

Академик М. Брилов.\*)

Спосіб нескінчених визначників у теорії лінійних інтегральних рівнянь.

Sur la méthode de déterminants infinis dans la théorie des équations intégrales linéaires

par *Nicolas Kryloff*, membre de l' Académie des Sciences d' Ukraine.



У цій роботі нам доведеться скористуватися з наступних вислідів Н. von Koch'a.

Нескінчений визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1+a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{ni} & a_{n2} & \dots & 1+a_{nn} \end{vmatrix}$$

називаємо абсолютно збіжним, коли збігається абсолютно так нескінчений добуток:

$$M = \prod_{i=1}^{\infty} (1+a_{ii}),$$

як і сума з усіх добутоків, що повстають із  $M$  через усі можливі переставлення других значків. Для абсолютної збіжності визначника  $\Delta$  досить збіжності рядів:

$$(I) \quad \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ii}| \quad \text{та} \quad \sum_{i, k=0}^{\infty} a_{ik}^2.$$

\*) Ця робота є один із параграфів II розділу ширшої роботи, що тепер друкується в „Annales de la Faculté des Sciences de l' Université de Toulouse“.

Коли справджені умови (I), то

$$\Delta = \Delta_{ii} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \Delta_{ik} = \Delta_{kk} + \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} \Delta_{ik},$$

де  $\Delta_{ik}$  є підвизначник, що відповідає елементові  $a_{ik}$ , а також

$$\Delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n,$$

де

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1+a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 1+a_{nn} \end{vmatrix};$$

окрім того, тоді абсолютно збігаються й усі підвизначники визначника  $\Delta$  і суми:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\Delta_{ik})^2 \quad \text{та} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta_{ik})^2.$$

Нарешті, коли елементи визначника  $\Delta$  є голоморфні функції скінченного числа комплексних аргументів, а умови (I) справджуються в певнім замкненім обсягу зміни тих аргументів, то визначник  $\Delta$  та всі його підвизначники є теж голоморфні функції і  $\Delta_n$  одностайно іде до  $\Delta$ <sup>1)</sup>.

Із теорії нескінчених систем лінійних рівнянь відзначимо тут наступні висліди Н. von Kocha.

Коли, при істнуванні умов (I), система

$$(II) \quad x_i + \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

має таку розвязку, що сума

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$$

збігається і не є нуль (далі тільки такі розвязки й розглядатимемо), то

$$\Delta \neq 0$$

і навпаки.

<sup>1)</sup> Див. Н. von Koch, Sur un théorème de Hilbert, Math. Ann. 59, стр. 266—283.

Коли

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_r \\ k_1 & k_2 & \dots & k_r \end{pmatrix}$$

є відмінний від нуля підвизначник  $r$ -го ступня і притім усі підвизначники нижчого ступня є нулі, то найзагальніша розв'язка системи (II) є

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_r \\ k_1 & k_2 & \dots & k_r \end{pmatrix} x_k = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_r \\ k & k_2 & \dots & k_r \end{pmatrix} x_{k_1} + \dots + \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_r \\ k_1 & k_2 & \dots & k \end{pmatrix} x_{k_r}$$

( $k = 1, 2, \dots$ ), де величини

$$x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_r}$$

є довільні.

Щоб система рівнянь

$$(III) \quad x_i + \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = c_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

мала єдину певну розв'язку, треба і досить, щоб

$$\sum_1^{\infty} c_i^2$$

збігалася, і щоб

$$\Delta \neq 0.$$

По цих попередніх увагах звертаємося до нашої задачі.

Як відомо, довід збіжності Ritz'ового способу наближеного розв'язання диференціальних, інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь математичної фізики звичайно базується на певних нерівностях, що їх повинні справджувати дані функції задачі<sup>1)</sup>. Ми маємо тут на меті позбутися цих обмежень у випадку інтегрального рівняння типу Fredholm'a:

$$(1) \quad u(x) + k \int_0^1 \lambda(x, X) u(X) dX = f(x)$$

з допомогою вище поданих теорем із теорії нескінчених визначників та нескінчених систем лінійних рівнянь.

Як відомо, Ritz'ів спосіб для рівняння (1) зводиться на визначення сучинників  $a_i^{(m)}$  скінченої суми:

<sup>1)</sup> Пор. нпр. мою роботу „Про різні узагальнення Ritz'ового методу та методу найм. квадр. для набл. інтегр. рівнянь матем. фізики“ (Труди Ф.-М. Відділу УАН, т. III, вип. 2, 1926).

$$(2) \quad u_m = \sum_{i=1}^m a_i \psi_i^{(m)}(x),$$

де  $[\psi_i(x)]$  є система функцій ортогональна і нормована, із умов:

$$(3) \quad \int_0^1 \left[ u_m + k \int_0^1 \lambda(x, X) u_m(X) dX - f(x) \right] \psi_i(x) dx = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m),$$

і до доводу, що

$$u = \lim_{m \rightarrow \infty} u_m.$$

Натоміть ми замість (2) візьмемо

$$(4) \quad u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \psi_i(x);$$

та сучинники  $a_i$  визначатимемо з умов:

$$(5) \quad \int_0^1 \left[ u + k \int_0^1 \lambda(x, X) u(X) dX - f(x) \right] \psi_i(x) dx = 0.$$

Зазначивши

$$b_{ie} = \int_0^1 \int_0^1 \lambda(x, X) \psi_i(x) \psi_e(X) dx dX,$$

бачимо, що визначник системи лінійних рівнянь (3) є

$$(6) \quad D^{(n)}(k) = \begin{vmatrix} kb_{11} + 1 & b_{12} \dots & b_{1n} \\ b_{21} & kb_{22} + 1 & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} \dots & kb_{nn} + 1 \end{vmatrix},$$

а визначник системи (5) є

$$(7) \quad D(k) = \begin{vmatrix} kb_{11} + 1 & b_{12} \dots & b_{1n} \dots \\ b_{21} & kb_{22} + 1 \dots & b_{2n} \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} \dots & kb_{nn} + 1 \dots \end{vmatrix}.$$

Тепер доведемо збіжність рядів

$$(8) \quad \sum_{i, e} b_{ie}^2 \quad \text{та} \quad (9) \quad \sum_i |b_{ii}|.$$

На підставі дослідів Hilbert'a<sup>1)</sup>,

$$\sum_{i, e} b_{ie}^2 = \sum_{i, e} \left[ \int_0^1 \int_0^1 \lambda(x, X) \psi_i(x) \psi_e(X) dx dX \right]^2 = \int_0^1 \int_0^1 \left[ \lambda(x, X) \right]^2 dx dX,$$

що доводить збіжності ряду (8).

Завваживши тепер, що

$$b_{ii} = \int_0^1 \int_0^1 \lambda(x, X) \psi_i(x) \psi_i(X) dx dX$$

і припустивши, що  $\lambda(x, X)$  є вислід ітерації якогось симетричного зерна (ядра)  $K(x, X)$ , отже

$$(10) \quad \lambda(x, X) = \int_0^1 K(x, y) K(y, X) dy,$$

дістанемо :

$$\begin{aligned} b_{ii} &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 K(x, y) K(y, X) \psi_i(x) \psi_i(X) dx dy dX = \\ &= \int_0^1 \left[ \int_0^1 K(x, y) \psi_i(x) dx \right]^2 dy = \sum_j c_{ij}^2, \end{aligned}$$

де

$$c_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 K(x, y) \psi_i(x) \psi_j(y) dx dy$$

є очевидно сучинник Fourier'a функції

$$\int_0^1 K(x, y) \psi_i(x) dx.$$

Із очевидної рівності

$$\sum_i |b_{ii}| = \sum_{i, j} c_{ij}^2$$

випливає збіжність ряду (9), для чого досить лише у (8) замінити  $\lambda(x, X)$  на  $K(x, X)$ . Ясно нпр., що коли  $\lambda(x, y)$  має форму

$$\sum_{\lambda=1}^p \alpha_\lambda(x) \beta_\lambda(y),$$

<sup>1)</sup> Hilbert, Grundzüge ein. allg. Theorie der lin. Integralgleichungen, стр. 445.

де системи  $\alpha_\lambda(x)$ ,  $\beta_\lambda(x)$  є біортогональні та нормальні, то умова (10) справджується, бо тоді зерно (ядро) не міняється від ітерації<sup>1)</sup>.

Завважмо ще, що міркування тут наведені лишаються, з незначними змінами, правдиві, коли

$$\lambda(x, X) = \int_0^1 K_1(x, y) K_2(y, X) dy,$$

де  $K_1$  та  $K_2$  є функції симетричні. Справді рівняння замкненості дає:

$$(11) \quad b_{ii} = \sum_j c_{ij}^{(1)} c_{ij}^{(2)},$$

де

$$c_{ij}^{(1)} = \int_0^1 \int_0^1 K_1(x, y) \psi_i(x) \psi_j(y) dx dy; \quad c_{ij}^{(2)} = \int_0^1 \int_0^1 K_2(x, y) \psi_i(x) \psi_j(y) dx dy;$$

застосувавши до (11) нерівність Cauchy, дістанемо збіжність ряду (9), бо ряди

$$\sum_{i,j} c_{ij}^{(1)2} \quad \sum_{i,j} c_{ij}^{(2)2}$$

збігаються з огляду на симетричність функцій  $K_1$  та  $K_2$ .

Отож бачимо, що визначник (7) є абсолютно збіжний, а система рівнянь (5) при умові  $f(x) = 0$  розв'язується щодо невідомих  $\alpha_i$ .

Окрім того  $D(k)$  та всі його підвизначники є цілі трансцендентні функції параметра  $k$ , а рівняння

$$D(k) = 0$$

має безліч дійсних додатних корінів:

$$k_1, k_2, \dots;$$

коли  $k$  дорівнює одному з них  $k_s$ , то хоч один із підвизначників  $D_{ir}(k_s)$  не є нуль, і система (5) має розв'язку:

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \dots : \alpha_n : \dots = D_{11}(k_s) : D_{12}(k_s) : \dots;$$

відповідна „особлива“ функція  $\varphi_s(x)$  напишеться в наступній формі:

<sup>1)</sup> Vivanti, Elementi della teoria delle equazioni integrali lineari, cr. 180—182.

$$\varphi_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_{in}(k_s) \psi_n(x),$$

де значок  $i$  довільний при умові, що хоч один із визначників  $D_{ir}(k_s)$  не є нуль. Щоб довести всі ці твердження, досить завважити, що з огляду на збіжність суми

$$\sum_1^{\infty} a_i^2$$

(згідно з дослідями Н. von Koch'a), можна, помноживши рівняння (5) відповідно на  $d_i$  (де  $d_i$  є сучинник Fourier'a „довільної“ функції, що стає нулем у точках 0 та 1) застосувати рівняння замкнености та основну лемму варіаційного числення; звідси й вийде, що  $\varphi_s(x)$  є „особлива“ функція, а  $k_s$  особлива вартість параметру, отже дійсна й додатна з огляду на симетричність і додатність  $\lambda(x, X)$ .

Тепер для доводу Ritz'ового способу (див. рівн. (3) та визначник (6)) покажемо, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} | \varphi_s(x) - \varphi_s^{(n)}(x) | = 0,$$

де  $\varphi_s(x)$  справджує рівняння

$$\varphi_s(x) + k_s \int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_s(X) dX = 0,$$

отже й умови

$$(12) \quad \int_0^1 \left[ \varphi_s(x) + k_s \int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_s(X) dX \right] \psi_i(x) dx = 0 \quad (i=1, 2, \dots, \infty),$$

а  $\varphi_s^{(n)}$  — умови:

$$(13) \quad \int_0^1 \left[ \varphi_s^{(n)}(x) + k_s \int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_s^{(n)}(X) dX \right] \psi_i(x) dx = 0, \quad \text{коли } i \leq n,$$

і окрім того умови:

$$(14) \quad \int_0^1 \left[ \varphi_s^{(n)}(x) + k_s \int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_s^{(n)}(X) dX \right] \psi_i(x) dx = \\ = -k_s \int_0^1 \left[ \int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_s^{(n)}(X) dX \right] \psi_i(x) dx, \quad \text{коли } i > n.$$

Комбінуючи (12), (13) та (14), дістанемо:

$$\int_0^1 \left\{ \left[ \varphi_s(x) - \varphi_s^{(n)}(x) \right] + k_s \int_0^1 \lambda(x, X) \left[ \varphi_s(X) - \varphi_s^{(n)}(X) \right] dX \right\} \psi_i(x) dx =$$

$$= \begin{cases} (k_s - k_s^{(n)}) \int_0^1 \left[ \int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_s^{(n)}(X) dX \right] \psi_i(x) dx, & \text{коли } i \leq n \\ -k_s \int_0^1 \left[ \int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_n(X) dX \right] \psi_i(x) dx, & \text{коли } i > n, \end{cases}$$

а звідси:

$$(15) \quad \varphi_s^{(n)}(x) - \varphi_s(x) + k_s \int_0^1 \lambda(x, X) \left[ \varphi_s(X) - \varphi_s^{(n)}(X) \right] dX =$$

$$= \varphi_s^{(n)} + k_s \int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_s^{(n)}(X) dX = R_n(x),$$

де

$$(16) \quad R_n = \sum_{i=1}^n (k_s - k_s^{(n)}) \psi_i(x) \int_0^1 \left[ \int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_s^{(n)}(X) dX \right] \psi_i(x) dx +$$

$$+ \sum_{i=n}^{\infty} k_s \psi_i(x) \int_0^1 \left[ \int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_n(X) dX \right] \psi_i(x) dx.$$

Алеж остача тригонометричного розвинення функції, що справджує Lipschitz'ову умову (з сучинником  $\lambda$ ), може бути обмежена виразом  $\frac{A\lambda}{n}$  ( $A = \text{const}$ ), як довів D. Jackson<sup>1)</sup>, і хоч функція

$$\int_0^1 \lambda(x, X) \varphi_n(X) dX$$

залежить від  $n$ , її Lipschitz'ів сучинник напевно не залежить від  $n$ , коли нпр.

$$\int_0^1 \left[ \lambda_x^1(x, X) \right]^2 dX$$

<sup>1)</sup> Transactions of the Am. Math. Soc, 1912.