М. Кравчук.

Про Green'ове та Stokes'ове перетворення.

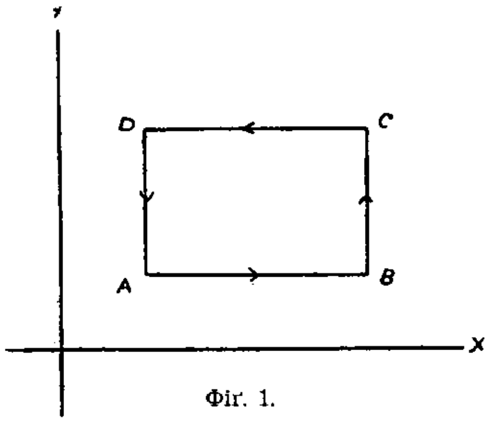
[Über die Sätze von Green und Stokes von *M. Krawtchouk].*

І. Перетворення криволінійного інтеграла в подвійний на площі.

Із ріжних способів доводу рівности

$$(1) \quad \int_C \Big[P(x,y)dy - Q(x,y)dx\Big] = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy,$$

де C є замкнений контур без кратних точок, а S — обмежена ним частина площі XY, наступний спосіб, гадаємо, має деякі переваги завдяки ширині тих обмежних умов, що він їх потребує, та відповідності фізичному змістові твердження, що може бути висловлений так: потік вектора (P, Q) через плоский контур C дорівнює розбігові того вектора на полі S цього контура. При тім припускаємо, що функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ мають суцільні похідні $\frac{\partial P}{\partial x}$ та $\frac{\partial Q}{\partial y}$ скрізь на полі S (але можуть їх не мати на контурі C), а самі $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ є суцільні на полі S разом із контуром C (отже на множині точок $S+C$) — перша що до змінного x, друга — що до змінного y.



Фіґ. 1.

Нехай тим часом контур C є прямокутник $ABCD$ (див. фіґ. 1), що має боки рівнобіжні координатним осям, притім нехай $\frac{\partial P}{\partial x}$ та $\frac{\partial Q}{\partial y}$ істнують і є суцільні не тільки на полі S цього контура, але й на множині $S+C$. Тоді, з огляду на те, що на боках AB та CD буде $dy=0$, маємо:

$$\int_C P(x,y)dy=\int_{BC} Pdy+\int_{DA} Pdy=\int_{BC} Pdy-\int_{AD} Pdy=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int_{y_1}^{y_2} Pdy\right)dx=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial P}{\partial x}\,dydx=\int\int_S\frac{\partial P}{\partial x}\,dxdy,$$

де x_1 є абсциса точок A та D, x_2 — абсциса точок B та C, y_1 — ордината точок A та B, y_2 — ордината точок C та D.

Так само для контура $ABCD$ можна довести, що

$$\int_C Q(x,y)\,dx=-\int\int_S\frac{\partial Q}{\partial y}\,dxdy.$$

Отож взір (1) доведено для зазначеного частинного випадку. Далі ясно, що він тим самим є доведений для всякого поля S_1, що разом зі своїм обводом C_1 належить до загального поля S в (1) і складається з довільної кількости прямокутників, які мають боки рівнобіжні координатним осям (див. фіґ. 2).

Отже, щоб довести теорему у випадку довільного контура C, треба лише показати, що ріжниця (див. фіґ. 2)

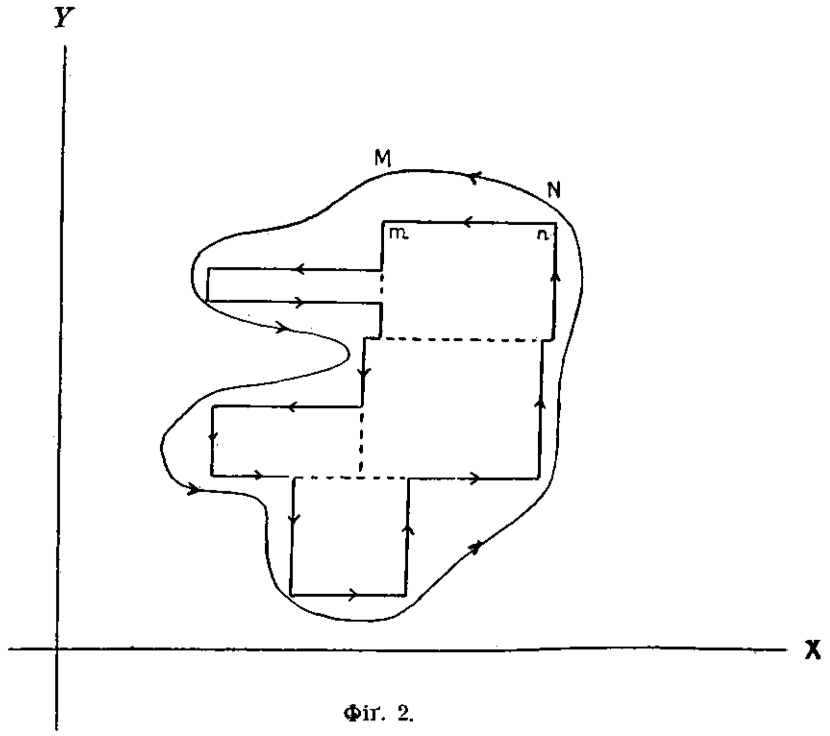
$$\int_C (Pdy-Qdx)-\int_{C_1}(Pdy-Qdx)$$

іде до нуля, коли до нуля йде віддаль між контурами C та C_1, взята так у напрямі оси X-ів, як і в напрямі оси Y-ів. А для цього досить завважити, що нпр. величина

$$\left|\int_{MN} Qdx-\int_{mn} Qdx\right|$$

(див. фіґ. 2), де частину MN обводу C та частину mn обводу C_1 узято так, що вони мають спільну проєкцію на осі X-ів, не перевищує добутку з довжини mn та з найбільшої вартости функції

$$T=|\,Q(x,y')-Q(x,y'')\,|,$$



Фіг. 2.

де (x, y') є довільна точка дуги MN, а (x, y'') — точка з тою самою абсцисою на відтинку mn; далі, повторивши що до функції $Q(x, y)$, з очевидними відмінами, відомий Weierstrass'ів довід одностайної суцільности суцільної функції в замкненім обсягу, дістанемо, що T одностайно йде до нуля разом із величиною $| y'-y'' |$. Отож іде до нуля й

$$\left| \int_C Qdx - \int_{C_1} Qdx \right|,$$

як що C має обмежену довжину.

Подібні міркування можна навести й що до величини

$$\left| \int_C Pdy - \int_{C_1} Pdy \right|.$$

Рівність (1) доведена.

Зовсім подібно можна довести й рівність

$$(2)\qquad \int\limits_C \Big[P(x,y)dx + Q(x,y)dy\Big] = \iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy\,,$$

як що функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ мають на полі S суцільні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$ та $\frac{\partial Q}{\partial x}$, а самі $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ є суцільні на множині точок $S+C$ — перша що до змінного y та друга що до змінного x. Зміст рівности (2) можна висловити так: робота вектора (P,Q) на плоскім контурі C дорівнює його вирові на полі S того контура.

Взір (1) є т. зв. Green'ове перетворення на площі, а взір (2) — перетворення Stokes'ове.

2. Поглиблення попередніх вислідів.

Самий довід попереднього параґрафу показує, що рівність

$$(3)\qquad \int\limits_C Q(x,y)dx = -\iint\limits_S \frac{\partial Q}{\partial y} dxdy$$

лишиться правдива, коли подані там обмежні умови змінити так:

1. Замісць вимоги, щоб довжина C істнувала, можна взяти лише вимогу, щоб сума боків контура C_1, рівнобіжних осі X-ів, була обмежена (отже нпр. у жадній точці контур C може не мати дотичної, ба навіть C може не мати певної довжини в узагальненім розумінні[1])).

2. Замісць фактично використаної в доводі вимоги, щоб крива C квадрувалася, отже щоб поле S мало певну величину, як границю величини поля S_1, можна, не вимагаючи навіть суцільности кривої C, обмежитися вимогою, щоб істнував такий контур серед контурів C_1, який майже скрізь бувби довільно близький до C.

Окрім того, в рівності (3) інтеґрали можна брати в Lebesgue'овім розумінні, замінивши поле S його осередньою мірою, а істнування та суцільности похідної $\frac{\partial Q}{\partial y}$ вимагати не скрізь, а майже скрізь на полі S.

---

[1]) Про узагальнене поняття довжини кривої див. нпр. роботу Scheffer'a в Acta Mathematica. t. 5.

3. Застосування до функцій комплексного змінного.

Доведімо помічну теорему:

Коли функція $u(x,y,...)$ має перші похідні по всіх змінних в усіх точках обсягу S та є одностайно суцільна в цім обсягу, то ті похідні є самі одностайно суцільні в обсягу S.

Обмежуючися випадком двох незалежних змінних, маємо довести рівність:

$$\lim_{h,k=0} \left| u'_x(x+h, y+k) - u'_x(x,y) \right| = 0.$$

Для цього покажімо вперед, що

$$\left| u'_x(x,y) - \frac{u(x+H,y) - u(x,y)}{H} \right| < \frac{E_H}{2}, \tag{4}$$

де

$$E_H \longrightarrow 0, \quad \text{коли} \quad H \longrightarrow 0$$

і E_H не залежить від вибору точки (x,y) в обсягу S, аби лише й точка $(x+H,y)$ до нього належала. Використовуючи знов ту саму Weierstrass'ову думку, припустімо, що остання нерівність неправдива, отже що, хоч якеб мале не брати $|H|$, все знайдуться на S такі точки (x,y), що в них буде

$$\left| u'_x(x,y) - \frac{u(x+H,y) - u(x,y)}{H} \right| \geqq E > 0,$$

де E є якась стала величина. Тоді те саме можна твердити і про одну (що найменше) з довільного числа яких-небудь частин, на які поділимо S; ділячи цю частину на дрібніші частки і повторюючи це міркування без кінця, прийдемо до висновку, що нерівність (4) є неправдива в якійсь певній граничній точці (point limite) обсягу S, що можливо лише тоді, коли ця точка не належить до S.[1])

Отож, коли точки $(x+h, y+k)$ та $(x+h+H, y+k)$ належать до S, то (4) дає:

$$\left| u'_x(x+h, y+k) - \frac{u(x+h+H, y+k) - u(x+h, y+k)}{H} \right| < \frac{E_H}{2}.$$

Комбінуючи останню нерівність із (4), легко дістанемо:

---

[1]) Пор. замітку E. Goursat в Transactions of the American Math. Society I, 1900. Він доводить ту саму нерівність (4) (для випадку, коли u є функція комплексного змінного), беручи замкнений обсяг S.

$$(5) \qquad \left| u'_x(x+h, y+k) - u'_x(x, y) - \frac{u(x+h+H, y+k) - u(x+H, y)}{H} + \right.$$

$$\left. + \frac{u(x+h, y+k) - u(x, y)}{H} \right| < E_n .$$

А що, з огляду на суцільність функції u можна числа $|h|$ та $|k|$ взяти такі малі, щоб було:

$$\left| u(x+h, y+k) - u(x,y) \right| < \frac{|H|^2}{2}$$

в усіх точках обсягу S, то (5) дає:

$$\left| u'_x(x+h, y+k) - u'_x(x, y) \right| < E_n + |H| ,$$

що й доводить теорему.

Припустімо тепер, що у функцій $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ параґрафу 1 істнують одночасно всі перші похідні:

$$\frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y}$$

в усіх точках обсягу S, а самі функції є суцільні на множині точок $S+C$. Тоді одночасно будуть правдиві обидва взори (1) та (2), отже й рівність:

$$-\int_C (Pdy - Qdx) + i\int_C (Pdx + Qdy) = -\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy +$$

$$+ i \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy ,$$

бо похідні від P та Q, як доведено, є суцільні в усіх точках поля S.

Остання рівність дає узагальнення основної теореми з теорії функцій комплексного змінного, т. зв. теореми Cauchy-Goursat:

Коли функція

$$f(z) = Q(x, y) + i\, P(x, y)$$

комплексного змінного

$$z = x + iy$$

має похідну

$$f'(z) = \frac{\partial Q}{\partial x} + i\, \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} - i\, \frac{\partial Q}{\partial y}$$

в усякій осередній точці обсягу S і є суцільна на множині точок $S+C$, де C є границя поля S, то

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

Узагальнення полягає в тім, що не вимагається істнування похідної $f'(z)$ на контурі C, і що твердження лишається правдиве при поширених умовах параґрафу 2.

4. Green'ове перетворення в просторі.

У тривимірнім просторі рівність подібна до взору (1) є

$$(6)\quad \iint_S (Pdydz+Qdzdx+Rdxdy)=\iiint_V \left(\pm\frac{\partial P}{\partial x}\pm\frac{\partial Q}{\partial y}\pm\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz\,,$$

де V є якийсь обмежений обєм, а S — його поверхня. Тут ізнов припускаємо, що в осеред обєму V функції P, Q, R змінних x, y, z мають суцільні похідні:

$$\frac{\partial P}{\partial x}\,,\ \frac{\partial Q}{\partial y}\,,\ \frac{\partial R}{\partial z}\,,$$

а на множині точок $V+S$ самі функції P, Q та R суцільні — перша що до змінного x, друга що до y і третя що до z.

Перший довід рівности (6). Міркуваннями подібними до тих, що подано при доводі рівности (1), легко довести, що коли V є обєм рівнобіжностінника, якого стіни є рівнобіжні координатним площам, причім $\frac{\partial P}{\partial x}$ істнує і є суцільна також і на поверхні S цього рівнобіжностінника, то

$$\iint_S Pdydz=\pm\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x}dxdydz$$

Так само

$$\iint_{S_1} Pdydz=\pm\iiint_{V_1} \frac{\partial P}{\partial x}dxdydz\,,$$

де V_1 є обєм складений із рівнобіжностінників, що мають стіни рівнобіжні координатним площам і цілком належать до обєму V в (6), а S_1 — його поверхня.

Нарешті граничний перехід, коли точки поверхні S_1 нескінчено зближаються до S, доведе рівність (6) у випадку:

$$Q = const, \quad R = const.$$

Повторюючи подібні міркування що до функцій Q та R доведемо (6) цілком.

Узагальнення обмежних умов що до множин точок V та S, а також що до функцій P, Q, R, подібні до тих, що дано в параґрафі 2, зробити не трудно.

Дуугий довід рівности (6). Обмежмося тут тим випадком, коли проста рівнобіжна осі Z-ів може мати з поверхнею S не більше як дві спільні точки. Визначмо на S криву $C(z)$ умовою:

$$z = const;$$

ця крива є замкнена. Тоді

$$(7) \qquad \iint\limits_S Pdydz = \int\limits_{z=z_0}^{z_1} \Big(\int\limits_{C(z)} Pdy \Big) dz,$$

де z_0 є найменша, а z_1 — найбільша з координат z точок поверхні S. З другого боку, на підставі взору (1), маємо:

$$\int\limits_{C(z)} Pdy = \iint\limits_{S(z)} \frac{\partial P}{\partial x} dxdy,$$

де $S(z)$ є поле плоскої кривої $C(z)$; а тоді (7) перепишеться так:

$$\iint\limits_S Pdydz = \int\limits_{z_0}^{z_1} \Big(\iint\limits_{S(z)} \frac{\partial P}{\partial x} dxdy \Big) dz;$$

ця рівність є, очевидно, тотожна з

$$\iint\limits_S Pdydz = \iiint\limits_V \pm \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz.$$

Не спиняємося тут над тим, як до цього доводу пристосувати взагальнення параґрафу 2.

5. Stokes'ове перетворення в просторі.

Для простору тривимірного рівність, подібна до рівности (2), є

$$(8) \qquad \int_C (Pdx + Qdy + Rdz) =$$

$$= \iint_S \left[\pm \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) dydz \pm \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) dzdx \pm \right.$$

$$\left. \pm \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dxdy \right],$$

де C є замкнена просторова крива без кратних точок, а S — яканебудь обмежена нею поверхня. Припускаємо, що в усіх осередніх точках поверхні S функції P, Q та R змінних x, y, z мають суцільні похідні:

$$\frac{\partial P}{\partial y}, \ \frac{\partial P}{\partial z}, \ \frac{\partial Q}{\partial x}, \ \frac{\partial Q}{\partial z}, \ \frac{\partial R}{\partial x}, \ \frac{\partial R}{\partial y},$$

а самі P, Q та R є суцільні на поверхні S разом із її границею C, тоб то на множині точок $S + C$.

Перший довід рівности (8). Доведімо (8) тим часом для випадку, коли контур C є криволінійний трикутник, що цілком складається з осередніх точок множини S, причім його боки визначаються рівнаннями:

$$x = x_0; \quad y = y_0; \quad z = z_0$$

(див. фіґ. 3). Нехай проти боку

$$x = x_0$$

лежить вершок A $(x_1, y_0\ z_0)$, проти боку

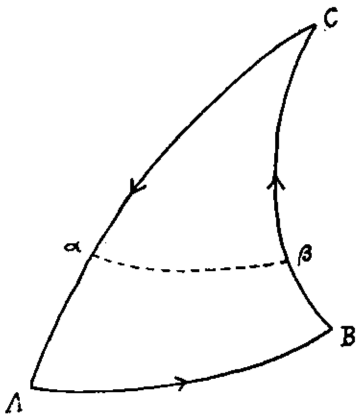
$$y = y_0$$

вершок B (x_0, y_1, z_0) і проти боку

$$z = z_0$$

вершок C (x_0, y_0, z_1); окрім того, нехай $\alpha\beta$ є лінія перерізу поля цього трикутника площою

$$z = const.$$



Фіг. 3.

З огляду на те, що на лінії BC змінне x не міняється, маємо:

$$\int_{BC} Pdx = 0;$$

отже

$$(9)\qquad \int\limits_{\text{обвід } ABC} Pdx = \int\limits_{AB} Pdx - \int\limits_{AC} Pdx.$$

Далі очевидно

$$(10)\qquad \int\limits_{AB} Pdx = \int\limits_{z_0}^{z_1} \left(\frac{\partial}{\partial z} \int\limits_{\alpha\beta} Pdx \right) dz = \pm \iint\limits_{\text{поле } ABC} \frac{\partial P}{\partial z}\, dxdz.$$

Так само

$$(11)\qquad \int\limits_{AC} Pdx = \pm \iint\limits_{\text{поле } ABC} \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy.$$

Отже рівність (9), з допомогою (10) та (11), переходить у

$$\int\limits_{\text{обвід } AB} Pdx = \pm \iint\limits_{\text{поле } ABC} \left(\frac{\partial P}{\partial z}\, dxdz - \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy \right).$$

Повторивши подібні міркування що до

$$\int Pdy \quad \text{та} \quad \int Rdz$$

доведемо Stokes'ову теорему для випадку, коли крива C є ABC.

Загальний випадок знов доводиться подібно до того, як у параґрафі 1. Заповнюємо поверхню S із такою малою недостачою, як хочемо, криволінійними трикутниками типу ABC; це можна зробити нпр. так: поділити поверхню S на смуги рядом рівнобіжних площ

$$z = const,$$

а тоді кожну смугу поділити на трикутники, поперемінно розрізуючи її то площою

$$x = const,$$

то площою

$$y = const$$

та належно добираючи за всяким разом числову вартість *const*. Нехай спільна поверхня цих трикутників є S_1, а її границя C_1. Тоді, на підставі того, що в цім параґрафі доведено, маємо:

$$\int\limits_{C_1} (Pdx + Qdy + Rdz) =$$

$$= \iint\limits_{S_1} \left[\pm \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) dydz \pm \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) dzdx \pm \right.$$

$$\left. \pm \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdy \right],$$

а звідси, з допомогою такого самого граничного переходу, як у параґрафі 1, прийдемо до (8).

Узагальнення параґрафу 2, з відповідними змінами, поширюються й на взір (8).

Другий довід рівности (8). Обмежмося тут випадком, коли не тільки крива C, але й її проєкції на координатних площах XY та XZ не мають кратних точок; нехай ці проєкції є C_z та C_y, а поля ними обмежені S_z та S_y. Тоді

$$(12) \qquad \int\limits_C Pdx = \int\limits_C Pdx = \pm \iint\limits_{S_z} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

де похідну $\left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)$ треба брати, памятаючи, що z є функція від x та y; отож (12) можемо переписати так:

$$\int\limits_C Pdx = \pm \iint\limits_{S_z} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) dxdy =$$

$$= \pm \iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial y} dxdy \pm \iint\limits_{S_z} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) dx.$$

Останній інтеґрал на правій стороні візьмімо вперед по змінному y $(x = const)$, а тоді по змінному x; тоді попередня рівність остаточно напишеться так:

$$\int\limits_C Pdx = \iint\limits_S \left(\pm \frac{\partial P}{\partial y} dxdy \pm \frac{\partial P}{\partial z} dxdz \right),$$

чого й досить для доводу рівности (8).

Цей довід не так легко надається до взагальнень, про які говорено в першім доводі.