Кривина евольвенти.

В моїй розвідці „До теорії евольвент"[1]) звернув я увагу на се, що до кождої еволюти належать два жмути евольвент, один спеціяльний для кождої кривої, а другий жмут колес, схарактеризований ріжничковим рівнаннєм:

$$\frac{y'''}{y''} = \frac{3y'y''}{1+y'^2} \qquad 1)$$

Спитаймо тепер, чому як раз се рівнаннє мусить усе приходити без огляду на вид даної кривої.

Напишім рівнаннє 1) в виді:

$$\frac{dy'}{1+y'^2} = \frac{dy''}{3y'y''}$$

або:

$$\frac{2y'dy'}{1+y'^2} = \frac{2}{3}\frac{dy''}{y''},$$

тоді інтеґрованнєм дістанемо:

$$\frac{3}{2} \log(1+y'^2) = \log y'' + \log c$$

(c const.), або:

$$c = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \qquad 2)$$

Відворотність сього вираження дасть:

$$\varkappa = \frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}.$$

А що: $y' = tg\,\alpha$ (α напрямний кут стичної до кривої), а:

$$y'' = \frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\cos^2\alpha} = (1+tg^2\alpha)\frac{d\alpha}{dx} = (1+y'^2)\frac{d\alpha}{dx},$$

[1]) Збірник мат.-прир.-лік. секції т. XXI.

то:

$$\varkappa = \frac{d\alpha}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{d\alpha}{ds}, \qquad 3)$$

де ds є елементом луку кривої.

А що $d\alpha$ є се кут між двома безконечно сусідними стичними, тож $\varkappa$ є кривиною даної кривої (евольвенти).

З теорії перетворень (трансформацій) т. зв. евклідової ґрупи (після теорії Lie) слідує, що кривина $\varkappa$ як також і усі єї похідні $\left(\frac{d\varkappa}{ds}, \frac{d^2\varkappa}{ds^2}, \frac{d^3\varkappa}{ds^3}, \quad .\right)$ є незмінниками (інваріянтами) сеї ґрупи, тому-то рівнаннє 1) так характеристичне для кривини евольвент, мусить виступати в проблємі, який був темою згаданої моєї розвідки.

Львів, серпень 1923.

Др. Володимир Левицький.