Діяда як споріднена трансформація.

Написав

Никифор Садовський.

(Dyade als affine Transformation aufgefasst von Nikefor Sadowškyj.)

§. 1.

Чому вводимо діяди?

Аналіза векторів є збудована на 3 дефініціях, які є в тісній звязи з трома основними понятями механіки: з рівнобіжником сили, працею і моментом.

Нехай будуть вектори $\mathfrak{a}$ і $\mathfrak{b}$ виражені через три основні напрямні дійсні одиниці $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, здовж осей xx, yy, zz, іменно:

$$\mathfrak{a} = a_x\mathfrak{i} + a_y\mathfrak{j} + a_z\mathfrak{k}$$
$$\mathfrak{b} = b_x\mathfrak{i} + b_y\mathfrak{j} + b_z\mathfrak{k}$$

то висше помічені дефініції виражаються аналітично в слідуючий спосіб:

$$\text{I.}\quad (a_x\mathfrak{i} + a_y\mathfrak{j} + a_z\mathfrak{k}) + (b_x\mathfrak{i} + b_y\mathfrak{j} + b_z\mathfrak{k}) = \\ = (a_x + b_x)\mathfrak{i} + (a_y + b_y)\mathfrak{j} + (a_z + b_z)\mathfrak{k}$$

т. є дефініція додавання векторів.

$$\text{II.}\quad (a_x\mathfrak{i} + a_y\mathfrak{j} + a_z\mathfrak{k})\,(b_x\mathfrak{i} + b_y\mathfrak{j} + b_z\mathfrak{k}) = \\ = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

деф. скалярного множення і

$$\text{III.}\quad [a_x\mathfrak{i} + a_y\mathfrak{j} + a_z\mathfrak{k}]\,[b_x\mathfrak{i} + b_y\mathfrak{j} + b_z\mathfrak{k}] = \\ = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Сі три ділання назначуємо в механіці коротко символами, пр.

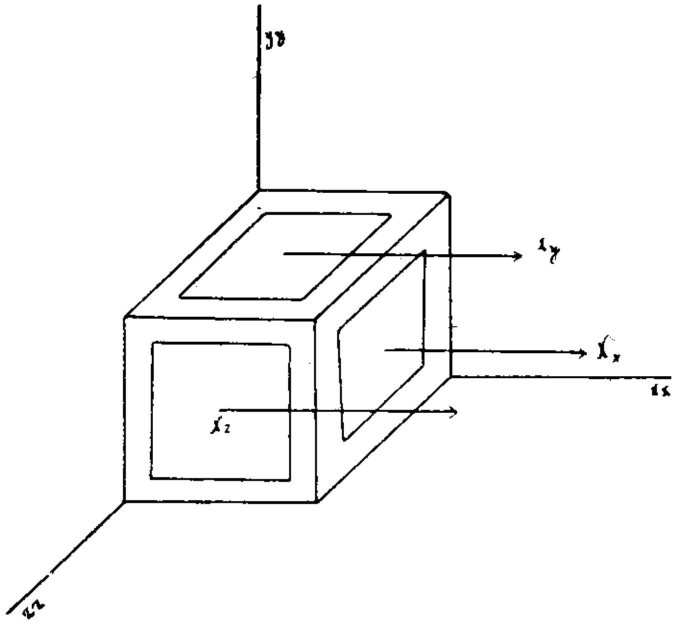
$$\mathfrak{R} = \mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$$
$$L = \mathfrak{P} \quad \sigma$$
$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{r} \quad \mathfrak{P}]$$

Аналіза векторів вистарчає вповні до математичного трактовання механіки точки і механіки штивних системів, но вона заводить при механіці упругих тіл. До сего потребуємо нового ґеометричного твору, а таким є д і я д а.

§. 2.

Діяда упругости.

Щоби подати дефініцію діяди, вийдім від приміру. Подумаймо собі куб, вирізаний з тіла, яке дається деформувати, причіплений трома стінами до трох площ основних першого октанта.



Фіґ. 1.

Щоби куб, вирізаний зі здеформованого тіла, був в рівновазі, мусимо його внутрішні напруження в напрямі xx зрівноважити трома зовнішними тягненнями, іменно нормальним тягненням X_x і двома стичними X_y і X_z (напруги). Подібну трійку дістаєм для двох прочих напрямів. В цілости дістаєм 9 величин, які опреділяють стан напруження в кубі. Сей комплекс пишемо подібно як детермінанти (визначники), но для відріжнення будемо давати вигнуті скобки місто двох рівнобіжних черток:

$$\begin{Bmatrix} X_x & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z \end{Bmatrix}$$

і називаємо його **діядою напруження**.

Коли тягнення підлягають трьом умовам т. зв. симетрії, т. є:

$$X_y = Y_x$$

і циклічно $Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z$

іншими словами, коли спряжені стинаючі є рівні, то діяда деґенерується в тензор напруження, колиж в кінци всі стинаючі тягнення є рівні зеро, то з діяди остає лиш головна перекутня

$$\begin{Bmatrix} X_x, & 0, & 0 \\ 0, & Y_y, & 0 \\ 0, & 0, & Z_z \end{Bmatrix}$$

і ми приходимо до вектора з його трьома складовими.

Таке деґенерування висших форм на низші стрічаємо і в детермінантах пр.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Операції діядами є зовсім відмінні від операцій детермінантами. Як оперується сею новою ґеометричною величиною, покажемо в слідуючих розділах. На разі позволимо собі діяду докладно спрециювати і зробимо се при помочи спорідненої (affine) трансформації.

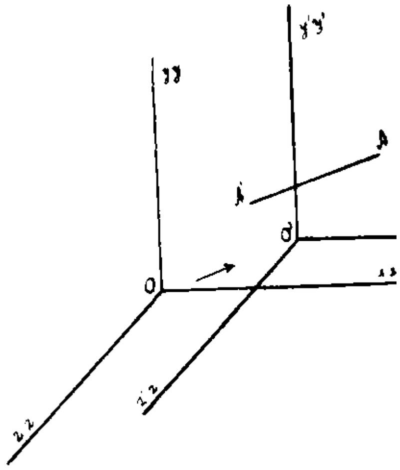
§. 3.

Споріднені трансформації та їх відношення до діяд.

В механіці і в теоретичній фізиці даються часто найдені права вбрати в лекшу і до дальших розслідів приступнійшу форму, коли місто первісних сорядних введемо нові, звязані функційно з первісними. Введення нових сорядних відбувається при помочи так званих трансформаційних рівнань.

Найпростійшою є трансформація споріднена (affine). Єї можна зложити з чотирох основних трансформацій: з рівнобіжного пересунення, скручення, зміни поділки і з інверзії.

1) Рівнобіжне пересунення.



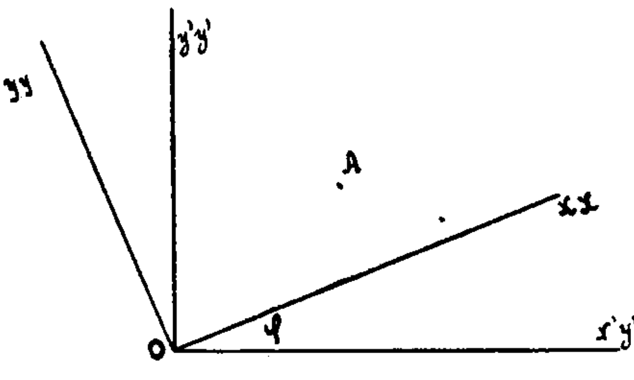
Фіг. 2.

Коли маємо два уклади сорядних, яких оси е рівнобіжні, і які через пересунення оо' дадуться накри- Л* ти, то говоримо- о рівнобіжнім пересуненню. Пересунення се виражаємо аналітична трома рівнанями:

(P) $x^4 = x + a$
$y'_4 = y + b$
г = 𝕫 + с

При тім відріжняемо активну і пасивну трансформацію. Возьмім точку *A*, яка в системі о мав сорядні ***(x y*** з), а в системі о[i] сорядні («' у⁴ г'), то трансформацію можемо ионимати в сей спосіб, що точка ***A*** пересунулася і зайняла нове місце ***A⁴*** і се є активна трансформація; або що точка ***A*** лишила ся непорушно, а уклад пересунувся в нове положення о' і се є пасивна трансформація. Розуміється, що точка, а ^ другім случаю уклад, пересуваються рівнобіжно, лише в противнім змислі.

2) ***Скручення системи.***



Фіґ. 3.

В площі на скручення системи осий дає нам аналітична ґеометрія слідуючі рівнання:

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi$$
$$y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi$$

або загальнійше

$$x' = x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1$$
$$y' = x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2$$

з услівями ортоґональности:

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 = 1$$
$$\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 = 1 \qquad \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 = 0.$$

Подібні формули дістаємо і для простору. Назвім $\cos\alpha_1 = a_1$ $\cos\beta_1 = b_1$ і т. д., то система для скручень буде

$$(D) \qquad \begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1z \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2z \\ z' &= a_3x + b_3y + c_3z \end{aligned}$$

зі 6 услівями ортоґональности:

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1 \qquad a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0 \text{ і т. д.}$$

Легко можемо переконатися, що субституції (P) і (D) не зміняють довжини. Відтинок $a = 5$ *cm* через ті субституції зміняє лише своє положення.

3) *Зміна поділки.*

Ту трансформацію характеризують 3 рівнання:

$$(M) \qquad \begin{aligned} x' &= \lambda x \\ y' &= \mu y \\ z' &= \nu z \end{aligned}$$

при чім λ μ ν є додатні числа ріжні від 1.

Ся трансформація, активно взята, означає зміну довжини відтинка і скручення його. В случаю $\lambda = \mu = \nu$ дістаємо фіґури подібні збільшені або зменшені в зависимости від λ і то без скручення.

Примір:

$$(M) \qquad \begin{aligned} x' &= 2x \\ y' &= 3y \\ z' &= z \end{aligned}$$

Точка A (2, 1, 0) переходить в положення A' (4, 3, 0)

куля $\qquad x^2 + y^2 + z^2 = 6^2$

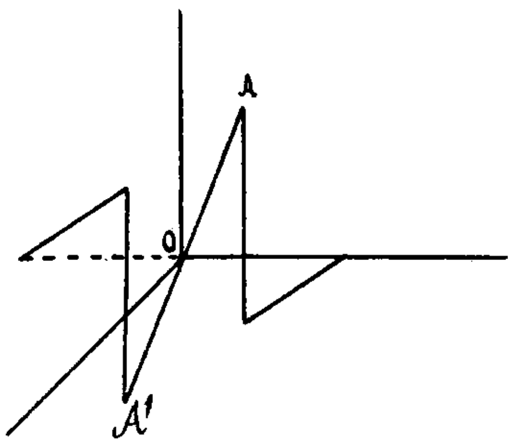
переходить в еліпсу

$$\left(\frac{x'}{12}\right)^2 + \left(\frac{y'}{18}\right)^2 + \left(\frac{z}{6}\right)^2 = 1$$

Трансформація взята пасивно означає зміну одиниць на осях укладу.

Для $\lambda = \mu = \nu = 1$ називаємо її трасформацією ідентичности. Фіґура в (xyz) є пристайна до фіґури в $(x'y'z')$.

4. *Інверзія.*



Фіґ. 4.

Возьмім під увагу случай $\lambda = \mu = \nu = -1$, то легко переконатися, що та трансформація, взята активно, означає відвзорованнє в початку укладу, а фіґури, що повстають через ту трансформацію т. з. інверзію, є центрально-симетричні.

Беручи пасивно, дістаєм заміну додатних осий (xyz) на відємні:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \\ z' = -z \end{cases}$$

Кожда з тих основних трансформацій є лінійною трансформацією сорядних. В наслідок сего можемо їх написати в загальнім виді:

$$(A) \quad \begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2 \\ z' &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3 \end{aligned}$$

Легко переконатися, що система (A) має в собі всі чотири висше наведені трансформації.

Тому можемо сю споріднену трансформацію написати в виді:

$$(A) \equiv (FDMI).$$

Фіґури, що їх дістаємо через субституцію (A), називаємо ґеометрично спорідненими.

Подумаймо собі, що $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ є постійно зеро, або що на одно виходить, що виключаємо рівнобіжне пересунення, тоді 3 прочі дають нам 9 характеристичних сочинників від себе независимих, подібно як се ми мали при напруженню. Сей комплекс будемо називати діядою і будемо писати символічно: діяда $\Phi = (DMI) = \left\{\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}\right\}$

Значіння сего символа є однозначно усталене системою рівнань

$$(D,\ M,\ I) \qquad \begin{aligned} x' &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ y' &= a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ z' &= a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{aligned}$$

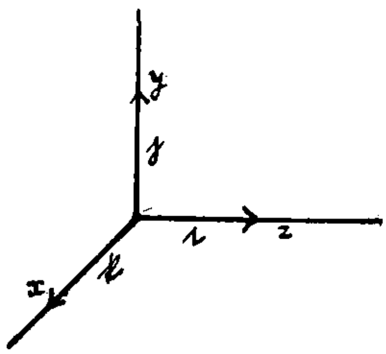
Ми понимали до сеї пори (A) як трансформацію точки, через яку точка A переходить в точку A'. Коли получимо точки A і A' з початком укладу O, то дістанемо два місцеві вектори

$$\overrightarrow{OA} = \mathfrak{r} \qquad \text{і} \qquad \overrightarrow{OA'} = \mathfrak{r}'$$

Щоби дістати рівнання трансформаційні для місцевих векторів, множимо 3 рівнання трансформаційні по черзі через напрямні одиниці $\mathfrak{i}\ \mathfrak{j}\ \mathfrak{k}$ і додаємо сторонами.

1) Для рівнобіжного пересунення

$$\begin{array}{l|l} x' = x + a_x & \mathfrak{i} \\ y' = y + a_y & \mathfrak{j} \\ z' = z + a_z & \mathfrak{k} \end{array}$$



Фіг. 5.

$$(x'\mathfrak{i} + y'\mathfrak{j} + z'\mathfrak{k}) = (x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}) + (a_x\mathfrak{i} + a_y\mathfrak{j} + a_z\mathfrak{k}).$$

Вираження по лівій стороні є місцевим вектором

$$\overrightarrow{OA} = \mathfrak{r}'$$

подібно по правій

$$(x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}) = \overrightarrow{OA} = \mathfrak{r}$$

Вектор третий називаєся вектором рівнобіжного пересунення $\mathfrak{a}$.

Тимсамим рівнання рівнобіжного пересунення приймають вид

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} + \mathfrak{a}$$

2) При скрученню, поступаючи подібно, дістаєм рівнання

$$x'\mathfrak{i} + y'\mathfrak{j} + z'\mathfrak{k} = (a_1x + b_1y + c_1z)\mathfrak{i} + (a_2x + b_2y + c_2z)\mathfrak{j} + \\ + (a_3x + b_3y + c_3z)\mathfrak{k}$$

Се рівнання заступаємо слідуючим

$$\mathfrak{r}' = \Phi \,.\, \mathfrak{r}$$

при чім операцію опреділену сим рівнанням будемо називати множенням діяди. Діяда Φ означує ту сукупність 9 величин

$$\Phi = \begin{Bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{Bmatrix},$$

звязаних зі собою умовами ортоґональности. Таку діяду будемо називали „чистою діядою скручення“.

3) При зміні поділки редуується діяда до 3 членів головної перекутні

$$\Phi = \begin{Bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{Bmatrix}$$

Для приміру нехай буде $\Phi = \begin{Bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$

і $\mathfrak{r} = 2\mathfrak{i} - \mathfrak{j} + 3\mathfrak{k}$, то ділаючи діядою на $\mathfrak{r}$ дістаєм

$$\mathfrak{r}' = \Phi \,.\, \mathfrak{r}$$

або виразно:

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}' = {} & (3\,.\,2 + 0(-1) + 0\,.\,3)\mathfrak{i} + \\ & + (0\,.\,2 + 2(-1) + 0\,.\,3)\mathfrak{j} + \\ & + (0\,.\,2 + 0(-1) + 1\,.\,3)\mathfrak{k} \\ & = 6\mathfrak{i} - 2\mathfrak{j} + \mathfrak{k} \end{aligned}$$

Для $\lambda = \mu = \nu$ дістаємо діяду подібности

$$\Phi = \begin{Bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{Bmatrix}$$

при чім $\lambda = 1$. В случаю $\lambda = 1$ дістаєм діяду ідентичности.

$$\Phi = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} = I$$

Отже $\qquad \mathfrak{r}' = I \,.\, \mathfrak{r} = \mathfrak{r},$

значить маємо можність, там де сего вимагає потреба, представити кождий вектор в формі діяди. Простий рахунок показує, що діяда подібности дається виразити через діяду ідентичности:

$$\Phi = \lambda \,.\, I.$$

4) Рівнож і діяда інверзії є діядою ідентичности зі знаком мінус

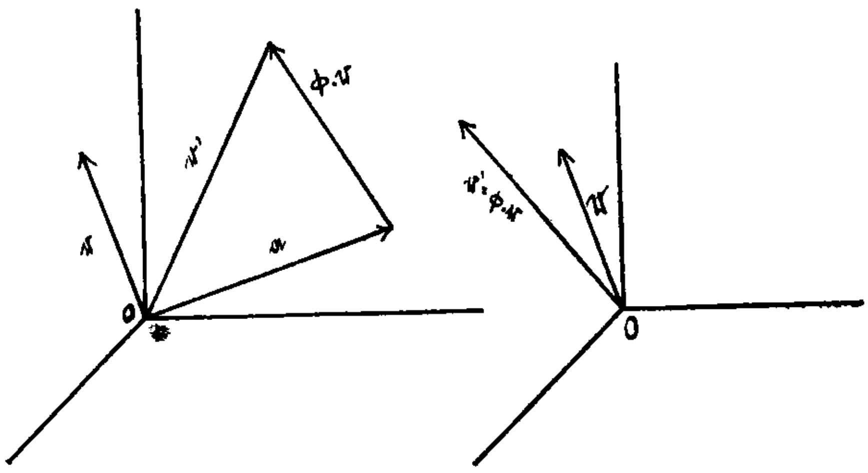
$$\Phi = \begin{Bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Bmatrix}$$

Перейдім тепер до загального случаю. Помножім рівнання трансформації (A) по черзі через $\mathfrak{i}$ $\mathfrak{j}$ $\mathfrak{k}$ і додаймо, то дістанемо

$$\mathfrak{r}' = \begin{Bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{Bmatrix} . \,\mathfrak{r} + (d_1\mathfrak{i} + d_2\mathfrak{j} + d_3\mathfrak{k})$$

або

$$\mathfrak{r}' = \Phi \quad \mathfrak{r} + \mathfrak{a}$$



Фіг. 6.

Коли $\mathfrak{a} = 0$ (отже без пересунення), тоді

$$\mathfrak{r}' = \Phi \,.\, \mathfrak{r}.$$

В сей спосіб ми прийшли до однозначного окреслення діяди як спорідненої трансформації без пересунення.

§. 4.

Значіння діяди в ряді Taylor'a.

Нехай буде дана довільна трансформація (лінійна або висше чим лінійна).

$$(T) \qquad \begin{aligned} x' &= \varphi(xyz) \\ y' &= \chi(xyz) \\ z' &= \psi(xyz). \end{aligned}$$

Точці A відповідає переміщена точка A'. Рівночасно переходить точка сусідна B $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$ в точку

$$B'\ (x' + dx',\ y' + dy',\ z' + dz').$$

Поставмо собі задачу подати трансформацію елементарного вектора

$$d\mathfrak{r}' = f(d\mathfrak{r}).$$

В тій цілі розвиваємо рівнання (T) в ряд Taylor'a, при чім обмежуємося до нескінчених першого ряду

$$dx' = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,.\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,.\,dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,.\,dz$$

$$dy' = \frac{\partial\chi}{\partial x}\,.\,dx + \frac{\partial\chi}{\partial y}\,.\,dy + \frac{\partial\chi}{\partial z}\,.\,dz$$

$$dz' = \frac{\partial\psi}{\partial x}\,.\,dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}\,.\,dy + \frac{\partial\psi}{\partial z}\,.\,dz$$

Щоби ті рівнання подати в формі векторовій, поступаємо як при спорідненій трансформації. В тій цілі творимо із сочинників при

$$dx,\ dy,\ dz$$

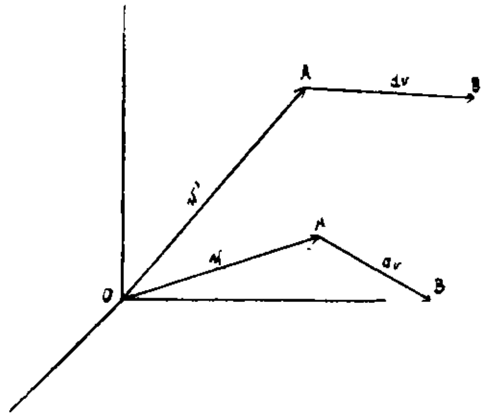
діяду

$$\Phi = \left\{ \begin{matrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial\chi}{\partial x} & \dfrac{\partial\chi}{\partial y} & \dfrac{\partial\chi}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial\psi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y} & \dfrac{\partial\psi}{\partial z} \end{matrix} \right\}$$

і дістаємо

$$d\mathfrak{r}' = \Phi\,.\,d\mathfrak{r}$$

В спеціяльнім случаю, коли частні похідні є постійними числами, дістаємо звісну нам діяду спорідненої трансформації.



Фіг. 7.

Вправи.

1) Як трансформує діяда $\Phi = \begin{Bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{Bmatrix}$

вектор $\mathfrak{r} = \mathfrak{i} + \mathfrak{j} + \mathfrak{k}$.

2) То само для

$$\Phi = \begin{Bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{Bmatrix} \quad \text{і} \quad \mathfrak{r} = z\mathfrak{i}$$

3) То само для

$$\Phi = \begin{Bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad \text{і} \quad \mathfrak{r} = 2\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j}$$

(чистий оборот в площі (xy').

4) То само для

$$\Phi = \begin{Bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad \text{для} \quad \mathfrak{r} = 2\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} + 4\mathfrak{k}.$$

5) Вправу 3. і 4. розвязати для $\alpha = 30^0$ і 90^0.

6) Задачу 5. розвязати ґрафічно.

7) Коли вісь zz лишаємо незмінну, то є $z' = z$, тоді трансформація відбувається в площі (xy). Рівнанням трансформаційним відповідає діяда

$$\Phi = \begin{Bmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

Діяда ся має 9 елементів і називаеся **простірною** або **третього ряду**. Колиж відкинемо третє рівнання, то дістанемо діяду **поверхневу** або **другого ряду**:

$$\Phi = \begin{Bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{Bmatrix}$$

Задача: Розслідити, як зміняють ся місцеві вектори

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{j}$$
$$\mathfrak{r} = \mathfrak{i} + \mathfrak{j}$$
$$\mathfrak{r} = \mathfrak{i} - \mathfrak{j}$$
$$\mathfrak{r} = 2\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j}$$

піддані діланню діяди

$$\Phi = \begin{Bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{Bmatrix}$$

8) Найти діяду 2 ряду, яка місцевий вектор $\mathfrak{r}$ обертає о кут 30^0 в відємнім напрямі не зміняючи його величини.

9) Вектор $\mathfrak{r} = 3\mathfrak{i} + 2\mathfrak{j}$ обернути в додатнім змислі в площі (xy) о 30^0 і збільшити в відношенню 3 : 1. Який вид має відповідна діяда?

§. 5.

Додавання діяд.

Свобідний вектор $\mathfrak{a}$ (що дається пересувати рівнобіжно) є однозначно определений своїми складовими a_x, a_y, a_z, тому можемо його уважати за злучення трох величин

$$\mathfrak{a} = (a_x\ a_y\ a_z)$$

В сій аналітичній методі дефініція додавання векторів має вид

$$(a_x\ a_y\ a_z) + (b_x\ b_y\ b_z) = (a_x + b_x,\ a_y + b_y,\ a_z + b_z).$$

Ту дефініцію додавання пошируємо на діяди, вважаючи їх злученням 9 величин, отже:

коли $$\Phi_1 = \begin{Bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{Bmatrix} \quad \text{і} \quad \Phi_2 = \begin{Bmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{Bmatrix}$$

то

$$\Phi_3 = \Phi_1 + \Phi_2 = \begin{Bmatrix} a_1 + f_1, & b_1 + g_1, & c_1 + h_1 \\ a_2 + f_2, & b_2 + g_2, & c_2 + h_2 \\ a_3 + f_3, & b_3 + g_3, & c_3 = h_3 \end{Bmatrix}$$

Про ґеометричне значіння додавання діяд легко переконатися при спорідненій трансформації.

Рівнож легко виказати, що право переміни і злуки затримують своє значіння, що отже

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi_2 + \Phi_1$$

$$\Phi_1 + (\Phi_2 + \Phi_3) = (\Phi_1 + \Phi_2) + \Phi_3$$

Задачі:

1) Даний вектор $\mathfrak{r} = 2\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} + \mathfrak{k}$ піддаємо по черзі ділланню діяд

$$\Phi_1, \quad \Phi_2, \quad \Phi_1 + \Phi_2 \quad \text{і} \quad \Phi_2 + \Phi_1.$$

Як він зміняється, коли

$$\Phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{Bmatrix} \quad \text{і} \quad \Phi_2 = \begin{Bmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{Bmatrix}?$$

2) Даний $\qquad \mathfrak{r} = 2\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j}$

і діяди

$$\Phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Bmatrix} \quad \text{і} \quad \Phi_2 = \begin{Bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}$$

Найти рахунком і рисунком

$$\Phi_1\mathfrak{r}, \quad \Phi_2\mathfrak{r}, \quad (\Phi_1 + \Phi_2)\mathfrak{r} \quad \text{і}$$
$$\Phi_1\mathfrak{r} + \Phi_2\mathfrak{r}.$$

3) Задачу 2. сформулувати для простору і розвязати.

§. 6.

Частні діяди.

I. Спряжені діяди.

Коли в даній діяді поміняємо стрічки з колюмнами (обернемо довкола головної перекутні), то дістаємо діяду спряжену Φ_c:

$$\Phi = \begin{Bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{Bmatrix} \qquad \Phi_c = \begin{Bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{Bmatrix}$$

II. Симетричні діяди або тензори.

Коли $\qquad \Phi_c = \Phi$

то діяда називаєть ся симетричною або тензором,

і означується $\qquad \Phi_s$

Жадання $\qquad \Phi_c = \Phi$

є рівноважне з трема умовами

$$a_2 = b_1 \qquad b_3 = c_2 \qquad c_1 = a_3$$

Діяда редукується до злучення 6 независимих величин

$$\Phi_s = \begin{Bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ b_1 & b_2 & c_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{Bmatrix}$$

(гляди тензор напруження).

III. Коли $\Phi = -\Phi_c$, то діяда називається антісиметричною Φ_a. Рівнання услівне є рівнозначне з 6 слідуючими услівями:

$$a_1 = -a_1 \quad \text{або} \quad a_1 = 0$$

подібно $\quad b_2 = 0 \quad c_3 = 0$

дальше

$$a_2 = -b_1 \quad b_3 = -c_2 \quad c_1 = -a_3$$

отже

$$\Phi_a = \begin{Bmatrix} 0 & -b_1 & a_3 \\ b_1 & 0 & -c_2 \\ -a_3 & c_2 & 0 \end{Bmatrix}$$

Діяда редукується до трох величин $b_1\ c_2\ a_3$, отже дається представити вектором.

Сі дефініції позваляють нам вивести три твердження для діяд:

1) $\Phi = \Phi_s + \Phi_a$

2) $\Phi_s = \frac{1}{2}(\Phi + \Phi_c)$

3) $\Phi_a = \frac{1}{2}(\Phi - \Phi_c)$.

§. 7.

Тензоровий добуток.

В теоретичній фізиці стрічаємо часто трансформацію, яка в виді діяд є

$$\Phi = \begin{Bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_1 \end{Bmatrix}$$

Ту діяду можемо вважати повсталою з двох векторів:

$$\mathfrak{a} = a_1\mathfrak{i} + a_2\mathfrak{j} + a_3\mathfrak{k}$$
$$\mathfrak{b} = b_1\mathfrak{i} + b_2\mathfrak{j} + b_3\mathfrak{k}$$

що є характеристичні для даної трансформації. Саму діяду дістанемо, коли складові векторів помножимо через себе при захованню певного порядку (як се маємо в методі кватерніонів Hamilton'a).

Щоби сей добуток відріжнити від скалярного $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ і векторового $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$, аналіза векторів означує подвійними скобками

$$[[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]]$$

і називає тензоровим добутком (Laue: Relativitätsprinzip, 1913). Як бачимо відповідна діяда є тензором.

§. 8.

Множення діяд.

Ми бачили, що добуток діяди і місцевого вектора є новим місцевим вектором $\mathfrak{r}$, який повстає з першого через споріднену трансформацію без пересунення

$$\mathfrak{r}' = \Phi_1\ \mathfrak{r}$$

Колиж сей новий вектор помножимо через другу діяду Φ_2, дістаєм

$$\mathfrak{r}'' = \Phi_2\ \ \Phi_1 \,.\, \mathfrak{r};$$

ту трансформацію місцевого вектора означуємо

$$\Phi_3 = \Phi_2 \,.\, \Phi_1$$

і називаємо множенням діяд.

З сеї дефініції слідують вже всі свійства сеї операції.

Як виглядає се множення в практиці, покажемо, для улекшення, на діядах другого ряду. — Діяда Φ_1 є рівнозначна з підставленням:

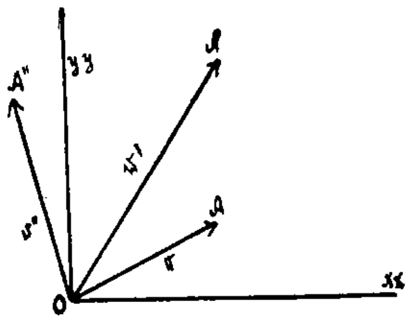
$$(a)\quad \begin{aligned} x' &= a_1 x + b_1 y \\ y' &= a_2 x + b_2 y \end{aligned}$$

і трансформує точку A в A', а діяда Φ_2 рівнозначна з підставленням:

$$(b)\quad \begin{aligned} x'' &= p_1 x' + q_1 y' \\ y'' &= p_2 x' + q_2 y' \end{aligned}$$

і трансформує точку A' в A''.

Щоби дістати трансформацію точки A прямо в A'', мусимо рівнання (a) підставити в (b) і дістаєм:



Фіг. 8.

$$\begin{aligned} x'' &= (p_1 a_1 + q_1 a_2)x + (p_1 b_1 + q_1 b_2)y \\ y'' &= (p_2 a_1 + q_2 a_2)x + (p_2 b_1 + q_2 b_2)y \end{aligned}$$

З сего бачимо, що

$$\begin{Bmatrix} p_1 q_1 \\ p_2 q_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 a_1 + q_1 a_2, & p_1 b_1 + q_1 b_2 \\ p_2 a_1 + q_2 a_2, & p_2 b_1 + q_2 b_2 \end{Bmatrix}$$

або коротше

$$\Phi_2' . \Phi_1 = \Phi_3.$$

Поширення на 3 і більше число діяд як рівнож на просторні діяди не справляє трудности.

Задачі.

1) Дані діяди

$$\Phi_1 = \begin{Bmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{3}, & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2}, & \frac{3}{2}\sqrt{3} \end{Bmatrix} \text{ і } \Phi_2 = \begin{Bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{Bmatrix},$$

як перемістить ся вектор $\mathfrak{r} = \mathfrak{i}$, коли на него ділають діяди

$$\Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_1 + \Phi_2,\ \Phi_1\ \Phi_2,\ \text{і}\ \Phi_2 . \Phi_1.$$

2) Розслідити, чи до множення діяд відноситься право переміни і розлуки, і то окремо для площі, а окремо для простору.

3) Скрутови довкола оси zz о кут α відповідає діяда

$$\Phi_\gamma = \begin{Bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix},$$

винайти Φ_α і Φ_β

які обертають вектори довкола осий xx і yy о кут α і β.

4) Місцевий вектор $\mathfrak{r} = 2\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} + \mathfrak{k}$ обертаємо о кути $\alpha = 30^0$, $\beta = 60^0$, $\gamma = 90^0$ в додатнім змислі довкола 3 осий. Яке буде остаточне положенне вектора $\mathfrak{r}$?

5) Утворити діяду $\Phi_{\alpha\beta\gamma} = \Phi_\alpha . \Phi_\beta . \Phi_\gamma$ і розслідити, чи є сповнені услівя ортоґональности. (Чи є чистий оборот?)

6) Вектор $\mathfrak{r} = 4\mathfrak{i}$ побільшити в відношенню $4:1$ і обернути довкола кождої оси о $+ 90^0$. Як буде лежати вектор? Подати вид відповідної діяди.

7) Як трансформує тензоровий добуток з векторів

$$\mathfrak{a} = -2\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} - \mathfrak{k}$$
$$\mathfrak{b} = -2\mathfrak{i} - 3\mathfrak{j} + \mathfrak{k}$$

місцевий вектор $\mathfrak{r} = \mathfrak{i} + 2\mathfrak{j} + 3\mathfrak{k}$.

8) Зі сили

$$\mathfrak{P} = 2\,kg\,\mathfrak{i} + 3\,kg\,\mathfrak{j} + 4\,kg\,\mathfrak{k}$$

і рамени

$$\mathfrak{r} = 3\,m\,\mathfrak{i} + 5\,m\,\mathfrak{j} + 2\,m\,\mathfrak{k}$$

дістаємо момент $\mathfrak{M}$ в виді векторового добутка

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{r}\mathfrak{P}].$$

Який вид має антісиметрична діяда Φ_a, що помножена через $\mathfrak{r}$ дає той сам момент?

$$\mathfrak{M} = \Phi_a \cdot \mathfrak{r}?$$

9) Як виглядає антісиметрична діяда Φ_a', що помножена вектором сили $\mathfrak{P}$ дає момент

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{r}\mathfrak{P}]$$

в виді

$$\mathfrak{M} = \Phi_a' \cdot \mathfrak{P}?$$

В який спосіб дістанемо з діяди Φ_a' вектор $\mathfrak{r}$ і на відворот?

NB. Послідні дві задачі позваляють нам векторовий добуток замінити операцією діядами. Се значить для діяди поширення її понятя в значінню фізикальнім. Она є тут вже чимсь більше, чим спорідненою трансформацією. В діяді міститься тут і зміна дімензії вектора.

§. 9.

Ділення векторів.

Ми шукали до сеї пори вектора $\mathfrak{b}$ з даних Φ і $\mathfrak{a}$, именно

$$\mathfrak{b} = \Phi \cdot \mathfrak{a}$$

Тепер ставимо собі відворотну задачу: з даних $\mathfrak{b}$ і $\mathfrak{a}$ найти діяду Φ. Ту задачу означуємо символічно

$$\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} = \Phi$$

і називаємо сю операцію діленнєм векторів. Що сей проблєм є немало важний, показує теоретична фізика, де ми кожду напрямну величину $\mathfrak{b}$ можемо представити в виді

$$\mathfrak{b} = \Phi \cdot \mathfrak{a}$$

наколи в розвиненню Taylor'а ограничимося до членів першого ряду; пр. ріжничка скорости

$$d\mathfrak{v} = \Phi \cdot d\mathfrak{r},$$

ріжничка сили в ґравітацийнім поли

$$d\mathfrak{K} = \Phi_1 d\mathfrak{r} \qquad \text{і т. д.}$$

Щоби задачу рішити, введім деяке улекшення, яке не зміняє його загальности. Зорієнтуймо простір в сей спосіб, щоби його (xy) площа переходила через вектори $\mathfrak{a}$ і $\mathfrak{b}$, при чім приймаємо, що оба вектори мають точку зачіплення в початку укладу.

Під сим заложеннєм трансформація дається зложити з чистого обороту

$$\Phi_\gamma = \begin{Bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

і з діяди

$$\Phi_\varkappa = \begin{Bmatrix} \varkappa & 0 & 0 \\ 0 & \varkappa & 0 \\ 0 & 0 & \varkappa \end{Bmatrix}$$

при чім

$$\varkappa = \frac{|\mathfrak{b}|}{|\mathfrak{a}|}$$

Діяда $\Phi_\varkappa$ дає зміну величин і дімензії вектора $\mathfrak{a}$.

В результаті дістаємо

$$\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} = \Phi_\varkappa \, . \, \Phi_\gamma.$$

Пригадуємо, що ми рішили задачу через пасивну трансформацію: зорієнтовання простору і через активну $\Phi_\varkappa \, . \, \Phi_\gamma$ трансформацію вектора.

Задачі:

1) Вектор $\mathfrak{r} = 3\mathfrak{i} + \mathfrak{j} + \mathfrak{k}$ переходить в вектор

$$\mathfrak{r}' = 2\mathfrak{i} + 3\mathfrak{j} + 4\mathfrak{k}.$$

Як великий є оборот, довкола якої оси і в якій поділці?

2) Найти діяду обороту системи (xyz) для:

$$\alpha = \beta = \gamma = 120^0.$$

3) Вектор рамени $\mathfrak{r} = 2\,m\,\mathfrak{i}$ переходить в вектор моменту

$$\mathfrak{M} = 8\,mkg\,\mathfrak{k}$$

Яка є діяда?

§. 10.

Поля скалярні і векторові.

Коли до кождої точки простору належить точно означена величина, то маємо перед собою „поле“. Підпорядкована величина може бути скалярна пр. температура і тоді є скалярне поле. Колиж она є напрямна, то маємо векторове поле пр. поле маґнетне довкола маґнета.

Надто місцева функція може означати величину і якість фізикального стану і тоді говоримо про фізикальне поле, або може означати чисто ґеометричну величину і тоді говоримо про ґеометричне поле.

Щоби мож було розсліджувати поля, мусимо пізнати ріжничковання скалярних і векторових функцій, де рівночасно побачимо гарне примінення діяд.

§. 11.

Роля діяд в ріжничкованню.

А.

Стан на простій.

1) Нехай t означає час. Подумаймо собі одну точку на простій, в якій розсліджуємо величину скалярну змінну з часом пр.

$$\vartheta = k \cdot e^{-\alpha t}$$

(охолоджування в даній точці).

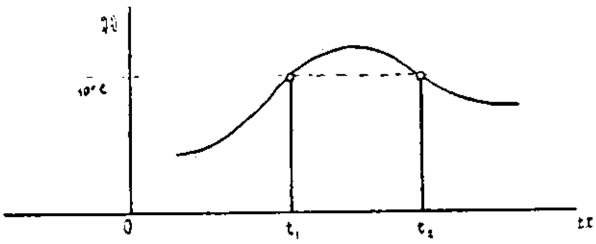
Загально:

$$a = \varphi(t)$$

Похідна, яку будемо означували

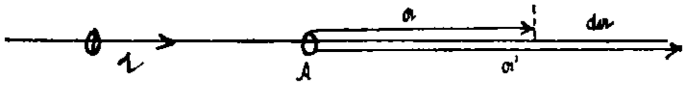
$$\frac{da}{dt} = \dot{a}$$

дає нам льокальну зміну скалярної величини



Фіґ. 9.

2) Нехай буде $\mathfrak{a} = \varphi(t)$ і отже, напрямний стан в точці пр.



Фіґ. 10.

сила, що зміняєся в часі лише що до величини, значить зміняє ся лише

$$|\mathfrak{a}| = \varphi(t).$$

Функцію $\varphi(t)$ розвиваємо в ряд Taylor'а, задержуючи лише нескінчено малі першого ряду і множимо через $\mathfrak{i}$, то дістаєм

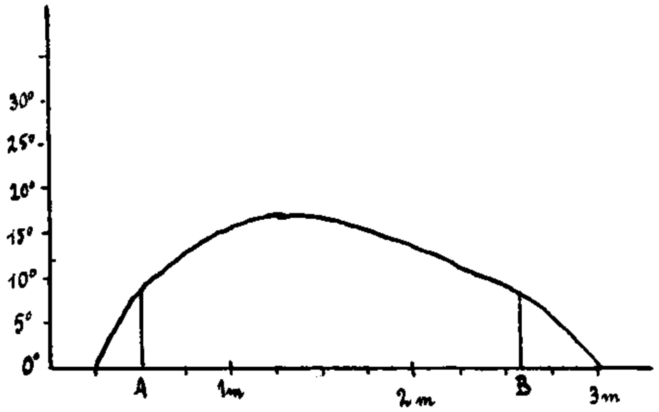
$$d\mathfrak{a} = \varphi'(t)dt \, . \, \mathfrak{i}$$

Звідти

$$\frac{d\mathfrak{a}}{dt} = \varphi'(t) \, . \, \mathfrak{i} = \dot{\mathfrak{a}}$$

дає нам льокальну зміну.

3) Возьмім під увагу скалярну функцію $a = \varphi(x)$, яка нам подає скалярний стан в данім моменті пр. розклад температури поміж вікном і дверми в хаті.



Фіґ. 11.

Точки A і B є точками рівної температури (загально еквіпотенціяльними). Зміна стану є дана через приріст

$$da = \frac{d\varphi}{dx} \, dx$$

Введім символ $\dfrac{d}{dx} \, \mathfrak{i} = \nabla$

(читай його „del") і назвім

$$dx \, \mathfrak{i} = d\mathfrak{r}$$

тоді приріст висше наведений можемо написати в виді

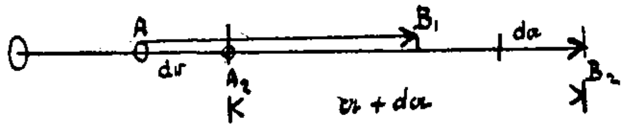
$$da = \nabla\varphi \, . \, d\mathfrak{r}$$

звідки

$$\frac{da}{d\mathfrak{r}} = \nabla\varphi$$

Величина $\nabla\varphi$ дає нам субстанціяльну зміну скалярної величини $\varphi(x)$ в напрямі $d\mathfrak{r}$.

4) Нехай $\mathfrak{a} = \varphi(x)\mathfrak{i}$ означає векторову величину, яка зміняється з місцем



Фіґ 12.

Зміні x о dx відповідає зміна вектора $\mathfrak{a}$ о $d\mathfrak{a}$

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} + d\mathfrak{a}.$$

Розвиваючи $\varphi(x)$ після Taylor'а дістаємо

$$d\mathfrak{a} = \frac{d\varphi}{dx} dx\mathfrak{i} = \frac{d\varphi}{dx} \cdot d\mathfrak{r}$$

Вираженнє $\frac{d\varphi}{dx}$ будемо означували $\Phi^{\mathfrak{a}}$ і називали діядою першого ряду з $\mathfrak{a}$.

Отже $\frac{d\mathfrak{a}}{d\mathfrak{r}} = \Phi^{\mathfrak{a}}$.

Діяда $\Phi^{\mathfrak{a}}$ подає нам субстанціяльну зміну вектора $\mathfrak{a}$ в напрямі $d\mathfrak{r}$. Означеннє се оправдається вже при діяді другого ряду.

5) Закладаємо, що рухаємося здовж xx зі скоростю $\mathfrak{v}$ і розсліджуємо стан, який стрічаємо в точках, через які переходимо. Коли сей стан є скалярний, тоді маємо

$$a = \varphi(x, t)$$

при чім x є також функція t.

Зміну стану a

$$da = \frac{\partial a}{\partial t} \cdot dt + \frac{\partial a}{\partial x} \frac{dx}{dt} dt$$

можемо, приймаючи означення попередних случаїв, виразити рівнаннєм

$$da = \dot{a}\, dt + \nabla a \cdot \mathfrak{v} \cdot dt$$

звідки $\frac{da}{dt} = \dot{a} + \nabla a \cdot \mathfrak{v}$.

6) Анальоґічний случай дістанемо для напрямного стану:

$$\mathfrak{a} = \varphi(x, t) \cdot \mathfrak{i}$$

при чім $x = f(t)$

іменно:

$$\mathfrak{da} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,.\,dt\,.\,\mathfrak{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\;\frac{dx}{dt}\,.\,dt\,.\,\mathfrak{i}$$

звідки

$$\frac{d\mathfrak{a}}{dt} = \dot{\mathfrak{a}} + \Phi_\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{v}.$$

Порівнаймо результати в 5) і 6), то бачимо, що діяда в ріжничковім рахунку має таку саму ролю при векторах, як ∇ т. з. оператор Hamilton'а при скалярах. Обі величини характеризують субстанціяльну зміну і є звязані з $\mathfrak{v}$ т. є скоростю, з якою обсерватор рухається.

Б.

Стан на площі.

1) Коли стан в точці $P(x_0y_0)$ є скалярний і залежить лише від часу

$$a = \varphi(t)$$

тоді льокальна зміна

$$\frac{da}{dt} = \dot{a}.$$

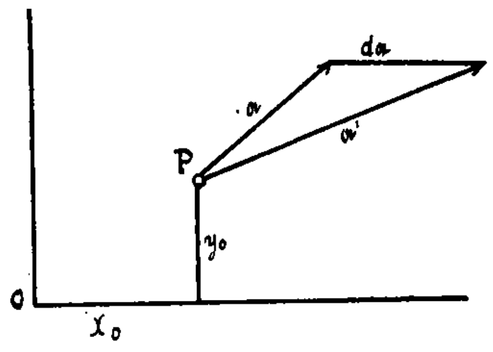
2) Подібно для вектора в точці $P(x_0y_0)$ змінного з часом:

$$\mathfrak{a} = \varphi(t)\mathfrak{i} + \chi(t)\mathfrak{j};$$

зміна в одиниці часу

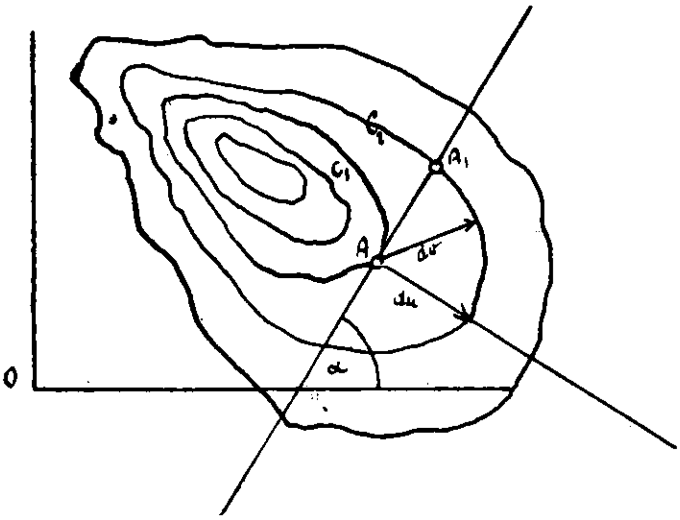
$$\frac{d\mathfrak{a}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\mathfrak{i} + \frac{d\chi}{dt}\mathfrak{j} = \dot{\mathfrak{a}}$$

є льокальною зміною вектора $\mathfrak{a}$.



Фіг. 13.

3) Маємо скалярне поле $a = \varphi(xy)$ независиме від часу пр. $\vartheta = \varphi(xy)$ розклад температури на площі в певнім моменті. Крива $\varphi(xy) = \vartheta$, дає нам ізотерму. Коли a опреділяє нам по-



Фіґ. 14.

тенціял, то криві C_1 C_2... називаємо еквіпотенціяльними.

Приріст $da = \frac{\partial a}{\partial x} dx + \frac{\partial a}{\partial y} dy$

можемо уважати за добуток оператора

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{j}$$

з величини a і з місцевого вектора

$$d\mathfrak{r} = dx\,\mathfrak{i} + dy\,\mathfrak{j},$$

отже

$$da = \nabla a \,.\, d\mathfrak{r}.$$

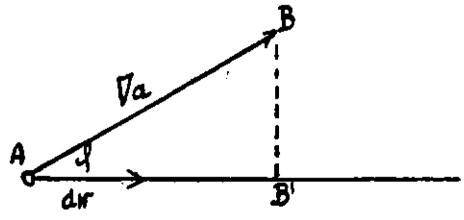
Величина ∇a є зависима лише від поля і називається ґрадєнтом, а пишеться $grad\ a$.

На основі дефініції скалярного добутка

$$\begin{aligned} da &= \nabla a\ d\mathfrak{r} \\ &= |\nabla a||d\mathfrak{r}|\cos\varphi \\ &= |\nabla a|\,dr\,\cos\varphi \end{aligned}$$

звідси

$$\frac{da}{dr} = |\nabla a|\cos\varphi$$



Фіґ. 15.

Щоби зазначити, що сей приріст відбувається в напрямі $d\mathfrak{r}$, множимо обі сторони через одиницю напрямну $\mathfrak{m}$.

Тимсамим дістаємо на правій стороні вектор

$$|\nabla a| \cos \varphi \, . \, \mathfrak{m}$$

який означуємо $\frac{da}{d\mathfrak{r}}$ і називаємо похідною скалярної величини зглядом вектора $d\mathfrak{r}$.

Величина сего вектора „спаду“ $\overrightarrow{AB'}$

$$\frac{da}{d\mathfrak{r}} = |\nabla a| \cos \varphi \quad \mathfrak{m}$$

зміняється враз з кутом φ. Для $\varphi = 0$ приймає максимальну вартість. Назвім приріст $d\mathfrak{r}$ в тім напрямі (який то напрям є рівночасно напрямом ґрадєнта $grad\ a = \nabla a$) через $d\mathfrak{n}$, то дістаємо

$$\frac{da}{d\mathfrak{n}} = grad\ a.$$

Для $\varphi = \frac{\pi}{2}$ є $\frac{da}{d\mathfrak{r}} = 0$.

Ті два напрями: зерового і максимального спаду відгривають в теоретичній фізиці велику ролю.

Возьмім під увагу довільну лінію

$$a = \varphi(xy) = const$$

то $$da = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0$$

звідки $$tg\alpha = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}.$$

Рівночасно ґрадєнт

$$grad\ a = \nabla a = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathfrak{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathfrak{j}$$

має зглядом xx нахилення

$$tg\beta = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}, \text{ отже } = -\frac{1}{tg\alpha},$$

що значить, що ґраденти і еквіпотенціяли пересікаються під простим кутом.

4) Коли дане поле

$$\mathfrak{a} = \varphi(xy)\,\mathfrak{i} + \chi(xy)\,\mathfrak{j},$$

то приріст $d\mathfrak{a}$

$$d\mathfrak{a} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy\right)\mathfrak{i} + \left(\frac{\partial\chi}{\partial x}dx + \frac{\partial\chi}{\partial y}dy\right)\mathfrak{j}$$

дається представити діядою другого ряду

$$\Phi^{\mathfrak{a}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\chi}{\partial x} & \frac{\partial\chi}{\partial y} \end{Bmatrix},$$

іменно

$$d\mathfrak{a} = \Phi^{\mathfrak{a}} \,.\, d\mathfrak{r},$$

при чім

$$d\mathfrak{r} = dx\,\mathfrak{i} + dy\,\mathfrak{j}.$$

Коли напрямна одиниця є $\mathfrak{m}$, так що

$$d\mathfrak{r} = dr \,.\, \mathfrak{m},$$

тоді

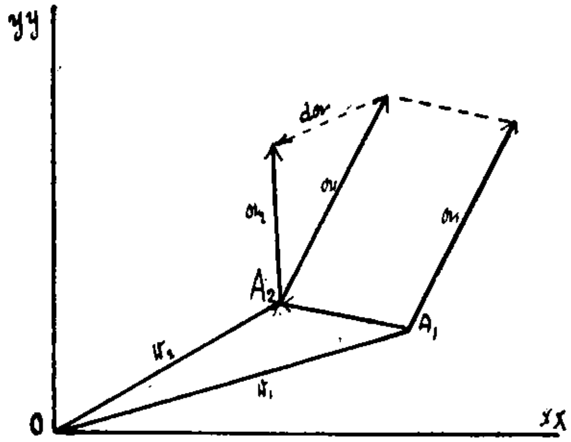
$$\frac{d\mathfrak{a}}{dr} = \Phi^{\mathfrak{a}} \,.\, \mathfrak{m}.$$

Сей вектор помножений через $\mathfrak{m}$ скалярно, дає нам скалярну величину, яку будемо називати $\frac{d\mathfrak{a}}{d\mathfrak{r}}$.

Коли $$\mathfrak{m} = \mathfrak{i}\cos\alpha + \mathfrak{j}\sin\alpha,$$

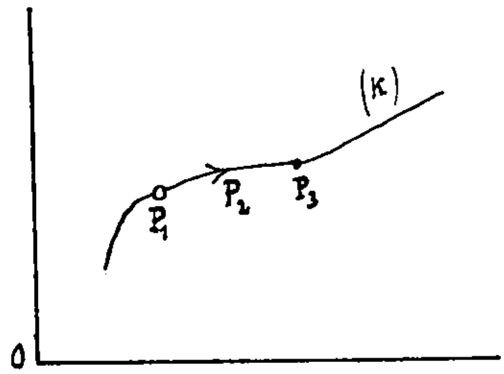
то

$$\frac{d\mathfrak{a}}{d\mathfrak{r}} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos^2\alpha + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\chi}{\partial x}\right)\cos\alpha\sin\alpha + \frac{\partial\chi}{\partial y}\sin^2\alpha.$$



Фіг. 16.

Сей скаляр дає нам безглядну вартість складового приросту вектора в напрямі $d\mathfrak{r}$.



Фіг. 17.

5) Нехай буде дане скалярне поле

$$a = \varphi(xyt),$$

при чім

$$\left.\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= g(t) \end{aligned}\right\} (k)$$

то значить, що ми рухаємося по кривій (k) і розсліджуємо стан, який по дорозі стрічаємо. Приростови dt відповідає зміна

$$da = \frac{\partial\varphi}{\partial t}dt + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)dt.$$

А, що

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathfrak{j} = \nabla a$$

$$\frac{dx}{dt}\mathfrak{i} + \frac{dy}{dt}\mathfrak{j} = \mathfrak{v},$$

тому

$$\frac{da}{dt} = \dot{a} + \nabla a \, . \, \mathfrak{v}.$$

6) Анальоґічно розумуючи дістаємо для векторового поля

$$\frac{d\mathfrak{a}}{dt} = \dot{\mathfrak{a}} + \Phi^{\mathfrak{a}} \, . \, \mathfrak{v}.$$

B.

Стан в просторі.

Розважання даються добре поширити на простір, при чім вираженнє

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{k} = \nabla$$

є властивим оператором Hamilton'a, а

$$\Phi^{\mathfrak{a}} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial\chi}{\partial x} & \frac{\partial\chi}{\partial y} & \frac{\partial\chi}{\partial z} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial z} \end{array} \right\}$$

є діядою третого ряду.

Розуміється, що ∇a дістаємо при скалярнім поли $a = \varphi(xyz)$, а діяду при векторовім поли

$$\mathfrak{a} = \varphi(xyz)\,\mathfrak{i} + \chi(xyz)\,\mathfrak{j} + \psi(xyz)\,\mathfrak{k}.$$

В случаю, коли рухаємося по кривій в просторі

$$(k) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t), \end{array} \right.$$

дістаємо

$$\frac{da}{dt} = \dot{a} + \nabla a \, . \, \mathfrak{v}$$

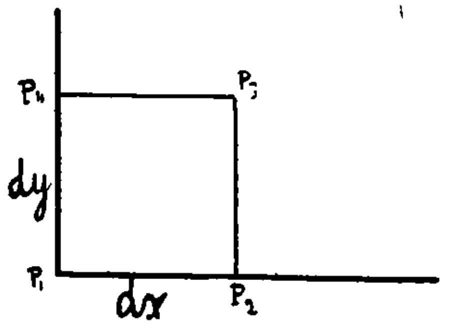
евентуально

$$\frac{d\mathfrak{a}}{dt} = \dot{\mathfrak{a}} + \Phi^{\mathfrak{a}} \, \mathfrak{v},$$

де $\mathfrak{v}$ є скорість нашого руху.

§. 12.

Розложеннє діяди другого ряду.



Фіґ. 18.

Маємо дане векторове поле

$$\mathfrak{a} = a_x \mathfrak{i} + a_y \mathfrak{j}.$$

Коли сей вектор має в точці P_1 складові $(a_x\, a_y)$, то сусідні точки мають сорядні

$$(P_2) \qquad \mathfrak{a}_2 = \left(a_x + \frac{\partial a_x}{\partial x} dx,\ a_y + \frac{\partial a_y}{\partial x} dx\right)$$

$$(P_3) \qquad \mathfrak{a}_3 = \left(a_x + \frac{\partial a_x}{\partial x} dx + \frac{\partial a_x}{\partial y} dy,\ a_y + \frac{\partial a_y}{\partial x} dx + \frac{\partial a_y}{\partial y} dy\right)$$

$$(P_4) \qquad \mathfrak{a}_4 = \left(a_x + \frac{\partial a_x}{\partial y} dy,\ a_y + \frac{\partial a_y}{\partial y} dy\right).$$

Введім діяду другого ряду

$$\Phi^{\mathfrak{a}} = \left\{ \begin{array}{cc} \dfrac{\partial a_x}{\partial x} & \dfrac{\partial a_x}{\partial y} \\ \dfrac{\partial a_y}{\partial x} & \dfrac{\partial a_y}{\partial y} \end{array} \right\}$$

то можемо написати

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} + \Phi^{\mathfrak{a}} d\mathfrak{r}.$$

Покажемо, що діяда $\Phi^{\mathfrak{a}}$ дається розложити на 3 діяди, а кожда з них має спеціяльне ґеометричне значіннє.

Рахунок діяд, як ми вже висше зазначили, має найбільше приміненнє в теорії деформовального осередка. Вправді звичайно вектор є силою, що спричинює деформацію, то все таки діяда має значіннє для всіх можливих векторів. Длятого зробимо заложеннє, яке позволить нам розложені діяди без виімку інтерпретувати ґеометрично.

Закладаємо, що вектор уділяє своїй точці зачіплення пересуненнє в напрямі вектора і пропорціонально до величини вектора, но сочинник пропорціональности мусить бути так дібраний, щоби зміна довжини була зглядом довжини самої нескінчено мала.

(Оправданнє такого заложення дають нам сочинники видовження в теорії упругости.)

По такім заложенню вернім до задачі.

Для упрощення подумаймо собі, що вектор поля $\mathfrak{a}$ вже є помножений через нескінчено малий сочинник, так що $\mathfrak{a}$ вже є вектором пересунення.

На питаннє, як здеформується простокутник

$$P_1 P_2 P_3 P_4,$$

дає нам відповідь формула

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} + \Phi^a d\mathfrak{r}$$

яка каже, що кожда точка пересунеся о вектор $\mathfrak{a}$ (рівнобіжне пересуненнє).

Се означає рівнобіжне пересуненнє цілого medium і се нас мало інтересує, бо воно не спричинює ніякої внутрішної зміни точок. Натомість звернемо увагу на другу часть $\Phi^a d\mathfrak{r}$.

Щоби її розслідити, приглянемося вперед, як зміниться квадрат о боці $= 1$.

Ті зміни є зглядом довжини боків нескінчено малі і виражаються похідними

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}, \ \frac{\partial a_x}{\partial y} \text{ і т. д.}$$

Що ми dx і dy заступаємо коротко через 1, є оправдане тим, що ми обрали одиницю нескінчено малу. Надто в розвиненню Taylor'а ограничуємося до перших членів.

Вибір такого нескінчено малого „одиничного“ квадрата є дуже корисний при дальших розслідах.

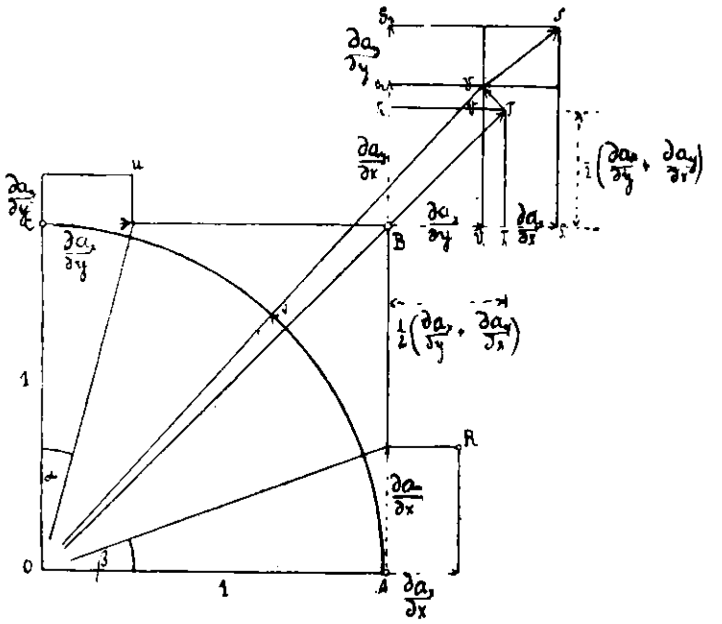
Пересуненнє вершків квадрата одиничного A, B і C видко з фіґ. 19. Найбільше скомплікований рух виконує точка B. Єї дорогу $\overrightarrow{BS}$ можемо зложити з векторів

$$\overrightarrow{BS_1} \text{ і } \overrightarrow{BS_2}$$

або, що для рахунку діяд важнійше, з трех векторів:

1) $\overrightarrow{BT}$, то є симетричного пересунення або здовж перекутні; для него $$|\overrightarrow{BT_1}| = |\overrightarrow{BT_2}|.$$

2) $\overrightarrow{TV}$, то є обороту довкола точки 0 в площі (xy) о кут (значить довкола оси рівнобіжної до оси zz),



Фіґ. 19.

і 3) $\overrightarrow{VS}$ асиметричного пересунення здовж осий.

Про ті пересунення можемо сказати, що слідує:

Величина $|BT_1| = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_x}{\partial y} + \frac{\partial a_y}{\partial x}\right)$; **єї називаємо середним видовженнєм перекутні і означуємо** x_y.

З огляду, що $|\overrightarrow{BT_1}| = |\overrightarrow{BT_2}|$

$$x_y = y_x$$

Ad 2. Дугу $\widehat{TU}$ **можемо уважати за простолінійну довжину** і вичислити єї з трикутника $[TWV]$

$$|\overline{TV}| = \sqrt{\frac{\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)^2}{2}}$$

звідси скрученнє

$$= \frac{|\,T_V\,|}{|\overrightarrow{OB}| + |\overrightarrow{BT}|};$$

а що $|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{2}$, а $\overrightarrow{BT}$ є нескінчено малою висшого ряду, отже

$$\nu = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right).$$

Дальше бачимо з фіґури, що

$$tg\,\alpha = \frac{\partial a_x}{\partial y}, \quad tg\,\beta = \frac{\partial a_y}{\partial x}$$

а що кути є малі, то:

$$\nu = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

Ad 3. Асиметричне видовження

$$\frac{\partial a_x}{dx} \text{ і } \frac{\partial a_y}{\partial y}$$

називаємо коротко x_x і y_y.

Тепер побачимо, як ті три деформації даються з діяди безпосередно відчитати.

Розложім діяду Φ^a, яку дістаєм з формули

$$da = \Phi^1 \,.\, dr,$$

на симетричну і антісиметричну.

$$\Phi^a = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial a_x}{\partial x}, & \dfrac{\dfrac{\partial a_x}{dy} + \dfrac{\partial a_y}{\partial x}}{2} \\ \dfrac{\dfrac{\partial a_y}{\partial x} + \dfrac{\partial a_x}{\partial y}}{2}, & \dfrac{\partial a_y}{\partial y} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0, & \dfrac{\partial a_x}{\partial y} - \dfrac{\partial a_y}{\partial x} \\ \dfrac{\partial a_y}{\partial x} - \dfrac{\partial a_x}{\partial y}, & 0 \end{Bmatrix}.$$

Першу часть розложім дальше на 2 части Φ^a_I і Φ^a_{II}, іменно:

$$\Phi^a_I = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial a_x}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial a_y}{\partial y} \end{Bmatrix}. \quad \text{і} \quad \Phi^1_{II} = \begin{Bmatrix} 0, & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial a_x}{\partial y} + \dfrac{\partial a_y}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial a_y}{\partial x} + \dfrac{\partial a_x}{\partial y}\right), & 0 \end{Bmatrix}.$$

Коли введемо умовлені висше знаки, то дістанемо

$$da = \Phi^1 \,.\, dr =$$

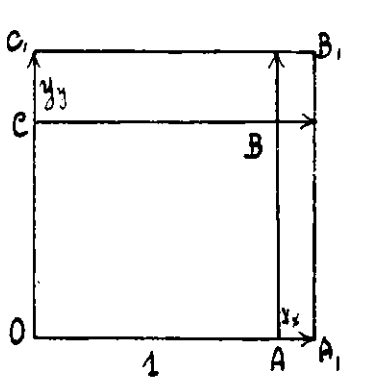
$$= \begin{Bmatrix} x_x & 0 \\ 0 & y_y \end{Bmatrix} dr + \begin{Bmatrix} 0 & x_y \\ y_x & 0 \end{Bmatrix} dr + \begin{Bmatrix} 0 & -\nu \\ & 0 \end{Bmatrix} dr$$

або

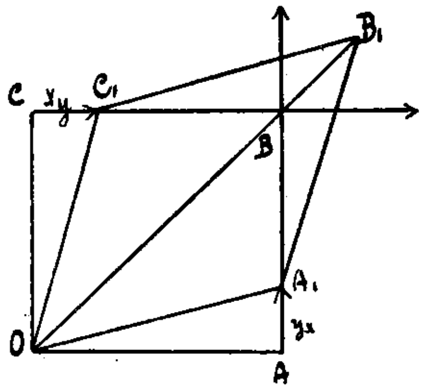
$$= \Phi^a_I dr + \Phi^a_{II} dr + \Phi^a_{III} dr$$

при чім $x_y = y_x$.

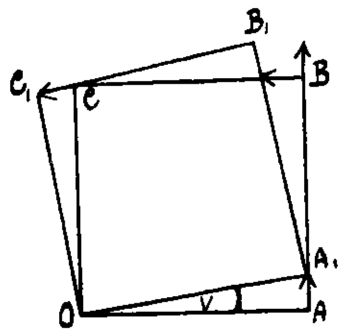
Ті три деформації, які викликує приріст вектора a на нескінчено малім одиничнім квадраті, представляються ґеометрично в слідуючий спосіб:



Фіґ. 20. а.



Фіґ. 20. б.



Фіґ. 20. в.

Приріст $\Phi_I d\tau$ спричинює видовження в напрямі осий, при чім кути не деформуються.

$\Phi_{II} d\tau$ видовжує перекутню, замінює квадрат на ромб.

В наслідок антісиметричної части $\Phi_{III} d\tau$ обертається цілий квадрат о кут при чім вид не змінюється (чистий оборот).

На зміну величини поверхні має вплив лише перша діяда, що і тим проявляється, що в ній бачимо обі складові части діверґенції:

$$div\ \mathfrak{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y}.$$

Діяда $\Phi_I + \Phi_{II}$ називається діядою видовження (Streckdyade), а Φ_{III} діядою обороту (Drehdyade).

Те саме розумованнє дається докладно примінити при три- і висше-вимірнім просторі.

Для трох-вимірного дістаємо:

$$\Phi_I = \begin{Bmatrix} x_x & 0 & 0 \\ 0 & y_y & 0 \\ 0 & 0 & z_z \end{Bmatrix}$$

$$\Phi_{II} = \begin{Bmatrix} 0 & x_y & x_z \\ y_x & 0 & y_z \\ z_x & z_y & 0 \end{Bmatrix}, \quad \text{при чім} \quad \begin{matrix} x_y = y_x \\ y_z = z_y \\ z_x = x_z \end{matrix}$$

$$\text{і } \Phi_{III} = \begin{Bmatrix} 0 & -\nu & \mu \\ \nu & 0 & -\lambda \\ -\mu & \lambda & 0 \end{Bmatrix}$$

Часть Φ_I дає зміну обєму (Volumsdilatation), Φ_{II} дає зміну виду (Gestaltänderung), трета часть Φ_{III} обертає куб довкола певної оси. Сей оборот дається розложити на 3 обороти, складові довкола осей *xx*, *yy*, *zz*, а величину складових оборотів дають нам числа $\lambda\ \mu\ \nu$. Сю діяду називаємо оборотом середовища (Drehung des Mediums).

В першій части маємо до діла зі складовими частями

$$div\ \mathfrak{a} = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right).$$

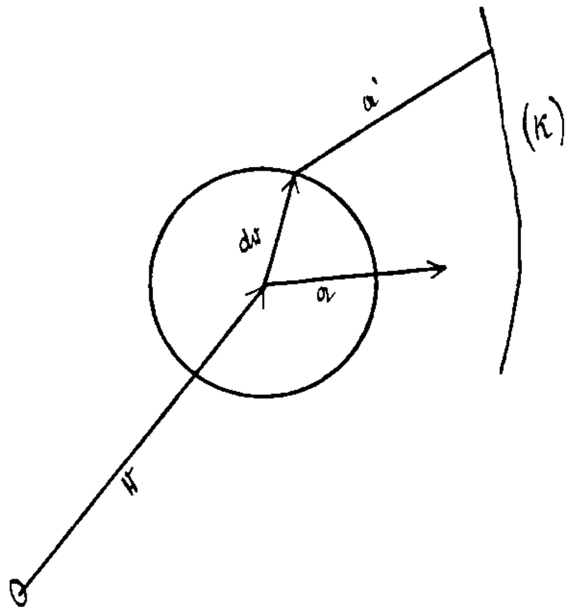
Ми бачимо, що діяда стаєть сильним средством, щоби розпізнати, з яким векторовим полем маємо до діла.

Повисші результати даються в теорії упругости прямо примінити.

Коли $\Phi_I^{\mathfrak{a}} = 0$, то поле є безжерельне (quellenfrei), його $div\ \mathfrak{a} = 0$.

Колиж $\Phi_{III}^{\mathfrak{a}} = 0$, то поле є безвирове (wirbelfrei), його $curl\ \mathfrak{a} = 0$.

§. 13.
Головні оси деформації (на площі).



Фіґ. 21.

Возьмім під увагу рівнаннє

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} + \Phi \,.\, d\mathfrak{r}$$

загально

$$\mathfrak{a} = f(d\mathfrak{r}).$$

Коли конець вектора $d\mathfrak{r}$ рухаєть ся по колї, то конець вектора $\mathfrak{a}'$ зачеркує певну криву (k). Пошукаймо таких $d\mathfrak{r}$, при яких $\Phi_s d\mathfrak{r}$ йде здовж напряму $d\mathfrak{r}$, то є шукаємо напряму чистого видовження (reine Streckung).

Се буде тоді, коли $\Phi\, d\mathfrak{r}$ буде пропорціональне до $d\mathfrak{r}$, значить

$$\Phi_s d\mathfrak{r} = \lambda d\mathfrak{r}$$

де λ є скалярний чинник пропорціональности. Його можемо написати в виді діяди λI, при чім

$$I = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix},$$

отже

$$\Phi_s d\mathfrak{r} = \lambda I d\mathfrak{r},$$

а звідси

$$(\Phi_s - \lambda I)\, d\mathfrak{r} = 0.$$

Підставмо значіннє Φ_s, то дістанемо повисше рівнаннє в векторовім виді

$$\left\{\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} - \lambda\right) dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_x}{\partial y} + \frac{\partial a_y}{\partial x}\right) dy\right\}\mathfrak{i} +$$
$$+ \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} + \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) dx + \left(\frac{\partial a_y}{\partial y} - \lambda\right) dy\right\}\mathfrak{j} = 0.$$

Але вектор може бути рівний зеро лише тоді, коли його обі складові є зером; звідси дістаєм дві умови до вишукання жаданих напрямів:

$$(a)\quad \begin{aligned} &\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}-\lambda\right)dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_x}{\partial y} + \frac{\partial a_y}{\partial x}\right)dy = 0 \\ &\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} + \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)dx + \left(\frac{\partial a_y}{\partial y}-\lambda\right)dy = 0. \end{aligned}$$

А що dx і dy є ріжні від зера, тому зникає визначник зі сочинників

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial a_x}{\partial x}-\lambda, & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial a_x}{\partial y} + \dfrac{\partial a_y}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial a_y}{\partial x} + \dfrac{\partial a_x}{\partial y}\right), & \left(\dfrac{\partial a_y}{\partial y}-\lambda\right) \end{vmatrix} = 0$$

звідси

$$\lambda^2-\lambda\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial a_x}{\partial y}\,\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_x}{\partial y} + \frac{\partial a_y}{\partial x}\right)^2 = 0$$

Отже дістаєм дві все дійсні вартости на λ (вираженнє під корінем є все додатне), а при помочи рівнань (a) вирахуємо

$$\frac{dy}{dx} = tg\alpha.$$

З діядного рівнання по підставленню вартостий на λ дістаємо:

$$\begin{aligned} (\Phi_s-\lambda_1 I)\,d\mathfrak{r}_1 &= 0 \\ (\Phi_s-\lambda_2 I)\,d\mathfrak{r}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Помножім перше з них через $d\mathfrak{r}_2$, а друге через $d\mathfrak{r}_1$ і віднимім, то буде

$$(\lambda_1-\lambda_2)\,d\mathfrak{r}_1\,d\mathfrak{r}_2 = 0,$$

а що загально беручи $\lambda_1 \neq \lambda_2$, тому $d\mathfrak{r}_1 d\mathfrak{r}_2 = 0$, се значить, що оба напрями стоять на собі прямовісно. Ми називаємо їх головними напрямами деформації.

З рівнання для λ виходить, що

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} = div\,\mathfrak{a} = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Сю величину називаємо сочинником видовження площі.

Розумованнє дається легко поширити на простір.

Приміри.

1) Маємо розслідити поле $\mathfrak{P} = xi + 2yj$. В тій ціли творимо ріжничкову діяду

$$\Phi^{\mathfrak{P}} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}.$$

Вона показує нам, що сила $\mathfrak{P}$ не спричинює ніякого обороту середовища, а лише видовження. Щоби найти головні оси деформації, творимо визначник:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda, & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

і находимо $\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2$

отже: $div\, a = 3$.

Для напрямів маємо похідні:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\left(\lambda - \frac{\partial a_x}{\partial x}\right)}{\frac{\partial a_x}{\partial y} + \frac{\partial a_y}{\partial x}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial a_y}{\partial x} + \frac{\partial a_x}{\partial y}}{2\left(\lambda - \frac{\partial a_y}{\partial y}\right)},$$

звідки для $\lambda_1 = 1 \quad \varphi_1 = 0$

$\lambda_2 = 2 \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$.

Щоби се поле представити ґрафічно, нарисуймо коло о лучу $\overline{OA} = 1$ і в достаточнім числі точок його обводу нарисуймо вектор $\mathfrak{P} = xi + 2yj$. На основі рис. 21. можемо так сказати:

Полевий вектор $\mathfrak{P}$ деформує одиничне коло в еліпсу, якої оси накривають оси укладу. Сей спосіб представлення деформації є дуже простий і корисний для оцінки поля.

Легко можна переконатися, що окружний інтеґрал здовж одиничного кола (Rundarbeit)

$$L_{\bigcirc} = 0.$$

Надто можемо найти таку функцію $H(xy)$, що

$$grad\, H = \nabla H = \mathfrak{P}$$

звідки $$\frac{\partial H}{\partial x} = x \quad \frac{\partial H}{\partial y} = 2y$$

іменно $$H = \frac{x^2}{2} + y^2 + C.$$

Сталу C означуємо з даних початкових. Функцію H називаємо силовою функцією, а її відємну вартість

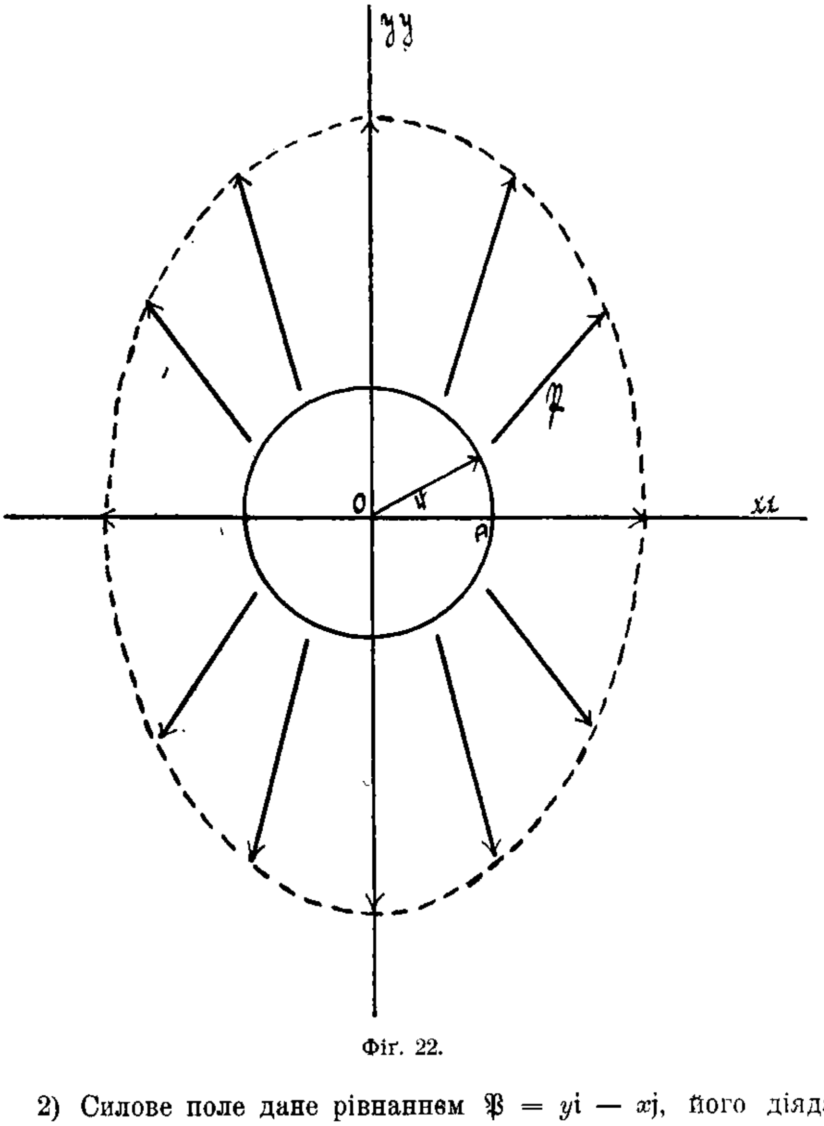
$$V = -H$$

називаємо потенціялом поля.

Взагалі, коли вектор має лише симетричну діяду, то поле має скалярний потенціял. В нашім примірі

$$div\,\mathfrak{P} \neq 0$$
$$curl\,\mathfrak{P} = 0$$

се є безвирове жерельне поле.

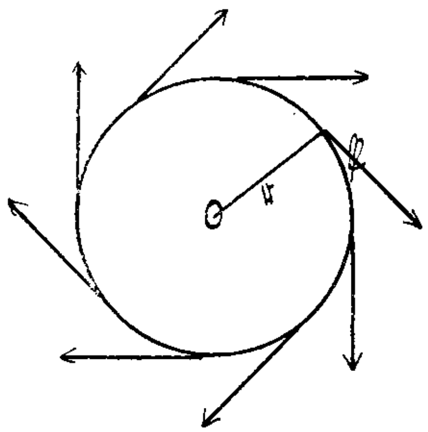


Фіг. 22.

2) Силове поле дане рівнанням $\mathfrak{P} = y\mathrm{i} - x\mathrm{j}$, його діяда

$$\Phi^{\mathfrak{P}} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Bmatrix}$$

є антісиметрична, отже $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = 0$ а тимсамим $div\,\mathfrak{P} = 0$.



Фіг. 23.

Окружна праця

$$L_{\bigcirc} = 2r^2\pi \neq 0$$

квот

$$\frac{L_{\bigcirc}}{r^2\pi}$$

є праця на одиниці поверхні; таку працю ми називаємо виром і пишемо в нашім примірі

$$|curl\,\mathfrak{P}| = 2.$$

Таке поле, в якім

$$div\,\mathfrak{P} = 0$$
$$curl\,\mathfrak{P} \neq 0$$

називаєся безжерельне вирове поле.

3) Додаймо оба поля з попередних примірів, то дістанемо

$$\mathfrak{P} = (x + y)\mathfrak{i} + (2y - x)\mathfrak{j}.$$

Його діяда

$$\Phi^{\mathfrak{P}} = \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{Bmatrix}$$

розложена на часть симетричну і антісиметричну дає пізнати, що поле має жерела і вири, та позваляє найти для жерел скалярний потенціял, а для вирів векторовий потенціял.

Задача:

Розслідити потенціял Newton'a при помочи діяд.

Теорія стаєся інтереснійшою але і незвичайно трудною в случаю, коли функції $\varphi(xy)$ і $\chi(xy)$ вектора

$$\mathfrak{a} = \quad \mathfrak{i} + \chi\ \mathfrak{j}$$

є другого або висше як другого степеня.

Для приміру возьмім случай

$$\mathfrak{a} = (x^2 + xy)\mathfrak{i} + (y^2 + xy)\mathfrak{j}$$

Діяда

$$\Phi^{\mathfrak{a}} = \begin{Bmatrix} 2x + y, & x \\ y, & 2y + x \end{Bmatrix}$$

має тензор

$$\Phi^{\mathfrak{a}}_s = \begin{Bmatrix} 2x + y, & \frac{1}{2}(x + y) \\ \frac{1}{2}(x + y), & 2y + x \end{Bmatrix}$$

і ротор

$$\Phi^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{a}} = \begin{Bmatrix} 0, & \frac{1}{2}(x - y) \\ -\frac{1}{2}(x - y), & 0 \end{Bmatrix}.$$

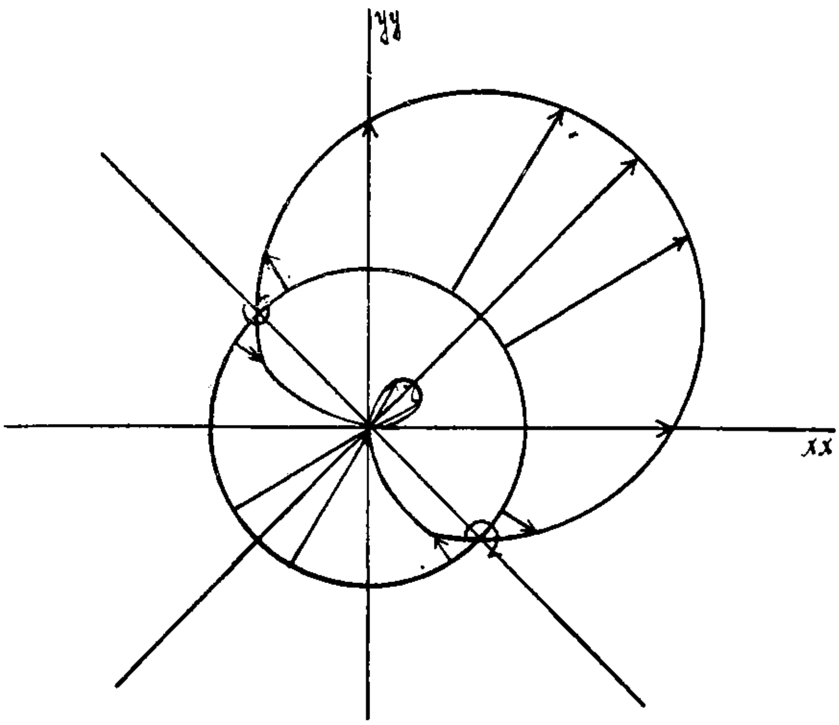
Звідси $div\,\mathfrak{a} = 3(x + y)$.

Оборот можемо виразити вектором, яким є напрямна величина кута обороту

$$= \tfrac{1}{2}(x - y)\mathfrak{k}.$$

Для $x = y$, отже на першім медіяні є $curl\,\mathfrak{a} = 0$, значить є чисте видовження.

Для точок на $y = -x$ є знов $div\,\mathfrak{a} = 0$, а $curl\,\mathfrak{a} \neq 0$, отже є поле чисто вирове. Дуже ясно показує нам се рисунок для одиничного кола.

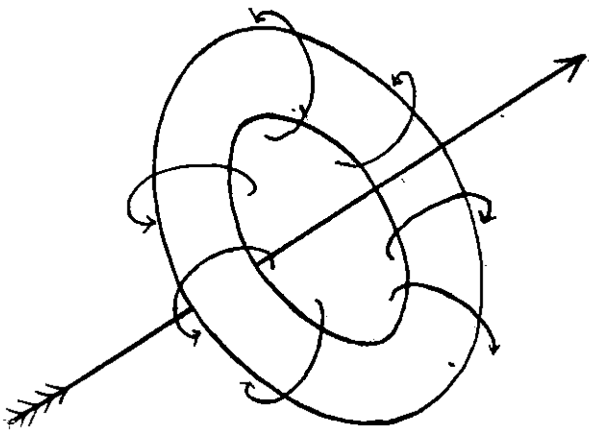


Фіг. 24.

Обернім се поле довкола першого медіяну

$$y = x,$$

то дістанемо поле, в якім пр. з диму мусять творитися вирові перстені (Wirbelring).



Фіґ. 25.

§. 14.
Оператор Hamilton'a a діяди.

В векторовім рахунку уживаємо двох векторів:

1) вектора напряму поступового

$$d\mathfrak{r} = dx\,\mathfrak{i} + dy\,\mathfrak{j} + dz\,\mathfrak{k}$$

і 2) оператора Hamilton'a

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathfrak{k}.$$

Сей послідний має в рахунку діяд велике значіннє, так що о нім дещо поговоримо.

1) Коли до даного скалярного поля

$$a = \varphi(xyz)$$

примінимо ∇, то дістанемо:

$$\nabla a = grad\, a \text{ отже вектор.}$$

Через се в кождій точці підпорядковуємо скалярній величині a величину напрямну:

$$\mathfrak{a} = grad\, a.$$

2) Навідворот вектор $\mathfrak{a}$ заміняється під впливом ∇ на величину скалярну

$$a = div\, \mathfrak{a}.$$

3) Векторовий добуток $[\nabla\mathfrak{a}]$ підпорядковує векторови $\mathfrak{a}$ другий вектор $\mathfrak{u} = curl\, \mathfrak{a}$

$$= \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Звертаємо увагу, що складові сего вектора є як раз подвійні кути оборотів довкола осий, с. є 2λ, 2μ, 2ν.

4) Утворім тензоровий добуток з ∇ і $\mathfrak{a}$, то дістаємо спряжену діяду

$$[[\nabla \mathfrak{a}]] = \Phi^{\mathfrak{a}}_{c}.$$

5) Нехай буде дана діяда напруження

$$S = \begin{Bmatrix} x_x & x_y & x_z \\ y_x & y_y & y_z \\ z_x & z_y & z_z \end{Bmatrix}$$

і утворім з неї скалярний добуток

$$S\nabla.$$

В тім розважанню придаю операторови ∇ значіннє повного вектора, а не щось в роді піввектора, як се роблять автори необзнакомлені з діядами і через те змушені ввести два окремі символи

$$\mathfrak{a}\nabla \text{ і } \nabla\mathfrak{a}.$$

Тим самим усталю на дальше

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot a_x = a_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial x} \text{ і т. д.}$$

На тій основі можу написати рівно добре

$$\nabla S.$$

Коли представимо ∇S в виді вектора, дістанемо

$$\nabla S = \left(\frac{\partial x_x}{\partial x} + \frac{\partial x_y}{\partial y} + \frac{\partial x_z}{\partial z}\right)\mathfrak{i} +$$
$$+ \left(\frac{\partial y_x}{\partial x} + \frac{\partial y_y}{\partial y} + \frac{\partial y_z}{\partial z}\right)\mathfrak{j} +$$
$$+ \left(\frac{\partial z_x}{\partial x} + \frac{\partial z_y}{\partial y} + \frac{\partial z_z}{\partial z}\right)\mathfrak{k}.$$

Складова в напрямі xx є приростом двох стичних і одного нормального напруження і т. д. Отже ∇S представляєть собою ту силу, яку належить примінити, щоби зрівноважити всі напруження, що ділають в одиничнім кубі. Її називають силою поля і означують

$$\mathfrak{F} = div\, S.$$

§. 15.

Основні твердження діяд.

Подамо їх без доказу, бо вистарчить на основі дефініції розвинути обі сторони, щоби пересьвідчитися о їх ідентичности.

1) $\Phi^{\mathfrak{a}}\mathfrak{b} + \Phi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a} = \nabla(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) + [curl\,\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{b}] + [curl\,\mathfrak{b}\,.\,\mathfrak{a}]$.

2) $\Phi^{\mathfrak{a}}\mathfrak{b} - \Phi^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a} = curl\,[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] + \mathfrak{b}\,div\,\mathfrak{a} - \mathfrak{a}\,div\,\mathfrak{b}$.

3) Під заложенням, що

$$(\mathfrak{a}\,d\mathfrak{r}) = 0 \qquad \text{отже } d\mathfrak{r} \perp \mathfrak{a},$$

$$d\mathfrak{a} = \Phi^{\mathfrak{a}} d\mathfrak{r}$$

$$= [curl\,\mathfrak{a}\,.\,d\mathfrak{r}].$$

4) Під заложенням, що

$$[\mathfrak{a}\,d\mathfrak{r}] = 0 \qquad \text{або } d\mathfrak{r} \parallel \mathfrak{a}$$

$$d\mathfrak{a} = \Phi^{\mathfrak{a}} d\mathfrak{r}$$

$$= div\,\mathfrak{a}\,.\,d\mathfrak{r}.$$

З тих двох послідних форм скористаємо при наведених в слідуючім уступі нових доказах твердження Ґаусса і Стокса.

Задачі:

1) Даний скалярний потенціял:

$$U = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

вичислити силу $\mathfrak{P} = -grad\, U$, $\Phi^{\mathfrak{P}}$ і найти $div\,\mathfrak{P}$ і $curl\,\mathfrak{P}$.

2) Даний векторовий потенціял:

$$\mathfrak{U} = \tfrac{1}{2}(y - z)^2\mathfrak{i} + \tfrac{1}{2}(z - x)^2\mathfrak{j} + \tfrac{1}{2}(x - y)^2\mathfrak{k},$$

вичислити силу $\mathfrak{P} = curl\,\mathfrak{U}$.
Як виглядає тут $\Phi^{\mathfrak{P}}$. Вичислити $div\,\mathfrak{P}$ і $curl\,\mathfrak{P}$.

3) Дане силове поле

$$\mathfrak{P} = (x + 2y)\mathfrak{i} + (y + 2z)\mathfrak{j} + (z + 2x)\mathfrak{k}.$$

Найти при помочи діяд потенціял скалярний і векторовий.

4) Розслідити, яке значіннє мають діяди при розвиненю скаляра і вектора (як функцій місця) в ряд Taylor'а.

§. 16.

Інтеґральні твердження.

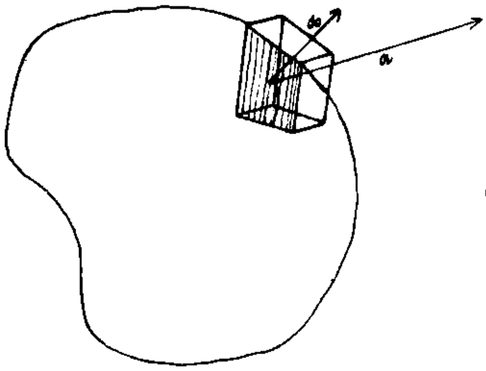
I.

Твердження Gauss'a.

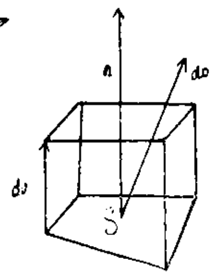
Під заложенням $[\mathfrak{a}\, d\mathfrak{r}] = 0$ приріст полевого вектора виражається:

$$d\mathfrak{a} = \Phi^{\mathfrak{a}} d\mathfrak{r} = div\, \mathfrak{a}\, d\mathfrak{r}.$$

Коли $\mathfrak{a}$ представляєть силове поле, то маємо до діла зі случайом, який часто стрічаємо в фізиці, іменно ми йдем в напрямі сили.



Фіґ. 26.



Фіґ. 26. a.

Возьмім під увагу довільну замкнену поверхню (Фіґ. 26.) в поли, то векторна ріка через напрямний елемент поверхні $d\mathfrak{v}$ є дана скалярним добутком $\mathfrak{a}\, d\mathfrak{v}$. При тім $d\mathfrak{v}$ є осевим вектором, якого змисл показує вніщна нормальна.

Виберім $d\mathfrak{r}$ в напрямі вектора $\mathfrak{a}$, то маємо

$$d\mathfrak{a} = div\, \mathfrak{a}\, d\mathfrak{r}.$$

В сусідній точці має полевий вектор вартість

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} + div\, \mathfrak{a}\, d\mathfrak{r}.$$

Помножім обі сторони скалярно через $d\mathfrak{v}$, то дістаєм, з огляду на $d\mathfrak{v} \,.\, d\mathfrak{r} = dv$,

$$\mathfrak{a}' d\mathfrak{v} = \mathfrak{a}\, d\mathfrak{v} + div\, \mathfrak{a} \,.\, dv.$$

А що $d\mathfrak{v}$ ріжниться від $d\mathfrak{v}'$ нескінчено малими висших рядів, то можна написати:

$$\mathfrak{a}' d\mathfrak{v}' = \mathfrak{a}\, d\mathfrak{v} + div\, \mathfrak{a}\, dv.$$

Зінтеґруймо се рівнаннє над цілою поверхнею, то дістаєм

$$\int \mathfrak{a}' d\mathfrak{v}' = \int \mathfrak{a}\, d\mathfrak{v} + \int div\, \mathfrak{a}\, dv.$$

Інтеґрал $\int div\, \mathfrak{a}\, dv$ відноситься до обєму нескінчено тонкеї верстви, грубости $d\mathfrak{r}$.

Фіґ. 27.

Поділім обєм даної замкненої поверхні на слої

$\lambda,\ \lambda_{-1},\qquad 2,\ 1,$

доки не дійдем до якоїсь точки C.

Для перегляду уживаємо поєдинчого знаку інтеґрала, бо з сего не може вийти помилка.

Для першої верстви дістаєм:

$$\int \mathfrak{a}_1 d\mathfrak{v}_1 = \int \mathfrak{a}_0 d\mathfrak{v}_0 + \int div\, \mathfrak{a}_0 dv_0.$$

А що $d\mathfrak{v}_0 = 0$ (поверхня точки C), то перша верства дає нам

$$\int \mathfrak{a}_1 d\mathfrak{v}_1 = \int div\, \mathfrak{a}_0 dv_0,$$

друга верства дає

$$\int \mathfrak{a}_2 d\mathfrak{v}_2 = \int \mathfrak{a}_1 d\mathfrak{v}_1 + \int div\, \mathfrak{a}_1 dv_1$$

і т. д. а послідна

$$\int \mathfrak{a}_\lambda d\mathfrak{v}_\lambda = \int \mathfrak{a}_{\lambda-1} d\mathfrak{v}_{\lambda-1} = \int div\, \mathfrak{a}_{\lambda-1} dv_{\lambda-1}.$$

Додаймо ті рівности сторонами, то по счеркненю рівних членів дістаєм

$$\int \mathfrak{a}_\lambda d\mathfrak{v}_\lambda = \int div\, \mathfrak{a}_0 dv_0 + \int div\, \mathfrak{a}_1 dv_1 + \qquad + \int div\, \mathfrak{a}_{\lambda-1} dv_{\lambda-1}.$$

Коли по лівій стороні інтеґрал віднесем до поверхні замкненої (зовнішної), а по правій условимося інтеґрувати над всіми елєментами замкненої поверхні, то можемо написати коротко

$$\int \mathfrak{a}\, d\mathfrak{v} = \int div\, \mathfrak{a}\, dv.$$

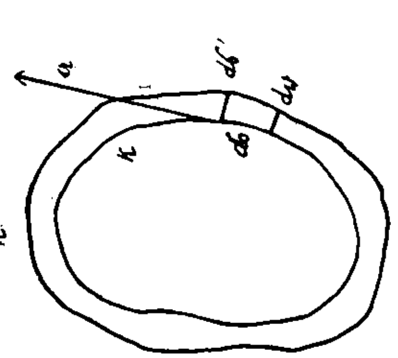
Се є твердженнє Ґаусса, що позваляєть нам замінити інтеґрал поверхневий інтеґралом обємним.

II.

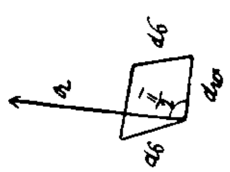
Твердження Stockes'a.

З заложення $(\mathfrak{a}\, d\mathfrak{r}) = 0$ виходить, що приріст полевого вектора дається виразити

$$\begin{aligned} d\mathfrak{a} &= \Phi \,.\, d\mathfrak{r} \\ &= [curl\, \mathfrak{a} \,.\, d\mathfrak{r}]. \end{aligned}$$



Фіг. 28.



Фіг. 28. а.

Возмім під увагу замкнену криву (k) в данім полю; $d\mathfrak{r}$ замикає з $\mathfrak{a}$ кут $\frac{\pi}{2}$.

В сусідній точці $\mathfrak{a}$ має вартість

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} + d\mathfrak{a} = \mathfrak{a} + [curl\, \mathfrak{a}\, d\mathfrak{r}]$$

а $d\mathfrak{s}$ $\quad d\mathfrak{s}'$.

Помножім $\mathfrak{a}'$ скалярно через $d\mathfrak{s}$, то буде:

$$\mathfrak{a}' d\mathfrak{s} = \mathfrak{a} d\mathfrak{s} + [curl\, \mathfrak{a}\, d\mathfrak{r}]\, d\mathfrak{s},$$

а що

$$\begin{aligned} [curl\, \mathfrak{a}\, d\mathfrak{r}]\, d\mathfrak{s} &= vurl\, \mathfrak{a}\, [d\mathfrak{r} d\mathfrak{s}] \\ &= curl\, \mathfrak{a}\, d\mathfrak{v} \end{aligned}$$

а надто що $d\mathfrak{s}'$ ріжниться нескінчено малими висших рядів, тому

$$\mathfrak{a}' d\mathfrak{s}' = \mathfrak{a} d\mathfrak{s} + curl\, \mathfrak{a}\, d\mathfrak{v}.$$

Інтеґрал здовж кривої (k) дає нам

$$\int \mathfrak{a}' d\mathfrak{s}' = \int \mathfrak{a}\, d\mathfrak{s} + \int curl\, \mathfrak{a}\, d\mathfrak{v}.$$

Поділім поверхню, замкнену кривою $k'' > k' > k$ кривими 1, 2, 3, $\quad \lambda$ на тонкі перстені з кривою береговою λ, то дістанемо для першого перстення

$$\int \mathfrak{a}_1 d\mathfrak{s}_1 = \int \mathfrak{a}_0 d\mathfrak{s}_0 + \int curl\, \mathfrak{a}_0 d\mathfrak{v}_0.$$

А що $d\mathfrak{s}_0 = 0$ (обвід точки), то лишається

$$\int \mathfrak{a}_1 d\mathfrak{s}_1 = \int curl\, \mathfrak{a}_0 d\mathfrak{s}_0.$$

Для другого перстеня буде

$$\int \mathfrak{a}_2 d\mathfrak{s}_2 = \int \mathfrak{a}_1 d\mathfrak{s}_1 + \int curl\, \mathfrak{a}_1 d\mathfrak{s}_1$$

і т. д., — а для послідного

$$\int \mathfrak{a}_\lambda d\mathfrak{s}_\lambda = \int \mathfrak{a}_{\lambda-1} d\mathfrak{s}_{\lambda-1} + \int curl\, \mathfrak{a}_{\lambda-1} d\mathfrak{v}_{\lambda-1}.$$

Додаймо всі рівнання обосторонно, то по счеркненню рівних членів і умові, що по лівій стороні інтеґруємо над береговою кривою, а по правій над елементами поверхні, які вона замикає, пишемо

$$\int \mathfrak{a}\, d\mathfrak{s} = \int curl\, \mathfrak{a}\, d\mathfrak{v}.$$

Задачі:

1) При помочи діяд розслідити поле скорости $\mathfrak{v} = \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathfrak{j}$ в напрямі $d\mathfrak{r} = dx\mathfrak{i} + dz\mathfrak{k}$.

(Тротуари Вельса).

2) Розслідити поле

$$\mathfrak{v} = \sqrt{a^2 - (x^2 + z^2)}\,\mathfrak{j}.$$

(Водопроводи!)

В Красноярську (Сибір), 1919 р.