UKRAINISCHE ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN IN LEMBERG.
(ČARNIECKI-GASSE № 26).

# SITZUNGSBERICHTE

## DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-ÄRZTLICHEN SEKTION

### HEFT VIII.

**(JULI 1927 — DEZEMBER 1927).**

REDIGIERT

VOM VORSTAND DER MATH.-NATURWISS.-ÄRZTLICHEN SEKTION.



LEMBERG, 1928.
VERLAG UND BUCHDRUCKEREI DER ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT
DER WISSENSCHAFTEN IN LEMBERG.

RÉSUMÉ.

La spirale logarithmique et sa développante (par V. Levyćkyj).

L'auteur demontre: la développante d'une spirale logarithmique est aussi une spirale logarithmique ou un faisceau de les spirales.


Die Grundlagen der Hochvakuumtechnik.
(von M. Pavloff).

Unter dem Namen „Hochvakuumtechnik" verstehen wir ein geschicktes Umgehen mit den Apparaten zum Erlangen, wie auch zur Vermessung des Hochvakuums.

Es ist nicht notwendig anzuführen, was für eine wichtige Bedeutung in jetzigen Zeiten Hochvakuumtechnik, sowohl in wissenschaftlichen Laboratorien, wie auch in zahlreichen technischen Anlagen besitzt. Eine grosse Bedeutung wird das vom Hrn. M. Pavloff, einem Adjunkten der technischen Hochschule in Lemberg, verfasste Buch, das in der nächsten Zeit erscheinen wird, haben, um wenigstens teilweise die Mängel in der wissenschaftlichen Litteratur des erwähnten Gegenstandes zu beseitigen, umsomehr, als es nicht nur die Studierenden der Physik, Chemie oder Technik, sondern auch andere technische Mitarbeiter mit Vorteil davon Gebrauch machen werden.

Dieses Buch wird den Entwurf der Hochvakuumtechnik in folgenden Abschnitten enthalten:

1) Notwendige Begriffe aus der kinetischen Gastheorie mit Berücksichtigung der neuesten Resultate auf dem Gebiete der verdünnten Gase.

2) Die physikalischen Methoden zur Erzeugung des Hochvakuums (die Pumpen).

3) Die chemischen Methoden für Erzeugung und Ausbesserung des Hochvakuums (die Sorbtionserscheinungen).

4) Die Methoden der Hochvakuummessung (Manometer).

5) Die Einrichtung der Hochvakuumapparate und Kanalisation des Vakuums.

6) Hilfsmittel bei Hochvakuumarbeiten.

CXXXIX. Sitzung am 28. November 1927.
Vorsitzender Hr. Levyćkyj.

1. Dem Hrn. Prof. Ježek (Prag) wurde aus Anlass seiner 50-jährigen Jubiläumsfeier ein Gratulationsschreiben gesendet. Ein ähnliches Schreiben wurde dem Akad. Bahalij (Kyjiv) aus Anlass seiner 70-jährigen Jubiläumsfeier zugestellt.

2. Hr. Cehelśkyj berichtet über neue ukrainische Publikation u. T.: „Ukrainische physikalische Denkschriften" in Kyjiv; bis nun erschienen Hefte I u. II.

3. Hr. Kučer legt zwei Arbeiten des Hrn. Trakało (Ternopil) vor u. T.: 1) Die Rotation der Erde um ihre Achse; 2) Die

analytische Geometrie der vier und mehrerer Koordinaten in darstellbaren Räumen". Beide Arbeiten werden zur Begutachtung den Hrn. Grave, resp. Kravčuk (Kyjiv) gesendet.

4. Auf Grund des Gutachtens des Hrn. Tysovśkyj wurde die Arbeit des Hrn. Pučkivśkyj (vgl. Punkt 5 der vorigen Sitzung) trotz ihres mehr descriptiven Charakters als für Veröffentlichungen der Sektion geeignet erklärt.

Dieselbe erscheint in der Sammelschrift der Sektion.

### CXL. Sitzung am 11. Dezember 1927.

Vorsitzender Hr. Levyćkyj.

1. Das Erscheinen der Sammelschrift der physiographischen Kommission Heft II unter Redaktion des Hrn. Melnyk wurde zur Kenntnis genommen.

2. Der Vorsitzende legt die Arbeit des Hrn. Kravčuk (Kyjiv) u. T.: „Sur l'éxistence des dérivées supérieures" vor.

3. Hr. Feščenko-Čopivskyj (Bergakademie Krakau) hält folgende Vorträge über seine Untersuchungen: 1) Die Glüh- und Anlass-Sprödigkeit in den weichen und harten Stahlsorten; 2) Das Verhältnis der Härte zur Streckgrenze ist das einzige Mass der Güte des Stahlmateriales; 3) Die Festigkeit des thermisch vergüteten weichen Stahles in den Temperaturen 350°—200° C.

## RÉSUMÉ.

### Sur l'éxistence des dérivées supérieures[1]).

Note de M. Krawtchouk.

§ 1.

Théorème $\mathrm{I}_a$. Soit $f(x)$ la fonction d'une variable réelle, vérifiant au voisinage de tout point $x = \alpha$ $(o \leqq \alpha \leqq a < 1)$ la condition suivante:

$$(1) \quad f(x) = f(\alpha) + (x-\alpha)\, a_1(\alpha) + \quad + \frac{(x-\alpha)^k}{k!} a^k(\alpha) + \\ + (x-\alpha)^{k+r} A(x, \alpha) \quad (\alpha \leqq x \leqq 1,\ r > o),$$

où la fonction $A(x, \alpha)$ est bornée. Alors l'expression $h^{-r}\,[a_k(\alpha+h) - a_k(\alpha)]$ est bornée.

[1]) Cf. la Thèse de M. A. Marchaud, Sur les dérivées et sur les différences des fonctions de variables réelles (Paris, 1927) et l'article ucraïnien de l'auteur de cette note dans Sammelschrift der mathematisch-naturwissenschaftlich-ärztlichen Sektion der Ševčenko-Gesellschaft der Wissenschaften in Lemberg (Bd. XXVI, 1927).

Démonstration. En calculant au moyen de l'égalité (1) les différences

$$[\Delta^k f(x)]_{x=a} = \Delta^k f(\alpha) \text{ et } [\Delta^{k+1} f(x)]_{x=a} = \Delta^{k+1} f(\alpha) \qquad (\Delta x = h),$$

on conclut que les expressions

$$\left.\begin{array}{ll} (2) & h^{-r}\left[\dfrac{\Delta^k f(\alpha)}{h^k} - a_k(\alpha)\right] \\ (3) & h^{-r}\dfrac{\Delta^{k+1} f(\alpha)}{h^k} \end{array}\right\} \text{ sont bornées,}$$

d'où l'on tire immédiatement notre assertion.

Théorème $I_b$. Si au voisinage de tout point $(\alpha,\beta)$ $\left(\begin{smallmatrix} o \leqq \alpha \leqq a < 1 \\ o \leqq \beta \leqq b < 1 \end{smallmatrix}\right)$ on a

$$(4) \quad f(x,y) = f(\alpha,\beta) + \sum_{i=1,\ j=1}^{i=k,\ j=l} \frac{(x-\alpha)^i (y-\beta)^j}{i!\, j!} a_{ij}(\alpha,\beta) +$$

$$+ (x-\alpha)^k (y-\beta)^l [(x-\alpha)^r A(x,\alpha;\ y,\beta) + (y-\beta)^s B(x,\alpha;\ y,\beta]$$

$$(\alpha \leqq x \leqq 1,\ \beta \leqq y \leqq 1;\ r > o,\ s > o),$$

où les fonctions $A(x,\alpha;\ y,\beta)$ et $B(x,\alpha;\ y,\beta)$ sont bornées, alors l'expression

$$(5) \quad \frac{a_{kl}(\alpha+g,\ \beta+h) - a_{kl}(\alpha,\beta)}{|g|^r + |h|^s} \text{ est bornée.}$$

Démonstration analogue.

Théorème II. Sous les conditions du Théorème $I_a$ la fonction $f(\alpha)$ possède la dérivée $k$-ième $f^{(k)}(\alpha) = a_k(\alpha)$.

Démonstration. En effet, on voit de (2) que $\dfrac{\Delta^k f(\alpha)}{h^k}$ tend uniformément vers $a_k(\alpha)$. Donc

$$\int_o^a \cdots \int_o^a a_k(\alpha)\, d\alpha^k = \lim_{h=o} \int_o^a \cdots \int_o^a \frac{\Delta^k f(\alpha)}{h^k}\, d\alpha^k =$$

$$= \lim_{h=o} \frac{1}{h^k} \int_a^{a+h} \cdots \int_a^{a+h} f(\alpha)\, d\alpha^k + \varphi_k(\alpha) = f(\alpha) + \varphi_k(\alpha),$$

où $\varphi_k(\alpha)$ est un polynôme de degré $\leqq k-1$; ce que conduit à la conclusion voulue.

§ 2.

En partant de l'identité

(6) $$y(x) = y(a) + (x-a)\,\frac{\Delta y(a)}{h} + \cdot \quad +$$
$$+ \frac{(x-a)(x-a-h)\ .\ .\ .\ (x-a-\overline{k-1}\,h)}{k!}\,\frac{\Delta^k y(a)}{h^k} + \overset{m}{\underset{a}{K}}[y(x)],$$

où

$$h = \frac{x-a}{m}\ ;\ y(a+h) - y(a) = \Delta y(a),\ \Delta y(a+h) - \Delta y(a) = \Delta^2 y(a), \ldots$$

$$\overset{m}{\underset{a}{K}}[y(x)] = \sum_{i=0}^{m-k} \frac{(x-a-\overline{i+1}h)(x-a-\overline{i+2}h)\ldots(x-a-\overline{i+k}\,h)}{k!} \cdot \frac{\Delta^{k+1} f(a+ih)}{h^{k+1}} \cdot h,$$

on peut énoncer le résultat suivant.

Théorème III.. Si l'expression

(7) $$(x-a)^{-k-r}\,\overset{m}{K}[y(x)] \text{ est bornée}$$

pour $o \leq a \leq a < 1$, $a \leq x \leq 1$, alors la dérivée $y^{(k)}(a)$ existe et la fonction

(8) $$h^{-r}\,\Delta y^{(k)}(a) = h^{-r}[y^{(k)}(a+h) - y^{(k)}(a)] \text{ est bornée,}$$

et vice versa.

Démonstration. Si la fonction (7) est bornée, alors sont bornées les $\frac{\Delta^i y(a)}{h^i}$ $(i = 1, 2, \quad ., k)$, comme il suit de (6); ce que permet déduire de (6) (en faisant $h \to o$) l'égalité du type (1) et par conséquent la condition (8).

Inversement, si l'expression (8) est bornée, alors, comme il suit de (6),

$$\left[y(x) - y(a) - \quad - \frac{(x-a)^{k-1}}{(k-1)!}\,y^{(k-1)}(a)\right] -$$
$$- \frac{(x-a)^k}{k!}\,y^{(k)}(a) = \lim_{m=\infty} \overset{m}{\underset{a}{K}}[y(x)]$$

ou bien

$$\frac{y^{(k)}[a+\Theta(x-a)] - y^{(k)}(a)}{(x-a)^r} = k!\,\frac{\lim\limits_{m=\infty} \overset{m}{\underset{a}{K}}[y(x)]}{(x-a)^{k+r}} \qquad (0 \leq \Theta \leq 1),$$

ce que donne la condition (7).

§ 3.

En introduisant les dénotations

$$z_{00}=z,\ z_{01}=\frac{\partial z}{\partial y},\ z_{10}=\frac{\partial z}{\partial x},\quad \ldots,\ z_{ij}=\frac{\partial^{i+j} z}{\partial x^i \partial y^j},$$

$$\Delta z(x,y)=z(x+g,y)-z(x,y),\ \delta z(x,y)=z(x,y+h)-z(x,y),$$

$$\Delta\delta z(x,y)=\delta\Delta z(x,y)=\Delta z(x,y+h)-\Delta z(x,y)=\delta z(x+g,y)-\delta z(x,y),\ \ldots$$

$$\overset{m}{\underset{\alpha}{K}}[z(x,y)]=\sum_{i=0}^{m-k}\frac{(x-\alpha-\overline{i+1}g)(x-\alpha-\overline{i+2}g)\ldots(x-\alpha-\overline{i+k}g)}{k!}\cdot\frac{\Delta^{k+1}z(x+ig,y)}{g^{k+1}}\cdot g,$$

$$\overset{n}{\underset{\beta}{L}}[z(x,y)]=\sum_{j=0}^{n-l}\frac{(y-\beta-\overline{j+1}h)(y-\beta-\overline{j+2}h)\ldots(y-\beta-\overline{j+l}h)}{l!}\cdot\frac{\delta^{l+1}z(x,y+jh)}{h^{l+1}}\cdot h,$$

on peut démontrer le théorème suivant.

Théorème $\mathrm{III}_b$. Les deux conditions suivantes ($A$. et $B$.) sont équivalentes:

$A$. les dérivées $z_{k0}(\alpha,y)$ et $z_{0l}(x,\beta)$ éxistent; les fonctions
(9) $g^{-r}\cdot\Delta z_{k0}(\alpha,y)$ et $h^{-s}\,\delta z_{0l}(x,\beta)$ sont bornées;
l'expression
(10) $$\frac{\overset{m}{\underset{\alpha}{K}}\left[\overset{n}{\underset{\beta}{L}}[z(x,y)]\right]}{(x-\alpha)^k(y-\beta)^l(|x-\alpha|^r+|y-\beta|^s)}$$ est bornée
$$\begin{pmatrix} o\leqq\alpha\leqq a<1\ ; & o\leqq\beta\leqq b<1 \\ \alpha\leqq x\leqq 1 & \beta\leqq y\leqq 1\end{pmatrix}$$

$B$. la dérivée $z_{kl}(\alpha,\beta)$ existe; la fonction
(11) $$\frac{z_{kl}(\alpha+g,\beta+h)-z^{kl}(\alpha,\beta)}{|g|^r+|h|^s}$$ est bornée.

Démonstration. D'après le Théorème $\mathrm{III}_a$, on obtient de la condition (9):

$$z(x,y)-\sum_{i=0}^{k}\frac{(x-\alpha)^i}{i!}z_{i0}(\alpha,y)=\lim_{m=\infty}\overset{m}{\underset{\alpha}{K}}[z(x,y)]$$

$$z(x,y)-\sum_{j=0}^{l}\frac{(y-\beta)^j}{j!}z_{0j}(x,\beta)=\lim_{n=\infty}\overset{n}{\underset{\beta}{L}}[z(x,y)]\ ,$$

d'où au moyen de (10) on déduit l'existence de la dérivée $z_{kl}(\alpha,\beta)$ et la condition (11).

Inversement, si l'on suppose verifiée la condition (11), alors on a l'identité

$$z(x,y) - \sum_{i=0}^{k} \frac{(x-\alpha)^i}{i!} z_{io}(\alpha,y) - \sum_{j=0}^{l} \frac{(y-\beta)^j}{j!} z_{oj}(x,\beta) +$$

$$+ \sum_{i=o,\, j=o}^{i=k,\, j=l} \frac{(x-\alpha)^i (y-\beta)^j}{i!\, j!} z_{ij}(\alpha,\beta) \doteq \lim_{m,n=\infty} \overset{n}{\underset{\beta}{L}} \left[ \overset{m}{\underset{\alpha}{K}} [z(x,y)] \right]$$

qui peut être mise sous la forme suivante:

$$\left[ z(x,y) - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(x-\alpha)^i}{i!} z_{io}(\alpha,y) - \sum_{j=0}^{l-1} \frac{(y-\beta)^j}{j!} z_{oj}(x,\beta) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=o,\, j=o}^{i=k-1,\, j=l-1} \frac{(x-\alpha)^i (y-\beta)^j}{i!\, j!} z_{ij}(\alpha,\beta) \right] - \frac{(x-\alpha)^k}{k!} \left[ z_{ko}(\alpha,y) - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=0}^{l-1} \frac{(y-\beta)^j}{j!} z_{kj}(\alpha,\beta) \right] - \frac{(y-\beta)^l}{l!} \left[ z_{ol}(x,\beta) - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(x-\alpha)^i}{i!} z_{il}(\alpha,\beta) \right] +$$

$$+ \frac{(x-\alpha)^k (y-\beta)^l}{k!\, l!} z_{kl}(\alpha,\beta) = \lim_{m,n=\infty} \overset{n}{\underset{\beta}{L}} \left[ \overset{m}{\underset{\alpha}{K}} [z(x,y)] \right],$$

ou bien:

$$\frac{(x-\alpha)^k (y-\beta)^l}{k!\, l!} \left[ z_{kl}(\alpha+\Theta(x-\alpha),\beta+\vartheta(y-\beta)) - z_{kl}(\alpha,\beta+\vartheta_1(y-\beta)) - \right.$$

$$\left. - z_{kl}(\alpha+\Theta_1(x-\alpha),\beta) + z_{kl}(\alpha,\beta) \right] = \lim_{m,n=\infty} \overset{n}{\underset{\beta}{L}} \left[ \overset{m}{\underset{\alpha}{K}} [z(x,y)] \right]$$

$$(o \leqq \Theta, \vartheta, \Theta_1, \vartheta_1 \leqq 1),$$

d'où il suit la condition (10).

## Die Glüh- und Anlass-Sprödigkeit

(von I. Feščenko-Čopivśkyj (Feschtschenko-Tschopivśkyj).

Die Empfindlichkeit der *Cr-Ni*-Stahlsorten, sowie derjenigen, mit *P* und *Mn* verunreinigt, auf die Abkühlungsweise in den Temperaturgrenzen von 721°—400° C ist wohl bekannt; dabei muss man in Acht nehmen, dass schädliche Einflüsse des *P* und *Mn* sich summieren.

Der Verfasser hat den Empfindlichkeitsgrad auf die Abkühlungsgeschwindigkeit nach dem Ausglühen oder Enthärten an den halbharten und weichen Stahlsorten untersucht und als Kontrolle des Sprödigkeitgrades die Methode Charpy in den Umgebungstemperaturen von —15° C bis +200° C angewandt.