

UKRAINISCHE ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN IN LEMBERG
(ČARNIECKI-GASSE № 26).

SITZUNGSBERICHTE
DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-
ÄRZTLICHEN SEKTION.

HEFT V.
(OKTOBER 1926 — JÄNNER 1927).

REDIGIERT
VOM VORSTAND DER MATH.-NATURWISS.-ÄRZTLICHEN SEKTION.



LEMBERG, 1927.
VERLAG UND BUCHDRUCKEREI DER ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT
DER WISSENSCHAFTEN IN LEMBERG.

c) Mariampol (bei Halič). Im Jungaurignacienlöss bei den Stellungen Werenkiw, Zaspá, sowie auch bei der Schlossruine finden sich Reste einer Spätaurignacienindustrie. In den liegenden Schottern Spuren der Feuersteinindustrie (älter als Spätaurignacien). Die Station wird im Sommer 1927 ausgegraben.

Gemeinsame Sitzung aller drei Sektionen der
Gesellschaft am 23. Oktober 1926.

Vorsitzender Hr. Dr. M. Korduba.

Der Präsident der Gesellschaft Hr. Dr. K. Studynskýj berichtet über seine Reise nach Kyjiv und Charkiv (aus Anlass des 40-jährigen Jubiläums des Hrn Prof. M. Hruševskýj) und gibt die Übersicht über den jetzigen Stand der kulturellen und wissenschaftlichen Arbeit der ukr. Akademie der Wissenschaften, des Institutes für Volksaufklärung und anderer wissenschaftl. Institutionen.

CXXII. Sitzung am 31. Oktober 1926.

Vorsitzender Hr. Levyčkyj.

1. Das Erscheinen des XXV. Bandes der Sammelchrift der Sektion wurde zur Kenntnis genommen.

2. Die ukrainische Akademie der Wissenschaften hat den II. Teil des Wörterbuches für mathematische Terminologie (theoretische Mechanik — vergl. Sitzungsber. Heft. III. Seite 4) im Einvernehmen mit der Sektion der Gesellschaft veröffentlicht (Kyjiv 1926, VIII+80).

3. Es wurde beschlossen, die Kommission für die Terminologie aufzulösen, da ihre Tätigkeit die Sektion als solche gemeinsam mit der mathematischen Sektion der ukr. Akademie übernommen hat.

4. Der Vorsitzende widmet einen Nachruf dem grossen ukrainischen Mathematiker M. Ostrogradskýj aus Anlass der 125-jährigen Feier seines Geburtstages.

B E R I C H T.

Michael Ostrogradskýj

(von Vl. Levyčkyj).

Michael Ostrogradskýj, geboren am 24. September 1801 im Poltava'er Gouvernement (Dorf Pašenne, Kobelatzk'er Bezirk), hat schon frühzeitig seine ausserordentliche Begabung für Mathematik gezeigt. Im J. 1817 studiert er die Mathematik als 16-jähriger Jüngling an der Universität Charkiv unter der Leitung des Prof. Pavlovskýj, bekommt bald

ein Attest für seine „excellenten“ Leistungen und legt die Kandidatsprüfung mit Auszeichnung ab. Infolge seiner nationalukrainischen Gesinnung musste er Charkiv verlassen und begibt sich zum weiteren Studium nach Paris (Collège de France und Sorbonne), wo er den grossen Cauchy kennen lernt. Sehr bald durch seine mathematische Untersuchungen (höhere Analysis und Mechanik) berühmt kehrt er nach Petersburg (1828) als Adjunkt der Akademie der Wissenschaften zurück und ist bis 1861 wissenschaftlich und pädagogisch auf höheren Schulen in Petersburg tätig. Seit 1831 ist er ordentliches Mitglied der Akademie. In Petersburg wurde er mit dem grössten ukrainischen Dichter Ševčenko bekannt. O. starb am 1. Jänner 1862 auf seinem Gut in der Ukraina, wo er sein letztes Lebensjahr verbracht hat.

Neben Lobatschefskyj, Tschebyscheff und M-e Kowalewsky ist Ostrogradskyj der grösste slavische Mathematiker. Seine Untersuchungen, betreffend die höhere Analysis und die Variationsrechnung im speziellen, sind noch heute klassisch. An die Lagrange'schen Untersuchungen anknüpfend behandelt O. die Theorie der Variationen der mehrfachen Integrale und gibt im Crelle's Journal Bd. 15, so wie auch in Annalen der Petersburger Akademie im J. 1834 seine berühmte Formel bekannt, die noch heute seinen Namen trägt:

Sei z eine Funktion der Variablen x und y und existiert auf einer begrenzten Fläche das Doppelintegral:

$$J = \iint F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) dx dy,$$

so kann man immer die erste Variation in der Form:

$$\delta J = \iint \delta F dx dy + \iint \left[\frac{\partial}{\partial x} (F \delta x) + \frac{\partial}{\partial y} (F \delta y) \right] dx dy$$

darstellen.

Andere Memoiren, betreffend die Theorie der algebraischen Integrale, der Integrale von rationalen Funktionen, die Wahrscheinlichkeitsrechnung, die Theorie der Kräfte Momente, des Stosses, der Differentialgleichungen der Dynamik, die Theorie der Wellen, der Wärme etc., vorwiegend in den Annalen der Pariser Akademie veröffentlicht, zeugen über grosse mathematische Begabung des Ostrogradskyj und haben Anlass zu den Untersuchungen seitens anderer grossen Mathematiker gegeben.

Eine Herausgabe aller seiner Werke seitens der ukrainischen Akademie der Wissenschaften wäre also ein Dauerdenkmal für einen der grössten Söhne der ukrainischen Nation.

Gemeinsame Sitzung aller drei Sektionen der
Gesellschaft am 6. November 1926.

Vorsitzender Hr. Dr. K. Studynskyj.

Hr. Dr. H. Svienciokyj, der gemeinsam mit dem Präsidenten der Gesellschaft an der Jubiläumsfeier des Hrn Prof. Hrus

ševskýj in Kyjiv Anteil genommen hat, berichtet über das Bibliothek- und Museum-Wesen in der Ukraina und Sovjet-Russland (Moskau, Leningrad).

CXXIII. Sitzung am 18. November 1926.

Vorsitzender Hr. Levyčkyj.

1. Hr. Prof. Hruševskýj (Kyjiv) bedankt sich für die Glückswünsche der Sektion aus Anlass seines 40-jährigen wissenschaftlichen Jubiläums.

2. Das Erscheinen der Sitzungsberichte der Sektion Heft IV. wurde zur Kenntnis genommen.

3. Hr. M. Zarycki legt seine Arbeit u. T. „On the construction of biorthogonal functions“ in englischer Sprache vor (conf. Sitzungsberichte Heft IV. S. 12).

4. Hr. G. Polanskyj berichtet über das Schreiben der Filiale der ukr. Akademie der Wissenschaften in Wynnycia (Podolien), betreffend die gemeinsame Erforschung Podoliens mit der Sektion der Gesellschaft.

5. Derselbe berichtet über seine paläontologischen und geologischen Untersuchungen in Stryhanci (Bez. Tovmač).

B E R I C H T E.

On the construction of biorthogonal functions

(by Miron Zarycki (Lemberg)).

Already 1903 J. Plemelj¹⁾ has discovered the sequences of biorthogonal functions, of which the orthogonal functions are a special case. Succeeding B. Heywood²⁾ has found out this functions by a simple method of identification.

In the present note I give formulas expressing explicitely the sequences of biorthogonal functions basing on two given sequences of functions satisfying to certain conditions.

1.

Being given the numbers α_{sr} forming an infinite matrix:

¹⁾ Plemelj J. 1) Ueber die Anwendung der Fredholmschen Funktionalgleichungen in der Potentialtheorie. Sitz. Ak. Wien 1903. —
²⁾ Zur Theorie der Fredholmschen Funktionalgleichung. Monatsh. Math. Phys. 1903.

²⁾ Heywood B. Sur l'équation fonctionnelle de Fredholm. J. Math. p. appl. (6) 4, 1908.

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

we pose:

$$A_{sr} = (-1)^{s+r} \begin{vmatrix} a_{11} & & a_{1,r-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s-1,1} & & a_{s-1,r-1} \\ a_{s+1,1} & & a_{s+1,r-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & & a_{r,r-1} \end{vmatrix}$$

if $s < r$

and:

$$A_{sr} = (-1)^{s+r} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1,r-1} & a_{1,r+1} & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s-1,1} & a_{s-1,r-1} & a_{s-1,r+1} & a_{s-1,s} \end{vmatrix}$$

if $r < s$.

If $r = s$, we pose:

$$A_{rr} = \begin{vmatrix} a_{11} & & a_{1,r-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r-1,1} & & a_{r-1,r-1} \end{vmatrix}.$$

With this significations the following theorem holds true¹⁾:

$$(I) \quad \left. \begin{array}{l} \sum_{s=1}^m \sum_{r=1}^n A_{ms} A_{rn} a_{rs} = 0 \\ A_{nn} A_{n+1, n+1} \end{array} \right\} \text{for } \begin{array}{l} m \neq n \\ m = n. \end{array}$$

For proof of this theorem it is sufficient to apply the known theorems of the theory of determinants:

$$\left. \begin{array}{l} A_{1n} a_{1s} + A_{2n} a_{2s} + \dots + A_{nn} a_{ns} = 0 \\ A_{n1} a_{s1} + A_{n2} a_{s2} + \dots + A_{nn} a_{sn} = A_{n+1, n+1} \end{array} \right\} \text{for } \begin{array}{l} n \neq s \\ n = s. \end{array}$$

¹⁾ For completeness we pose: $A_{11} = 1$.

We obtain from here:

$$\sum_{s=1}^m A_{ms} \left\{ A_{1n} a_{1s} + A_{2n} a_{2s} + \dots + A_{nn} a_{ns} \right\} = 0$$

for $m < n$,

$$\sum_{r=1}^n A_{rn} \left\{ A_{m1} a_{r1} + A_{m2} a_{r2} + \dots + A_{mm} a_{rm} \right\} = 0$$

for $n < m$

and

$$\sum_{s=1}^m \sum_{r=1}^n A_{ms} A_{rn} a_{rs} =$$

$$= \sum_{s=1}^n A_{ns} \left\{ A_{1n} a_{1s} + A_{2n} a_{2s} + \dots + A_{nn} a_{ns} \right\} = A_{nn} A_{n+1, n+1}$$

for $m = n$.

2.

We denote by F the class of all functions of a single real variable. Two systems $\{U_m(t)\}$ and $\{V_n(t)\}$ of functions of F form a biorthogonal system of functions if a one-to-one correspondence can be established between them such that the integral of the product of two corresponding functions is equal to unity and the integral of the product of two non-corresponding functions is equal to zero; i. e.

$$\int_a^b U_s(t) V_r(t) dt = \begin{cases} 1 & s = r, \\ 0 & s \neq r. \end{cases}$$

By the theorem (I) we will show now the following theorem:
Being given two sequences of functions of a real variable:

$$u_s(t), v_r(t) \quad (s, r = 1, 2, 3, \dots)$$

satisfying to the conditions:

1) there exist the integrals

$$a_{sr} = \int_a^b u_s(t) v_r(t) dt \quad (s, r = 1, 2, 3, \dots)$$

2) the functions $u_s(t)$ { resp. $v_r(t)$ } are linearly independents

3) no function $u_s(t)$ { resp. $v_r(t)$ } is a linear combination of the functions $v_r(t)$ { resp. $u_s(t)$ }.

Then the sequences of functions $U_m(t)$, $V_n(t)$ defined by the formulas:

$$(II) \quad U_m(t) = \frac{1}{\sqrt{A_{mm} A_{m+1, m+1}}} \sum_{s=1}^m A_{sm} u_s(t)$$

$$V_n(t) = \frac{1}{\sqrt{A_{nn} A_{n+1, n+1}}} \sum_{r=1}^n A_{nr} v_r(t)$$

are sequences of biorthogonal functions.

For proving it it is sufficient to substitute in the integrals

$$\int_a^b U_m(t) V_n(t) dt \quad \text{for } U_m(t) \text{ and } V_n(t)$$

the values given in the formulas (II) and apply the formulas (I).

Untersuchungen in Stryhanci (Bez. Tovmač)
(von G. Polanický).

In der Verlehmungszone des jüngeren Löss II. Reste einer vernichteten Aurignacienstation. Ausbeute: Kohle, Nuclei, Stachel, Klagen; Hohlschaber — keine Knochen. Auf der unteren Terrasse wurde in den liegenden Sanden des jüngeren Lösses II. (Jungaurignacienlöss) ein kompletter Unterkiefer des *Elephas primigenius* gefunden. Vorläufig keine Menschenspuren. Die Station wird im Sommer 1927 ausgegraben.

CXXIV. Sitzung am 12. Dezember 1926.

Vorsitzender Hr. Levyčkyj.

1. Die wohlwollende Beantwortung der Schreibens der Sektion, betreffend die Herausgabe der Werke des M. Ostrogradskyj, seitens der Akademie der Wissenschaften in Kyjiv wurde zur Kenntnis genommen.

2. Hr. Prof. I. Feščenko-Čopivskýj (Krakau) gibt eine Übersicht seiner weiteren Untersuchungen über die Cementation des Nickels mit Bor und Beryllium.

Die Arbeit erscheint in der ukrainischen Sprache im Bd. XXVI. der Sammelchrift der Sektion.

3. Es wurde beschlossen, das 30-jährige Bestehen der Sektion und der Redaktion ihrer Sammelchrift feierlich zu begehen.

B E R I C H T.

Die Cementation des Nickels mit Bor und Beryllium
(von I. Fetschenko-Tschopivskyj (I. Feščenko-Čopivskýj)).

Ni und Fe haben sehr nahe physikalische und chemische Eigenschaften. Auf Grund unserer früheren Untersuchungen (Sitzungsberichte

CXXV. Sitzung am 25. Dezember 1926.

Vorsitzender Hr. Levyčkyj.

1. Der Vorsitzende widmet einen warmen Nachruf dem verstorbenen wirklichen Mitglied der Sektion weil. Dr. Krum Drončilloff, a. ö. Professor der Geographie an der Universität Sofia, sowie dem weil. Dr. Ivan Stefanovyč, Mitglied der ärztlichen Kommission der Sektion.

2. Das Erscheinen der ärztlichen Sammelschrift, Jahrgang IV. Heft II. (Organ der ärztlichen Kommission der Sektion u. der ukr. ärztlichen Gesellschaft) wurde zur Kenntnis genommen.

3. Es wurde beschlossen, an dem im Juni 1927 in Lemberg stattfindenden Kongreß der ukr. Ärzte eine besondere Gruppe der ukr. Naturforscher zu bilden. Zu dem Zwecke wurden seitens der Sektion die Hrn Dr. Vl. Kučer u. G. Polanskyj als Mitglieder des Komitees, das die Vorarbeiten des Kongresses zu besorgen hat, designiert.

CXXVI. Sitzung am 20. Jänner 1927.

Vorsitzender Hr. Levyčkyj.

1. Der Vorsitzende widmet einen Nachruf dem im Dezember 1926 verstorbenen Hofrat Aleksander Barwinskyj, dem ersten Obmann der Ševčenko-Gesellschaft der Wissenschaften.

2. Hr. Zaryčkyj legt eine Arbeit u. T. „Quelques notions sur l'espace connexe“.

Diese Arbeit erscheint im Bd. XXVI. der Sammelschrift in ukrainischer Sprache.

3. Es wurde zur Kenntnis genommen, dass Hr. Dr. M. Čajkovskýj einen Index zu den Bänden 1—25 der Sammelschrift vorbereitet.

4. Hr. Polanskyj berichtet über den in Walawa bei Pere-myšl gefundenen Unterkiefer des diluvialen Menschen.

5. Es wurde der Anteil der Sektion an dem im Sommer l. J. in Polen stattfindenden allslavischen Geologen- Geographen- u. Ethnologentage besprochen.

B E R I C H T E.

Quelques notions sur l'espace connexe

(par M. Zarycki).

Dans ma note „Quelques notions fondamentales d'Analysis situs (Fund. Math. IX.) j'analyse quatre axiomes concernant la notion de la

frontière d'un ensemble. Dans la note présente j'ajoute au système d'axiome mentionné un nouveau axiome tel que tous les cinq axiomes sont indépendants. Le nouveau système implique deux théorèmes:

1. L'espace est un continu.
2. Un domaine ouvert ne peut être fermé (sauf l'ensemble vide et l'espace).

Homo sapiens fossilis aus Walawa
(von Georg Polánkyj).

Ende November 1926 habe ich eine Mitteilung erhalten, dass in Walawa, 14 km nördlich von Peremyšl (Przemysl) am rechten Ufer des Sanflusses ein menschliches Unterkiefer mit zwei Mammutmolaren aus den diluvialen Ablagerungen ausgewaschen worden wären. Leider konnte bei der Übernahme das geologische Alter der fossilführenden Schichte wegen Schneefalles nicht definitiv festgestellt werden. Das gefundene Unterkiefer sowie auch die Mammutmolaren zeigen denselben Erhaltungszustand, denselben sehr hohen Grad der Fossilisation. Speziell ist das Unterkiefer so ergiebig mit den Eisenverbindungen imprägniert, dass es steinhart und chocoladebraun gefärbt ist (Sumpfeisenerzpatina). Auch die Zähne der mandibula sind sichtlich gelblich gefärbt. Ganzdenselben Fossilisationszustand sowie dieselbe Färbung habe ich an den Resten der interglazialen Antiquusfaunen von Rudki beobachtet.

In den leeren Alveolen des Unterkiefers fand sich glücklicherweise ein wenig von der ursprünglichen Mutterablagerung. Die Mikroskopuntersuchung hat gezeugt, dass die Mutterablagerung ein feinkörniger, grünlich-blauer, fluvialer Quarzsand ist. In diesem Sande fand ich folgende Beimengungen: Limonit, Kalziumcarbonat, schwarze karpathische, tertiäre Hornsteine und winzige Fragmente verkohlter Blätter.

Ähnliche Sande sind mir und in der Litteratur (Łomnicki, Atlas geologiczny z. XII) als letztinterglaziale entweder letztglaziale bekannt. In der Umgebung von Walawa beschreibt Łomnicki 3 Terrassen; für uns kommt nur die sogenannte „altalluviale“ Terrasse (terasa rdzinnastaroualwjalna) in Betracht. Sie bildet am San bei Walawa 6–8 m hohe, senkrechte Uferwände mit folgendem Profil: (Łomnicki l. c. 26)

- | | | |
|---|---|-------|
| a) Humusboden | } | 1.5 m |
| Gelber Lehm mit senkrechter Spaltung | | |
| b) Lehm; dunkelgrau, kalkreich, Limonitkonkretionen, senkrechte Spaltung | | |
| Derselbe Lehm mit verkohlten Blättern und Stämmen (Sumpflehm) | | |
| c) Grünlich-blaue Sande, wenig kalkführend mit zahlreichen verkohlten Wurzeln und Blättern. | | |

In diesen letzten Sanden finden sich sehr oft Knochen von (Łomnicki l. c. 14):

Elephas primigenius
Rhinoceros
Megaceros euryceros.