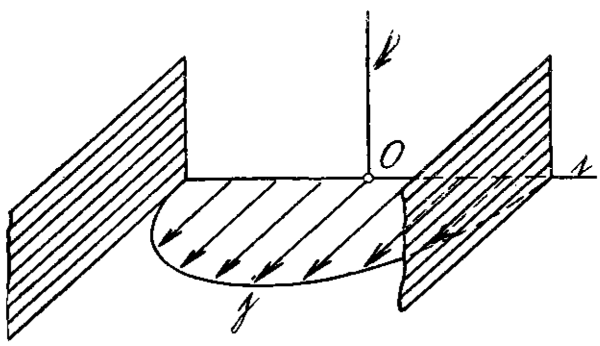
Обмежені векторові поля.

В розвідці: „Діяда як споріднена трансформація“ (гл. Збірник мат.-природ.-лік. секції т. XXI) подав я спосіб розсліджування векторового поля при помочи діяд; при тім функції, що визначають поле, були все цілі, вимірні і без обмеження, а тим самим і поля були необмежені. Та в теоретичній фізиці стрічаємо на кождім кроці поля, обмежені якимись кривими або поверхнями, тому треба і такими полями зайнятися.

В сій розвідці беру під увагу два найпростійші випадки, які дають нам: ріка і водопровід. Для упрощення задачі приймаю, що ріка має ширину $2a$, а вода пливе на середині найскорше, дальше, що скорість води визначена вектором

$$\mathfrak{y} = \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathfrak{j}.$$



Фіг.

Коли кому не подобалобися, що скорість на середині ріки за велика, то може замість a ввести якубудь иншу сталу $k.a$, що однак викличе деяку зложність у проблемі.

Як бачимо, поле обмежене, бо для $|x| > a$ $\mathfrak{y}$ приймає мнимі вартости.

Надто щоби функція була однозначна, обмежуюся до додатних вартостий другого коріня.

Для всіх точок на оси xx лежать кінці вектора $\mathfrak{y}$ на колі о лучу $r = a$.

Для розсліду поля возьмім якийбудь приріст провідного луча в площі (xz)

$$d\mathfrak{r} = dx\,\mathfrak{i} + dz\,\mathfrak{k}.$$

Сей приріст сповняє умову

$$(\mathfrak{y}\;d\mathfrak{r}) = 0,$$

а тоді (cf. Збірник мат.-прир.-лік. секції т. XXI, ст. 118)

$$\begin{aligned} d\mathfrak{y} &= \Phi_{\mathfrak{y}} d\mathfrak{r} \\ &= [curl\,\mathfrak{y}\;d\mathfrak{r}] \end{aligned}$$

а сам

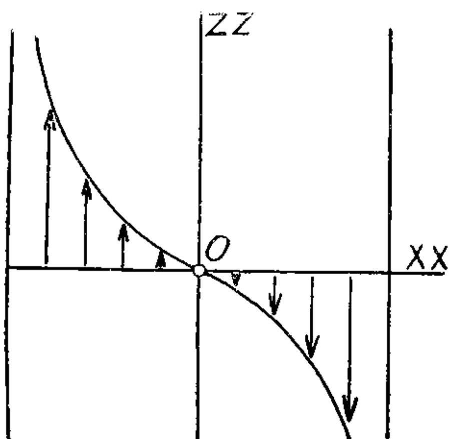
$$curl\,\mathfrak{y} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,\mathfrak{k}.$$

Коли взяти провідний луч у площі (xy)

$$\mathfrak{r} = x\,\mathfrak{i} + y\,\mathfrak{j},$$

тоді

$$(curl\,\mathfrak{y}\,.\,\mathfrak{r}) = 0,$$

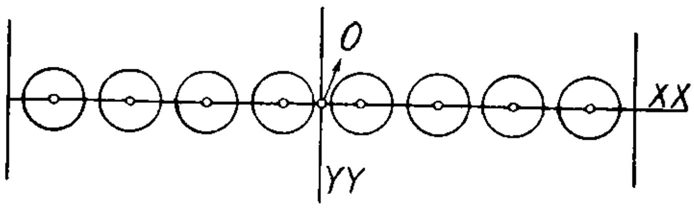


Фіґ. 2

се значить, що в кождій точці поверхні ріки стоїть $curl\,\mathfrak{y}$ до неї прямовісно, при чім величина виру залежить від x і є що до знаку все противна до x (гл. фіґ. 2). З огляду, що $div\,\mathfrak{y} = 0$, тож маємо діло з чисто солєноїдальним полем.

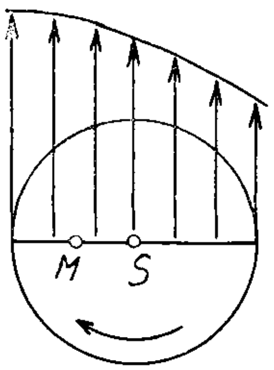
Щоби се поле унаглядпити, подумаймо собі 'такий механічний прилад. На оси xx на цвяхах прикріпляємо ряд кружків так, щоби легко довкола них оберталися. При тім цвяхи стоять до оси zz рівнобіжно.

В просторі нехай панує вихор, схарактеризований вектором $\mathfrak{v}$. Заложім дальше, що сила ділає пропорціонально до скорости, тоді полеві сили дадуть вислідну, що переходить через точку

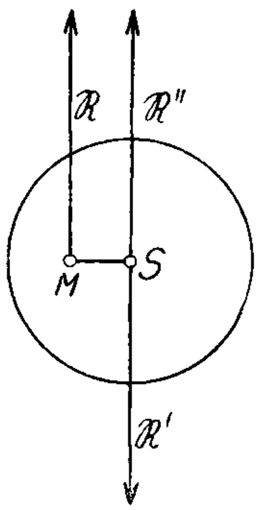


Фіґ. 3

M поза серединою тяжести кружка *S*. Ся вислідна спричинить оборотовий рух кружка. З розкладу скорости слідує, що кружок, який є на середині, цілком не крутиться, а кружок, що є близше берега, тим сильнійше крутиться.



Фіґ. 4



Фіґ. 5

Колиж $\mathfrak{v}$ означає розпреділеннє скорости частинок води, то кружок пущений свобідно, мусить виконувати на воді два рухи:

а) поступовий здовж ріки з причини вислідної

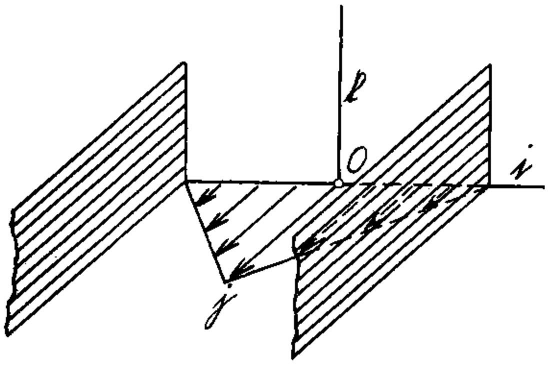
$$\mathfrak{R}''$$

і б) оборотовий, спричинений парою сил

$$(\mathfrak{R}\mathfrak{R}').$$

Досвід годиться з тими висновками. Остає ще невияснений факт, що кожде округле тіло стремить усе до середини ріки, а подовгасте тіло (палиця, дошка) все стремить до берега. Чоловіка, що втопився, ріка все викидає на беріг.

Перейдім той самий випадок ще раз, принимаючи, що *скорість ріки збільшається* пропорціонально до віддалення від



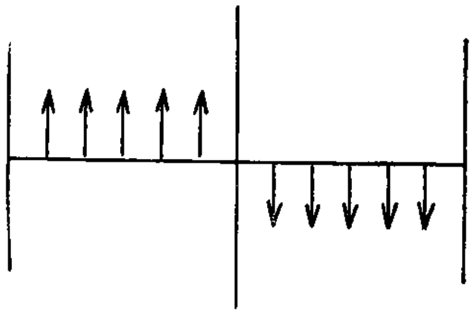
Фіґ. 6

берега аж до найбільшої вартости на середині ріки. В тім випадку вистане обмежитися до розсліду одної половини ріки. Вектор скорости є тоді

$$\mathfrak{y} = (a - x)\,\mathfrak{j}$$

для
$$x = (a \ldots 0).$$

Розклад вирів показує, що вир є *const.*, але противного знаку по обох сторонах від середини ріки (гл. фіґ. 7). Під вплив-



Фіґ. 7

вом сил, пропорціональних до скорости, кружки крутяться всі з однаковою оборотовою скоростю.

В водопроводах стрічаємо факт, що вода в рурі пливе найскорше в середині рури, а найповільнійше при самій рурі. Який рух виконують частинки води? Щоби сей проблєм убрати в математичну форму, а надто щоби його улекшити, зробимо як у попереднім випадку деякі заложення.

Нехай буде скорість схарактеризована вектором

$$\mathfrak{v} = \sqrt{a^2 - (x^2 + z^2)}\, \mathfrak{j}$$

і то додатними вартостями кореня.

З функції під коренем видно, що поле обмежене на руру о коловім перекрою $r = a$, при чім вісь рури йде здовж оси yy.

Коли

$$d\mathfrak{r} = dx\, \mathfrak{i} + dz\, \mathfrak{k},$$

то

$$(\mathfrak{v}\, d\mathfrak{r}) = 0,$$

а тимсамим

$$d\mathfrak{r} = \Phi\mathfrak{v}\, d\mathfrak{r}$$

$$= [curl\, \mathfrak{v}\, .\, d\mathfrak{r}],$$

а сам

$$curl\, \mathfrak{v} = \frac{z}{\sqrt{a^2 - (x^2 + z^2)}}\, \mathfrak{i} - \frac{x}{\sqrt{a^2 - (x^2 + z^2)}}\, \mathfrak{k}.$$

Для кождого перекрою, рівнобіжного до площі (xz), лежать кінці векторів на півкулі о лучу a.

Коли провідний луч у тім перекрою є

$$\mathfrak{r} = x\mathfrak{i} + z\mathfrak{k},$$

тоді

$$(curl\, \mathfrak{v}\, .\, \mathfrak{r}) = 0,$$

се значить, що вектор $curl\, \mathfrak{v}$ лежить стично до кола в площі перекрою о лучу $r = |\mathfrak{r}| = \sqrt{x^2 + z^2}$. Для усіх точок на його обводі має $curl\, \mathfrak{v}$ ту саму вартість, отже маємо діло з перстеневим виром, який посувається здовж оси yy зі скоростю $\mathfrak{v}$. Рух і силу вирових перстенів характеризують рівнання:

$$\mathfrak{v} = \sqrt{a^2 - r^2}\, \mathfrak{j}$$

$$|curl\, \mathfrak{v}| = \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}.$$

З сього розважання бачимо, що частинки води в водопроводах розбиваються на ряд елементарних вирів, при чім лише частинки, які є на оси рури, відбувають чистий поступовий рух. І в тім випадку є $div\, \mathfrak{v} = 0$, поле векторове є знову чисто солєноідальне, безжерельне.

Квестію можна загально поставити: розслідити векторове поле $\mathfrak{v} = \varphi(r)$ і

при умовах а) $div\, \mathfrak{v} = 0$

б) для $r = o$

має бути $\mathfrak{v} =$ maximum,

і в) для $r = a$

має бути $\mathfrak{v} =$ minimum.

Та найцікавійший був би випадок, коли ми могли би дістати функцію $\varphi(r)$ дорогою експериментальною; аж тоді могли би ми зовсім певно відповісти на питаннє: який рух виконують частинки води в водопроводах?

В Тернополи, 18 серпня, 1923.

Никифор Садовський.