = 30^0$, згл.: $\bar{\tau} = 150^0$.

Точка P_2 є подвійною точкою (Doppelpunkt) і крива лінія має в тій точці дві стичні.

Слимаковата лінія має 4 особливі точки, для яких: $y' = tg\bar{\tau} = \infty$, це є такі точки, у яких стичні ідуть рівнобіжно до оси y-онів.

З рівнання 65') одержуємо:

$$\cot g \frac{\varphi}{3} - 3 \quad tg\,\varphi = 0$$

або: $$tg^4\left(\frac{\varphi}{3}\right) - 4 \quad tg^2\left(\frac{\varphi}{3}\right) + \frac{1}{3} = 0 \qquad 66)$$

Рівнання 66) є рівнанням 4-ої степени.

З цего слідує: $$tg\frac{\varphi}{3} = \pm\sqrt{2 \pm \sqrt{\frac{11}{3}}} \qquad 67)$$

β) Промінь осціляційного кола слимаковатої лінії.

I. Особливий випадок: $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Покористуємося формулами 61) і 62)

$$\left.\begin{aligned} x &= \varrho \quad \cos\varphi \\ y &= \varrho \quad \sin\varphi \end{aligned}\right\} \qquad 62)$$

$$\varrho = 2r \quad \sin\frac{\varphi}{3} \qquad 61)$$

$$dx = -\varrho\,.\sin\varphi\,.\,d\,\varphi + \cos\varphi\,.\,d\,\varrho$$
$$dy = \varrho\,.\cos\varphi\,.\,d\varphi + \sin\varphi\,.\,d\varrho$$
$$d\,\varrho = \frac{2r}{3} \quad \cos\frac{\varphi}{3} \quad d\,\varphi$$

для: $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $d\varrho = \frac{r\sqrt{3}}{3} \quad d\,\varphi$, $\varrho = r$, $d^2\varrho = -\frac{r}{9} \quad d\varphi^2$

$$dx = -r\,.\,d\varphi,\quad dy = \frac{r\sqrt{3}}{3} \quad d\,\varphi$$

$$d^2x = -\varrho \quad \cos\varphi \quad d\varphi^2 - 2 \quad \sin\varphi \quad d\varphi \quad d\varrho + \cos\varphi \quad d^2\varrho$$
$$d^2y = -\varrho \quad \sin\varphi \quad d\varphi^2 + 2 \quad \cos\varphi \quad d\varphi \quad d\varrho + \sin\varphi \quad d^2\varrho$$

для: $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $d^2x = -2 \quad d\,\varphi \quad d\,\varrho$

$$d^2y = -\varrho\,.\,d\varphi^2 + d^2\varrho$$

або: $$d^2x = -\frac{2r\sqrt{3}}{3} \quad d\,\varphi^2$$

$$d^2y = -r \quad d\,\varphi^2 - \frac{r}{9} \quad d\,\varphi^2$$

$$y'' = \frac{dx\,.\,d^2y - dy\,.\,d^2x}{(dx)^3} = \frac{\frac{10}{9}\,.\,r^2\,.\,d\varphi^3 + \frac{2}{3}\,.\,r^2\,.\,d\varphi^3}{r^3 \quad d\varphi^3}$$

$$y'' = -\frac{16}{9r};\quad y' = tg\,\bar{\tau} = \frac{dy}{dx} = -\frac{r\sqrt{3}}{3r} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad 68)$$

для $\varphi = \frac{\pi}{2}$:

$$\overline{R} = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{3}{9}\right)^3} \quad 9r}{16} = \frac{r\sqrt{3}}{2} \tag{69}$$

або: $$\overline{R} = r \quad \cos 30^0 \tag{69'}$$

З рівнання 68) слідує, що для: $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\overline{\tau} = 150^0$.

Твердження: Стична у точці P_2 для $\varphi = \frac{\pi}{2}$ перетинає криву лінію на оси x-сів в точці N (фіґ. 10). Друга стична перетинає цю саму криву лінію по другому боці оси y-онів теж на оси x-сів; вісь y-онів є для обох точок пересічи осию симетрії.

Доказ: У трикутнику рівнобічнім $MO'P_2$ висота $\overline{P_2L}$ є рівна проміневи осціляцийного кола $\overline{R}$ для точки P_2 слимакуватої лінії (фіґ. 10).

Для $\varphi = 360^0$, $x = \varrho = 2r \, . \, sin \frac{\varphi}{3} = 2r \, . \, sin \; 60^0 = \underline{r\sqrt{3}}$

отже: $tang \, \overline{\tau}' = \frac{r}{r\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

З рівнання 68) маємо: для $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$tang \, \overline{\tau} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ або: } tang \, \overline{\tau} = - \, tg \; (180 - \overline{\tau}')$$

Також: $\sphericalangle MP_2L = \sphericalangle P_2NM$

А що: $\sphericalangle MP_2L = 30^0$, то також

$\sphericalangle P_2NM = 30^0$

отже: $tg \; 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3} = tg \, \overline{\tau}'$; $\overline{\tau}' = 30^0$

а: $\overline{\tau}' = 150^0$.

Нота: Формулу 69) ми можемо одержати також в слідуючий спосіб:

$$y'' = \frac{dx \, . \, d^2y - dy \, . \, d^2x}{(dx)^3} = \frac{\varrho \, . \, d\varphi \, (\varrho d\varphi^2 - d^2\varrho) + d\varrho \, . \, 2d\varrho \, . \, d\varphi}{-\varrho^3 \, d\varphi^3}$$

отже: $$y'' = \frac{\varrho^2 \, . \, d\varphi^3 - \varrho \, . \, d\varphi \, . \, d^2\varrho + 2d\varrho^2 \, . \, d\varphi}{-\varrho^3 \quad d\varphi^3}$$

$$\overline{R} = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = - \frac{\left[1 + \left(\frac{d\varrho}{\varrho \, . \, d\varphi}\right)^2\right]^{3/2} . \, \varrho^3 \quad d\varphi^3}{\varrho^2 d\varphi^3 - \varrho \, . \, d\varphi \, . \, d^2\varrho + 2 \quad d\varrho^2 \, . \, d\varphi}$$

$$\overline{R} = \frac{\left[\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2\right]^{3/2}}{\varrho^2 + 2\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 - \varrho \cdot \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}} = \frac{(12 \cdot \varrho^2)^{3/2}}{27\left(\varrho^2 + \frac{2}{3}\varrho^2 + \frac{\varrho^2}{9}\right)}$$

або: $$\overline{R} = \frac{3 \cdot \varrho \cdot \sqrt{12}}{12} = \varrho\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varrho = 2r \quad \sin\frac{\varphi}{3}, \text{ для: } \varphi = \frac{\pi}{2}, \ \varrho = r$$

Отже: $\overline{R} = r\,\frac{\sqrt{3}}{2} = r \quad \cos 30^\circ$, цей самий вислід, що у формулах 69, 69'.

II. Загальний випадок:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\left(\frac{dy'}{d\varphi}\right)}{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)} \qquad 70)$$

$$y' = \frac{3 \cdot \cos\varphi \quad \sin\frac{1}{3}\varphi + \sin\varphi \cdot \cos\frac{1}{3}\varphi}{\cos\varphi \cdot \cos\frac{1}{3}\varphi - 3 \cdot \sin\varphi \quad \sin\frac{1}{3}\varphi} = \frac{B}{A} \qquad \text{гл. форм. } 65)$$

$$\frac{dy'}{d\varphi} = \frac{1}{A^2}\Big\{ A\,(\cos\varphi \quad \frac{1}{3} \quad \cos\frac{1}{3}\varphi - 3 \cdot \sin\frac{1}{3}\varphi \cdot \sin\varphi +$$

$$+ \cos\frac{1}{3}\varphi \cdot \cos\varphi - \sin\varphi \cdot \frac{1}{3} \cdot \sin\frac{1}{3}\varphi) - B\,(- \cos\varphi \cdot \frac{1}{3}\sin\frac{1}{3}\varphi -$$

$$- \cos\frac{1}{3}\varphi \cdot \sin\varphi - 3 \cdot \sin\varphi \cdot \frac{1}{3} \cdot \cos\frac{1}{3}\varphi - 3 \cdot \sin\frac{1}{3}\varphi \quad \cos\varphi)\Big\}$$

Або: $$\frac{dy'}{d\varphi} = \frac{1}{A^2}\Big\{ A\,(2\cos\varphi \cdot \cos\frac{1}{3}\varphi - \frac{10}{3} \cdot \sin\frac{1}{3}\varphi \cdot \sin\varphi) +$$

$$+ B\,(2\sin\varphi \cdot \cos\frac{1}{3}\varphi + \frac{10}{3}\sin\frac{1}{3}\varphi \cdot \cos\varphi)\Big\}$$

Отже: $$\frac{dy'}{d\varphi} = \frac{A \cdot C + B \cdot D}{A^2} = \frac{A \cdot \frac{dB}{d\varphi} + B \cdot \frac{dA}{d\varphi}}{A^2} \qquad 71)$$

$$\left.\begin{aligned}
&A,\ B,\ C,\ D \text{ є функціями } \varphi.\\
&\quad A = \cos\varphi \,.\, \cos\frac{1}{3}\varphi - 3\ \sin\varphi \,.\, \sin\frac{1}{3}\varphi\\
&\quad B = 3\cos\varphi \,.\, \sin\frac{1}{3}\varphi + \sin\varphi \,.\, \cos\frac{1}{3}\varphi\\
&C = 2\cos\varphi \,.\, \cos\frac{1}{3}\varphi - \frac{10}{3}\sin\frac{1}{3}\varphi \,.\, \sin\varphi = \frac{dB}{d\varphi}\\
&D = 2 \,.\, \sin\varphi \,.\, \cos\frac{1}{3}\varphi + \frac{10}{3}\sin\frac{1}{3}\varphi \,.\, \cos\varphi = -\frac{dA}{d\varphi}
\end{aligned}\right\} \tag{72}$$

$$x = 2r \,.\, \sin\frac{1}{3}\varphi \,.\, \cos\varphi$$

$$dx = \frac{2r}{3}\left(\cos\varphi \,.\, \cos\frac{1}{3}\varphi - 3 \,.\, \sin\frac{1}{3}\varphi \,.\, \sin\varphi\right) = \frac{2r}{3} A \,.\, d\varphi$$

отже: $$y'' = \frac{3\,(A \,.\, C + B \,.\, D)}{2r \,.\, A^3};\quad y' = \frac{B}{A}; \tag{73}$$

$$\overline{R} = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = \frac{2r\,(A^2 + B^2)^{3/2}}{3\,(AC + BD)} \tag{74}$$

Окремі випадки: для: $\varphi = 90^0$, $A = -\frac{3}{2}$,

$$B = +\frac{\sqrt{3}}{2},\ C = -\frac{10}{6},\ D = +\sqrt{3};$$

$$\overline{R} = \frac{2r\sqrt{\left(\left(\frac{9}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)\right)^3}}{3\left(\frac{3}{2}\ \frac{10}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \,.\, \sqrt{3}\right)} = \frac{r\sqrt{3}}{2} = r \,.\, \cos 30^0$$

Для: $\varphi = 0^0$, $A = +1$, $B = 0$, $C = +2$, $D = 0$, $\overline{R} = \frac{r}{3}$;

Для: $\varphi = \pi$, $A = -\frac{1}{2}$, $B = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $C = -1$, $D = -\frac{5\sqrt{3}}{3}$

$$\overline{R} = \frac{7r\sqrt{7}}{12}.$$

Для: $\varphi = 2\pi$, $A = -\frac{1}{2}$, $B = +\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $C = -1$, $D = +\frac{5\sqrt{3}}{3}$

$$\overline{R} = \frac{7r\sqrt{7}}{12};$$

Для: $\varphi = \frac{3\pi}{2}\ (270^0)$, $A = +3$, $B = 0$, $C = +\frac{10}{3}$, $D = 0$,

$$\overline{R} = \frac{9}{5} \,.\, r.$$

γ) Дуга слимаковатої лінії.

$$ds = dx\sqrt{1 + y'^2} \qquad 75)$$

але: $$y' = \frac{B}{A},\ dx = \frac{2rA}{3}\ .\ d\varphi$$

Отже: $$s = \int\sqrt{1 + \frac{B^2}{A^2}}\ \frac{2rA}{3}\ .\ d\varphi = \frac{2r}{3}\int\sqrt{A^2 + B^2}\ d\varphi$$

$C = 0.$

Але:

$$A^2 = cos^2\varphi\ .\ cos^2\frac{1}{3}\varphi + 9\,sin^2\varphi\ .\ sin^2\frac{1}{3}\varphi - 6\ .\ cos\,\varphi\ .\ cos\frac{\varphi}{3}\ .\ sin\,\varphi\ .\ sin\frac{\varphi}{3}$$

$$B^2 = 9cos^2\varphi\ .\ sin^2\frac{1}{3}\varphi + sin^2\varphi\ .\ cos^2\frac{1}{3}\varphi + 6\ .\ cos\varphi\ .\ sin\frac{1}{3}\varphi\ .\ sin\varphi\ .\ cos\frac{1}{3}\varphi$$

Отже: $A^2 + B^2 = 9\ \ sin^2\frac{1}{3}\varphi + cos^2\frac{1}{3}\varphi = 8\ .\ sin^2\frac{1}{3}\varphi + 1.$

З цего слідує:

$$s = \frac{2r}{3}\int\sqrt{8\,sin^2\frac{1}{3}\varphi + 1}\ .\ d\varphi \qquad 76)$$

Як бачимо, рівнанне 76) є тотожне з рівнанням 60) попереднього уступу.

δ) Параметричне представленне слимаковатої лінії для природних співрядних.

Рівнання 74) звучить: $\overline{R} = \frac{2r\,(A^2 + B^2)^{3/2}}{3\,(AC + BD)}$

Підставивши у цьому рівнанню за A, B, C, D їх вирази з рівнань 72), ми одержимо:

$$\left.\begin{aligned}\overline{R} &= \frac{r}{3}\,\frac{\left(8\,sin^2\frac{1}{3}\varphi + 1\right)^{3/2}}{\left(4\,sin^2\frac{1}{3}\varphi + 1\right)}\\ \text{також:}\quad s &= \frac{2r}{3}\int\sqrt{8\,sin^2\frac{1}{3}\varphi + 1}\ .\ d\varphi\end{aligned}\right\} \qquad 77)$$

Рівнання 77) є параметричними рівнаннями слимаковатої лінії для природних співрядних.

Інтеґрал $\int\sqrt{8\,sin^2\frac{1}{3}\varphi + 1}\ .\ d\varphi$ є інтеґралом еліптичним.

є) Еволюта слимаковатої лінії.

Параметричні рівнання для еволюти слимаковатої лінії у співрядних Декарта звучать:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= 2r\left(\sin\frac{\varphi}{3}\,.\,\cos\varphi - B.\,K\right) \\ \eta &= 2r\left(\sin\frac{\varphi}{3}\sin\varphi + AK\right) \end{aligned}\right\} \qquad 78)$$

де: A, B K є функціями φ.

$$K = \frac{8\sin^2\frac{1}{3}\varphi + 1}{6\left(4\sin^2\frac{1}{3}\varphi + 1\right)} \qquad 79)$$

або:

$$K = \frac{(3\,.\,\overline{R})^{2/3}}{6\,.\,r^{2/3}\sqrt[3]{4\quad\sin^2\frac{\varphi}{3} + 1}} \qquad 79')$$

Напр. для: $\varphi = 0,\quad x = y = 0$

ми маємо: $A = +1,\quad B = 0,\quad K = +\frac{1}{6}$

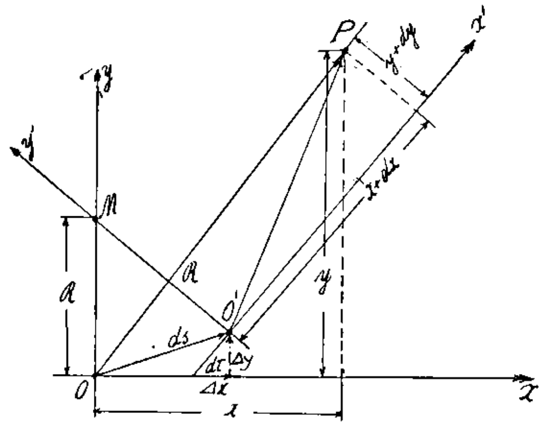
$\xi = 0,\quad \eta = \frac{r}{3} = \overline{R}$ гл. стр. 72.

для: $\varphi = 90^0,\quad x = 0,\quad y = r$

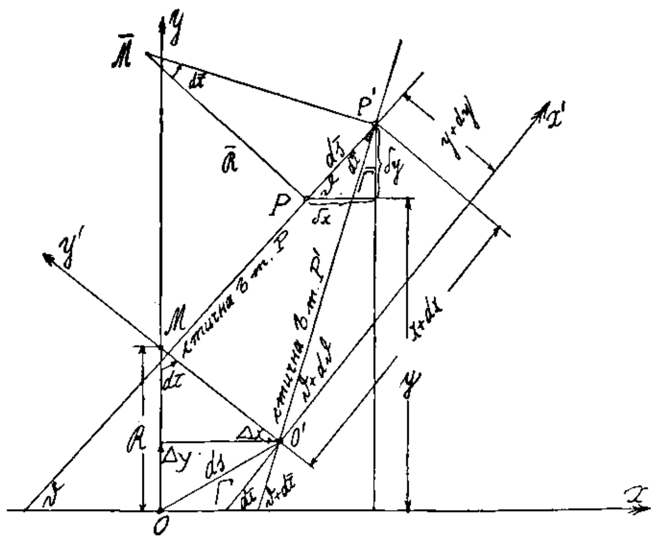
ми маємо: $A = -\frac{3}{2},\quad B = +\frac{\sqrt{3}}{2},\quad K = +\frac{1}{4}$

$\xi = -\frac{r\sqrt{3}}{4},\quad \eta = r - \frac{3r}{4}$ це і співрядні точки L у фіґ. 10.

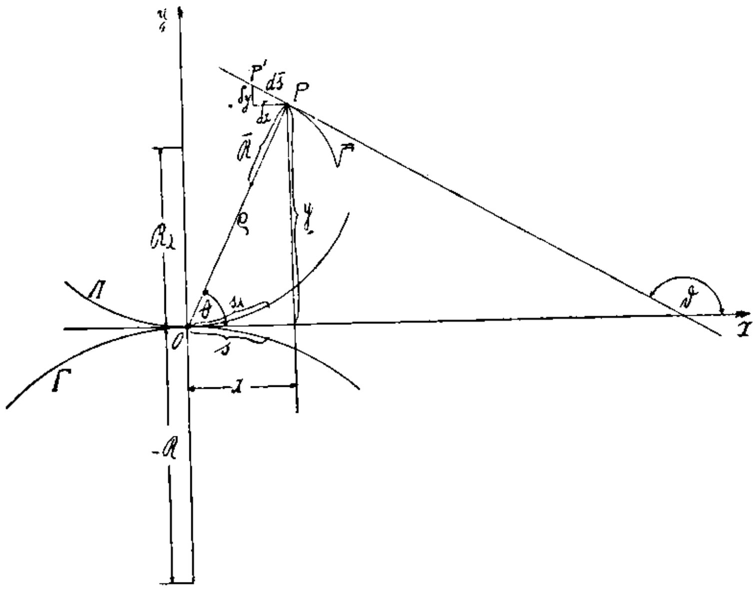
Як бачимо, будова рівнань 78) у дечому подібна до рівнань 62') для слимаковатої лінії.



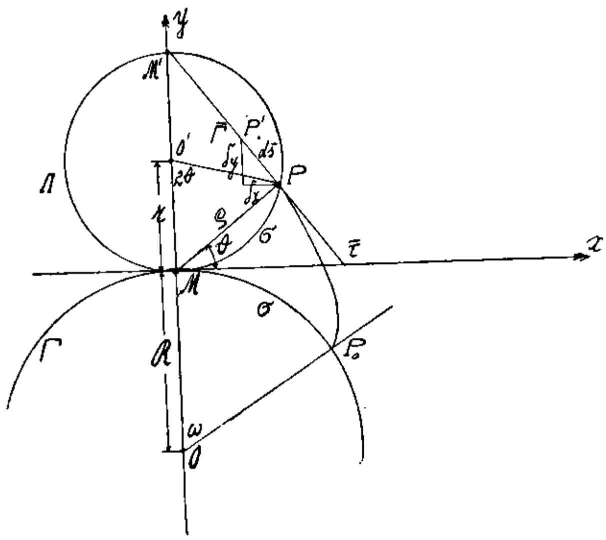
Фіг. 1.



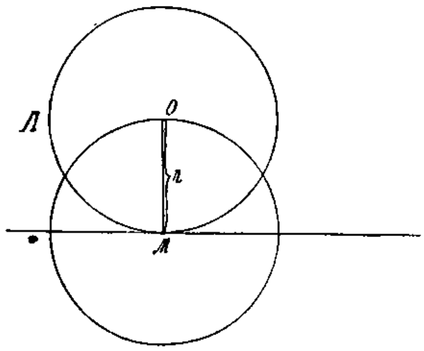
Фіг. 2.



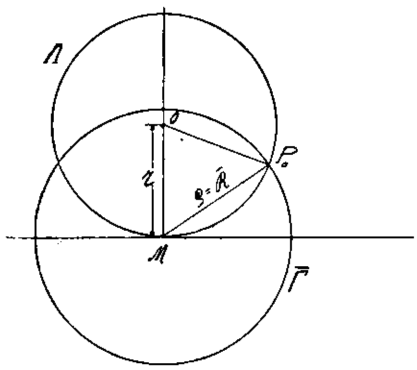
Фіг. 3.



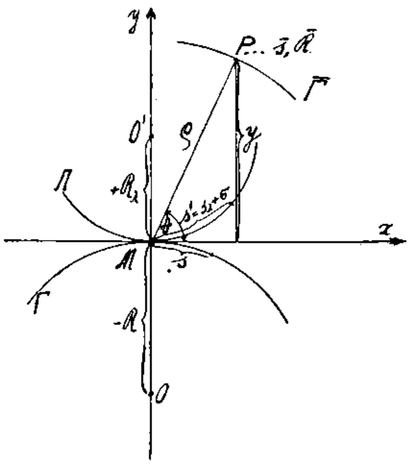
Фіг. 4.



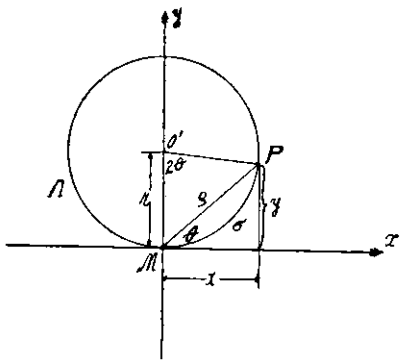
Фir. 5.



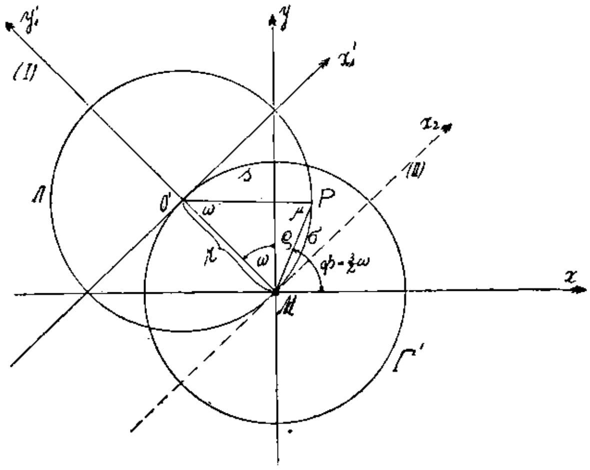
Фir. 6.



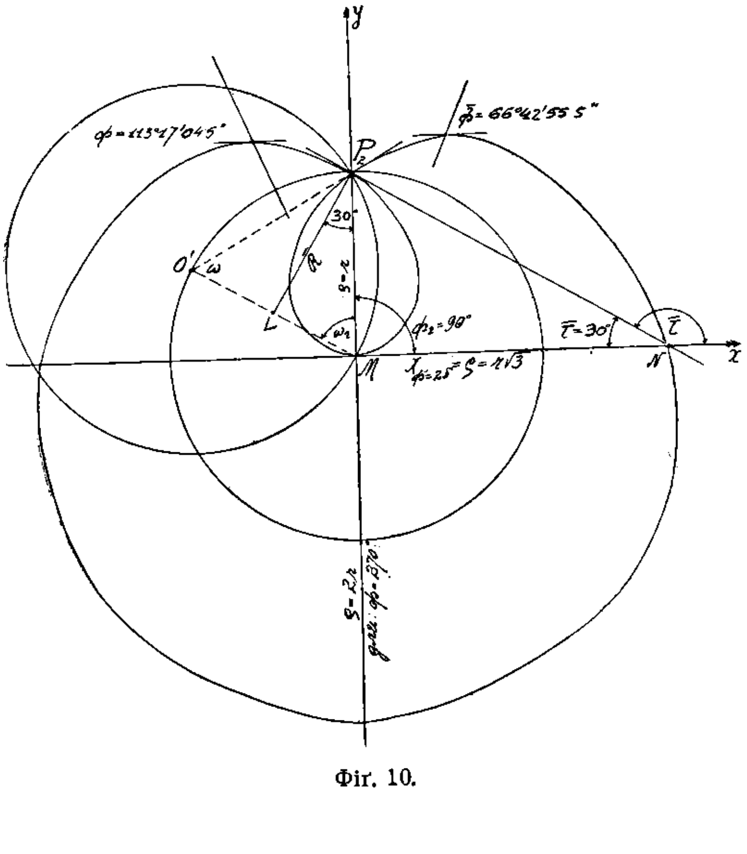
Фir. 7.



Фir. 8.



Фiг. 9.



Фiг. 10.

С. Д. Чорний.

Формули довготи періастра та ексцентричности орбіти затемнюваних змінних зір типу β Lyrae.

Щоб визначити довготу періастра α та ексцентричність e орбіти затемнюваних змінних зір типу β *Lyrae*, до цього часу[1]) користуваноcя приближеним рівнанням

$$w = W + 2\, e \sin (W - \alpha),$$

де w — справжня довгота зорі в орбіті, W — ёї пересічна довгота. Зазначене вище рівнання є точне до малих величин першого порядку відносно e включно. В цім досліді ми виведемо точні формули[2]) довготи періастра та ексцентричности. Для цього умовимося відчислювати справжні довготи в орбіті від точки перетину орбіти проекцією проміня зору на площу орбіти в хвилю головного minimum яскравости зорі. Нехай t_1, t_2, t_3, t_4 будуть відповідно хвилі головного minimum, першого maximum, побічного minimum та другого maximum зорі, нехай ексцентричні єї аномалії будуть відповідно E_1, E_2, E_3, E_4, тоді беручи на увагу, що

$$w_1 = 0,\ w_2 = \frac{\pi}{2},\ w_3 = \pi,\ w_4 = \frac{3\pi}{2},$$

за відомою формулою теоретичної астрономії можемо написати

$$-tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\, tg\frac{E_1}{2};\quad ctg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\, tg\frac{E_3}{2}; \qquad (1)$$

$$tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\, tg\frac{E_2}{2};\quad -ctg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\, tg\frac{E_4}{2}$$

---

[1]) Andrè Ch. Traité d'astronomie stellaire. II-e partie, pp. 199, 290.

[2]) Ці формули були подані мною без виводу в часописі „Astronomische Nachrichten, Band 230, pp. 157—158".