

Доказ основної теореми алгебри.

Поданий нижче доказ теореми про існування коріня всякого алгебричного рівняння відрізняється від відомого доказу Коші тим, що 1) зводиться до обчислення коріня з довільно малою наперед даною похибкою; 2) для свого переведення потребує з трансцендентного обсягу лиш поняття невимірного числа як безконечного десяткового дроба, поняття границі і поняття тяглости.

Лемма 1. Коли

$$|a_n| < q^n \quad (0 < q < 1),$$

то сума

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

для всіх досить великих вартостей числа n довільно мало відрізняється від певного сталого числа s (отже існує $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$). Справді

$$|s_{n+k} - s_n| \leq |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+k}| \leq \frac{q^{n+1}}{1-q};$$

отже, починаючи з досить великої вартости N числа n , всі s_n відрізняються одно від одного довільно мало. Покладім тепер

$$s_n = s'_n + i s''_n,$$

де s'_n, s''_n — числа дійсні і напишім s'_n безконечним десятковим дробом, то бачимо, що скількість перших спільних цифер у всіх s'_n при $n > N$ є довільно велика; при необмеженім збільшенню числа N згаданий ряд спільних цифер утворить безконечний десятковий дріб s' . Подібнож із s''_n повстане безконечний десятковий дріб s'' . Тоді $s' + i s''$ буде шуканим числом s .

Лемма 2. Коли функція $f(z)$ є тягла в точці $z = s$ і $f(s_n)$ довільно мало відрізняється від числа A при $|s - s_n|$ досить малім, то

$$f(s) = A,$$

Справді, по самому означенню тяглости, $|f(s_0) - f(s)|$ є число довільно мале одночасно з $|A - f(s_0)|$; отже й різниця $A - f(s)$ має абсолютну вартість довільно малу, що, з огляду на незмінність чисел A і $f(s)$, дає

$$f(s) = A.$$

Лемма 3. Коли абсолютні вартости сочинників a_0, a_1, \dots, a_n многочлена

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

менші від певного числа α і абсолютна вартість сочинника a_0 — більша від певного числа κ , то для всякого $\kappa > 0$ можна дібрати таке $L > 0$, що при

$$|z| \geq L$$

буде

$$|f(z)| > \kappa.$$

Справді, для здійснення останньої нерівности досить справдити нерівність:

$$\alpha |z|^n - \alpha (|z|^{n-1} + |z|^{n-2} + \dots + |z| + 1) > \kappa,$$

для чого досить лиш покласти

$$L = \frac{\alpha + \kappa}{\alpha} + 1.$$

Лемма 4. Коли в точці x вартости многочленів $f(z)$ та $f'(z)$ різні від 0, то в обсягу точки x є така точка

$$y = x - \delta \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (0 < \delta < 1),$$

що

$$|f(y)| < |f(x)|.$$

Справді,

$$(1) \dots f(y) = f(x) + (y-x)f'(x) \left[1 + \frac{(y-x)f''(x)}{2!f'(x)} + \dots + \frac{(y-x)^{n-1}f^{(n)}(x)}{n!f'(x)} \right];$$

поклавши тепер

$$\Delta = \frac{\delta f(x)f''(x)}{2!f'(x)} - \frac{\delta^2 f^2(x)f'''(x)}{3!f'(x)} + \dots \pm \frac{\delta^{n-1} f^{n-1}(x)f^{(n)}(x)}{n!f'(x)},$$

матимемо при досить малім δ :

$$|\Delta| < |f(x)|.$$

А тоді з (1) дістанемо:

$$f(y) = f(x) \cdot (1 - \delta) + \delta \Delta,$$

$$|f(y)| \leq |f(x)| \cdot (1 - \delta) + \delta |\Delta| < |f(x)|.$$

Теорема. Рівняння

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

має корінь.

Припустім, що ми вміємо визначити коріні всякого рівняння $(n-1)$ -го ступня. Нехай коріні многочлена $f'(z)$ будуть ζ_1, ζ_2, \dots і жаден із них не є корінем многочлена $f(z)$. Тоді, на підставі лемми 4, можна обрати точку ζ_0 так, що

$$|f(\zeta_0)| < |f(\zeta_1)|, |f(\zeta_2)|,$$

і існують точки ζ , для котрих

$$|f(\zeta)| < |f(\zeta_0)|.$$

Для всякої точки ζ справедливі нерівності

$$|\zeta - \zeta_1|, |\zeta_1 - \zeta_2|, \dots > M, |\zeta| < L$$

(див. лемму 3), де L і M — якісь сталі числа; отже при певнім $\eta > 0$ маємо:

$$|f(\zeta)|, \frac{1}{|f'(\zeta)|}, \frac{|f''(\zeta)|}{2!}, \dots, \frac{|f^{(n)}(\zeta)|}{n!} < 2^\eta.$$

Нарешті, на підставі тоїж лемми 4, коли ζ' є одна з точок ζ , то для довільного досить великого $p > 0$ точка

$$\zeta'' = \zeta' - \frac{1}{2^{4p}} \frac{f(\zeta')}{f'(\zeta')}$$

теж належить до точок ζ ; при тім (див. (1))

$$f(\zeta'') = f(\zeta') \left[1 + (\zeta'' - \zeta') \frac{f'(\zeta')}{f(\zeta')} + \dots + \frac{(\zeta'' - \zeta')^n}{n!} \frac{f^{(n)}(\zeta')}{f(\zeta')} \right],$$

отже

$$|f(\zeta'')| < |f(\zeta')| \left[1 - \frac{1}{2^{4p}} + \frac{2^{4\eta}}{2^{8p}} + \dots + \frac{2^{2n\eta}}{2^{4np}} \right],$$

а поклавши $p \geq \eta + 1$, дістанемо:

$$|f(\zeta'')| < |f(\zeta')| \left[1 - \frac{1}{2^{4p+1}} \right].$$

Переходячи подібнож від точки ζ'' до ζ''' , ..., нарешті від $\zeta^{(n)}$ до $\zeta^{(n+1)}$, дістанемо остаточно:

$$(2) \quad |f(\zeta^{(n+1)})| < |f(\zeta')| \left[1 - \frac{1}{2^{4p+1}} \right]^n$$

$$(3) \quad \zeta^{(n+1)} = \zeta' - \frac{1}{2^{2p}} \left[\frac{f(\zeta')}{f'(\zeta')} + \frac{f(\zeta'')}{f'(\zeta'')} + \dots + \frac{f(\zeta^{(n)})}{f'(\zeta^{(n)})} \right].$$

З (2) бачимо, що при досить великим n число $f(\zeta^{(n+1)})$ доволі мало відрізняється від 0 ; а з (3) виявляється існування числа ζ , від котрого всі $\zeta^{(n)}$ при досить великим n відрізняються доволі мало. Отже

$$f(\zeta) = 0.$$

Теорему доказано.

Завважмо ще, що при $|f(\zeta')|$ досить малім число ζ доволі мало відрізняється від ζ' (див. (3)). Тому можна мати за доказане, що при досить малій зміні сочинників многочлена без кратних корінів — доволі мало змінюються й його коріні, отже що коріні рівняння се тяглі функції його сочинників.

Мисайло Кравчук.