UKRAINISCHE ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN IN LEMBERG.
(ČARNECKI-GASSE № 26).

SITZUNGSBERICHTE

DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-ÄRZTLICHEN SEKTION.

HEFT I.

(OKTOBER 1917 — MAI 1924).

REDIGIERT

VOM VORSTAND DER MATH.-NATURWISS.-ÄRZTLICHEN SEKTION.

LEMBERG, 1924.
VERLAG UND BUCHDRUCKEREI DER ŠEVČENKO-GESELLSCHAFT
DER WISSENSCHAFTEN IN LEMBERG.

BERICHTE.

Zur Theorie der analytischen Funktionen mit zwei unabhängigen Variablen

(von N. SADOVS'KYJ).

Der Verfasser sucht in der Theorie der analytischen Funktionen mit zwei unabhängigen Variablen ein Analogon zu den Theoremen von Weierstraß und Mittag-Leffler für ganze bzw. meromorphe Funktionen einer Unabhängigen.

Als erstes Beispiel konstruiert er die analytische Funktion, die eine auf der Wasseroberfläche unter dem Einfluß eines vertikal schwingenden Punktes entstehende Wellenfläche darstellen soll. Eine beliebige Fläche $y - tg\,\alpha \,.\, x = 0$ schneidet die gesuchte Wellenfläche $z = f(x, y)$ längs einer Sinuslinie. Nach Morozoff hat dieselbe die Gleichung:

$$z = \sin x \,.\, \cos \alpha \qquad (x \geqq 0).$$

Stellt man aber diese Gleichung auf analytischen Wege auf Grund ihrer Eigenschaft, daß die Fläche die (xy)-Ebene nach Kreisen mit den Radien λk schneidet, auf und bildet das absolut konvergente Produkt:

$$\prod_{\lambda=1}^{\infty} P_\lambda(x, y) = \prod_{\lambda=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{\lambda^2 k^2}\right),$$

dann besitzt die Funktion:

$$\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2} \prod_{\lambda=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{\lambda^2 k^2}\right)}$$

auf der (xy)-Ebene keine Nullstellen, muss also $e^{H(xy)}$, eventuell const. gleich sein. Stellt man die Bedingung, dass die Variablen der beliebigen Funktion $H(xy)$ die Gleichung $x^2 + y^2 = R^2$ erfüllen, so bekommt man:

$$z = e^{H(R^2)} R \prod_{\lambda=1}^{\infty} \left(1 - \frac{R^2}{\lambda^2 k^2}\right).$$

Bringt man diese Funktion mit der bekannten Weierstraß'schen $\sin \pi x$-Entwickelung zusammen, indem man $\frac{R}{k} = x$, $\lambda = 1$ setzt, so bekommen wir:

$$z = \frac{A\pi}{k} R \prod_{\lambda=1}^{\infty} \left(1 - \frac{R^2}{\lambda^2 k^2}\right) \quad (A \text{ Amplitude, } 2k \text{ Periode}).$$

Zweitens verlangt der Verfasser, als Nullinien sollen statt Kreise Geraden von den zwei orthogonalen Scharen:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{A)} & y - ax - b\lambda = 0 \\ \text{B)} & ay + x - \lambda ab(a+1) = 0\end{array}\right\} \lambda = 1, 2, 3, \ldots$$

angenommen werden. Der Verfasser bildet eine Funktion:

$$z_1 = (y - ax) \prod_{\lambda=1}^{\infty} \left[1 - \frac{(y - ax)^2}{\lambda^2 b^2}\right]$$

mit den Nullstellen längs der Geradenschar A), so wie eine andere:

$$z_2 = (ay + x) \prod_{\lambda=1}^{\infty} \left[1 - \frac{(ay + x)^2}{\lambda^2 [ba(a+1)]^2}\right]$$

mit den Nullstellen auf der Geradenschar B). Die gesuchte Funktion ist dann:

$$z = e^{H(xy)} (y - ax)(ay + x) \prod_{\lambda=1}^{\infty} \left[1 - \frac{(y \quad ax)^2}{\lambda^2 b^2}\right]\left[1 - \frac{(ay+x)^2}{\lambda^2 [ab(a+1)]^2}\right].$$

Im Spezialfalle, wenn beide Geradenscharen das quadratische Netz mit der Seite a bilden, bekommt die gesuchte Funktion die Form:

$$z = A \frac{\pi^2}{a^2} xy \prod_{\lambda=1}^{\infty} \left[1 - \frac{x^2}{a^2 \lambda^2}\right]\left[1 - \frac{y^2}{a^2 \lambda^2}\right].$$

Wir sehen also, daß im Falle zweier Veränderlichen nicht einzelne Punkte, sondern ganze Linien als Örter für Nullstellen oder Pole auftreten. Der Verfasser schliesst also auf die Notwendigkeit einer Verallgemeinerung nicht nur des Weierstraßschen Theorems, sondern auch des von Mittag-Leffler, da z. B. $\log z$ vorgeschriebene Pole besitzt.

Über die Elisionsfunktion

(von N. SADOVS'KYJ).

Nimmt man eine allgemeine Differentialgleichung n-ter Ordnung:

$$y^{(n)} = y$$

und bildet eine Potenzreihe:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 +$$

so bekommt man durch eine n-fache Differentiation:

$$(n + \lambda)!\, a_{n+\lambda} = \lambda!\, a_n$$

und die allgemeinste Auflösung der gegebenen Differentialgleichung hat die Form:

$$y = \sum_{\lambda=1}^{n} C_\lambda M_{n,\lambda},$$

wobei alle C_λ beliebig, constant und $M_{n,\lambda}$ Ableitungen der sogenannten Elisionsfunktion n-ten Grades

$$M_{n,1} = 1 + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \dots$$

$(M_{n,\lambda} = M_{n,1}^{(\lambda-1)}$ höhere Elisionsfunktionen) sind.

Als Beispiel nimmt der Verfasser $n = 4$.

Ist n durch $p < n$ teilbar, so lassen sich die Konstanten C_λ so bestimmen, dass $M_{n,1}$ aus den Funktionen $M_{p,1}$ zusammengesetzt werden kann; ist also n eine Primzahl, so bekommt man neue Funktionen, die aus Auflösungen von Differentialgleichungen höherer als erster Ordnung sich nicht zusammenstellen lassen.

Als Umkehrungen von Elisionsfunktionen ergeben sich im allgemeinen Funktionen, deren Differentialgleichungen sehr kompliziert sind.

(Erschienen im Bd. XVIII–XIX der Sammelschrift der Sektion S. 133–142).

Bestimmung der Gruppe des vollständigen Potenzrestsystems der Zahl $a^n = \alpha_n$ (mod $z = \prod_1^r z_i$) für den der Periode des verkürzten Restsystems kongruenten Grad

(von T. CJUROPAJLOVYČ).

Ist $z = \Pi z_i$ (z_i lauter gegeneinander relativ prime Faktoren), so ist die Periode der verkürzten Restgruppe das kleinste gemeinschaftliche Vielfache $\Phi(z)$ aller $\varphi(z_i)$ (bekannte zahlentheoretische Funktion). Dann ist:

$$a^{\Phi(z)} \equiv R\,\Pi\, r_i^{[\Phi(\xi_i) - \alpha_i]}\, p_i^{\alpha_i}\ ;$$

a ist irgend eine ganze Zahl, $R\Pi$ Rest des Produktes, r_i Rest desjenigen Teilers $d = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, welcher mit a dieselben Primzahlen zu gemeinsamen Faktoren hat, jede aber zu der in z vorkommenden höchsten Potenz α_i erhoben. $\xi_i = \frac{z}{d}$. Gibt es r verschiedene Primzahlen in z, so ist die Klasse der Gruppe 2^r und das Produkt der Elemente der Gruppe bildet wiederum ein Element der Gruppe, welches immer die merkwürdige Eigenschaft hat, zum Exponenten 1 eigentümlich zu gehören.

(Erschienen im Bd. XVIII–XIX der Sammelschrift der Sektion S. 107–113).

Die Verallgemeinerung eines Theorems von Eisenstein

(von T. CJUROPAJLOVYČ).

Beweis des Eisensteinschen Satzes, daß eine ganze, ganzzahlige Funktion $f(x) = o$ vom Grade $n > 1$, der Einheit als dem Koeffizienten der höchsten Potenz der Variablen, allen anderen durch eine ganze

Zahl $c \gtrless 1$, g^n teilbaren Koeffizienten, dem ebenso durch c, nicht aber durch das Produkt von c in eine in demselben enthaltene Primzahl teilbaren freien Gliede, irreduzibel ist (besteht im Widerspruche der Gleichheit zweier ganzen Zahlen, wovon die eine durch Zahl p teilbar, die andere nicht teilbar ist).

(Erschienen ebendaselbst S. 114—116).

Beiträge zur Versicherungsmathematik
(von B. STASJUK).

Es wird gezeigt, dass eine Verbindungsrente für n Personen durch eine Rente für eine Person ersetzt werden kann. Zwischen den Altern und den Zinsfüssen bestehen dann die Gleichungen:

$$q^w = q^{x_1} + q^{x_2} + \ldots + q^{x_n} \quad \text{und} \quad v' = s^{n-1}\, v\,;$$

x Alter, s, q, g konstante, für Sterblichkeitstafeln charakteristische Grössen, $v = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{-1}$ Als einen Spezialfall erhält man den de-Morgan'schen Satz für die nach der Gompertz'schen Formel ausgeglichenen Tafeln.

Eine andere Formel:

$$\overset{(v)}{a_x} = \frac{1}{ln\,\frac{1}{sv}} \left\{ 1 + ln\,g \,.\, ln\,q \,.\, g^x a_x^{(vg)} \right\}$$

ermöglicht die Zurückführung der Renten mit den Zinsfüssen

$$p \geqq (q-1)\; 100\%$$

auf die Renten mit den Zinsfüssen, die zwischen Grenzen:

$$o \leqq p < (q-1)\; 100$$

liegen (q die Konstante der Gompertz-Makeham-schen Formel).

(Erschienen im Bd. XVIII—XIX der Sammelschrift der Sektion S. 93—101).

Wie kann man die Menge der rationalen Dezimalzahlen anordnen?
(von N. ČAJKOVS'KYJ).

Der Verfasser beweist den Satz, dass die Menge aller rationalen Dezimalzahlen (ganze Zahlen und echte Dezimalbrüche einbegriffen) abzählbar ist. Hiebei werden alle k-stelligen Zahlen in Gruppen zusammengefasst und jede derselben in $(k+1)$ Klassen derart eingeteilt, dass zur ersten Klasse (k, o) ganze, k-stellige Zahlen, zur zweiten $(k-1, 1)$ Zahlen mit $(k-1)$ ganzen und 1 Dezimalstelle, ... zur letzten (o, k) echte Dezimalbrüche gehören. Mit der Hilfe entsprechender Formeln kann man auch die Stelle, die ein gegebenes Element inmitten der ganzen Menge einnimmt, als Funktion des Ziffern des Elementes angeben.

(Erschienen im Bd. XVIII—XIX der Sammelschrift der Sektion S. 87—93).

LXXX. Sitzung am 21. Dezember 1918.

Vorsitzender Hr. LEVYC'KYJ.

1. Der Vorsitzende widmet einen Nachruf dem verstorbenen wirklichen Mitglied der Gesellschaft Prof. Roman ZALOZEC'KYJ.

2. Hr. LEVYC'KYJ legt seine zwei Abhandlungen: a) Einige Typen der zur Fuchs'schen Gruppe gehörigen Funktionen, b) Berechnung einiger trigonometrischen Integrale vor.

Es wurde beschlossen beide Abhandlungen in den Publikationen der Sektion zu veröffentlichen.

3. Hr. HIRNJAK berichtet über seine Arbeit vom Einfluss der Temperatur auf die Geschwindigkeit der chemischen Prozesse, die er später der Sektion vorlegen wird.

BERICHTE.

Einige Typen der zur Fuchs'schen Gruppe gehörigen Funktionen

(von Vl. LEVYC'KYJ).

1. Ist $F_\nu(z) = \dfrac{a_\nu z + b_\nu}{c_\nu z + d_\nu}$ (a_ν, b_ν, c_ν, d_ν irgend welche ganze Zahlen), und:

$$G_\lambda(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n\lambda} F_n(z) \quad \lambda = 0, 1, 2, \ldots,$$

so sind die Funktionen:

$$\Phi(z) = \prod_{\lambda=0}^{\infty} G_\lambda(z),$$

so wie auch:

$$\Psi(z) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left\{ \prod_{n=0}^{\infty} F_n(z)^{\alpha_{n\lambda}} \right\}$$

allgemeine Typen der zur Fuchs'schen Gruppe gehörigen Funktionen.

2. Die Weierstrass'sche $\wp(z)$-Funktion lässt sich auf Grund des Appell'schen Theorems, daß jede periodische Funktion sich in der Form:

$$h(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f[F_n(z)]$$

darstellen lässt, in die Form:

$$p(z) = A\left[\sum_{-\infty}^{+\infty} f[F_n(z)]\right] \quad (A \text{ eine algebraische Funktion})$$

überführen.

(Erschienen im Bd. XVIII—XIX der Sammelschrift der Sektion S. 103—105).

Berechnung einiger trigonometrischen Integrale (von Vl. LEVYC'KYJ).

Der Verfasser berechnet die Integrale von der Form:

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\varphi(x)^{2n} - a^{2n}},$$

($\varphi(x)$ eine goniometrische Funktion) auf Grund der Formel:

$$J = \sum_{\nu=1}^{2n} C_\nu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\varphi(x) - a_\nu},$$

wobei C_ν ein Quotient von zwei Determinanten, $a_\nu = ae^{\frac{\nu\pi}{n}}$ ist.

Z. B. ist:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^{2n} x - a^{2n}} = \sum_{\nu=1}^{2n} \frac{C_\nu}{\sqrt{1-a_\nu^2}} \log \frac{a_\nu - 1 - \sqrt{1-a_\nu^2}}{a_\nu - 1 + \sqrt{1-a_\nu^2}}.$$

Analog für $\varphi(x) = \cos x,\ tg\, x,\ cotg\, x,\ sec\, x.$

(Erschienen im Bd. XVIII—XIX der Sammelschrift der Sektion S. 143—148).

LXXXI. Sitzung am 18. Mai 1919.

Vorsitzender Hr. LEVYC'KYJ.

1. Hr. LEVYC'KYJ legt die Abhandlung des Hrn STASJUK u. T. Noch über die Begründung der Lobatschefskij'schen Geometrie vor.

2. Derselbe legt seine Abhandlung u. T. Zur Theorie der Integralgleichungen vor.

3. Hr. HIRNJAK legt seinen Bericht über wissenschaftliche Arbeiten des Hrn Vl. Bačyns'kyj vor.

Der Bericht ist im Bd. XVIII—XIX der Sammelschrift der Sektion (wissenschaftliche Chronik S. 85—88) erschienen.

4. Hr. KUČER legt seine Arbeit u. T. Relativitätstheorie (I. Teil, spezielle Relativitätstheorie) vor.

Der Bericht behandelt die Lorentz-Einsteinsche Transformationsformeln und das Minkowski-sche Weltbild, sowie auch eine umfangreiche Darstellung der speziellen Relativitätstheorie mit einigen kritischen Bemerkungen des Verfassers. Erschienen im Bd. XXI. der Sammelschrift der Sektion S. 1—64.

5. Hr. RUDNYC'KYJ berichtet über den II Theil seiner Abhandlung über Probleme der Geographie der Ukraina.

6. Hr. Dr. Vladimir KUČER wurde zum wirklichen Mitglied der Gesellschaft gewählt. Gleichzeitig wurden ihm die Obliegenheiten des zweiten Sekretars der Sektion zugewiesen.

BERICHTE.

Noch über die Begründung der Lobatschefskij'schen Geometrie

(von B. STASJUK).

Der Verfasser zeigt, daß die Projektion der Geometrie in der Lobatschefskij'schen Ebene auf eine Grenzkugel mit Hilfe der Axen der letzteren die projektive Maßbestimmung ist. Auf solche Weise wurde die Lobatschefskij'sche Geometrie in der Ebene mit der euklidischen auf der Grenzfläche verbunden und man kann mit Hilfe dieses Wurtes zu jeder Figur in der Lobatschefskij'schen Ebene die entsprechende auf der Grenzfläche d. i. in der euklidischen Geometrie finden. Daraus folgt, dass in der Lobatschefskij'sche Geometrie keine Widersprüche möglich sind, weil dann auch auf der Grenzkugel (d. h. in der euklidischen Geometrie) Widersprüche vorkommen müssten, was unmöglich ist.

(Erschienen im Bd. XVIII—XIX der Sammelschrift der Sektion S. 297—308).

Zur Theorie der Integralgleichungen

(von Vl. LEVYC'KYJ).

Eine Integralgleichung von der Form:

$$\varphi(x) + \lambda \int_a^b K(x)\, \varphi(s)\, ds = \mu\, K(x),$$

wo der Kern $K(x)$ eine stetige, eindeutige Funktion im Intervalle $(a...b)$ im reellen Gebiete der Veränderlichen darstellt, hat als Lösung den Kern selbst, mit einer Konstanten multipliziert.

Dann ist auch der Kern $\mathfrak{K}(x)$ der resolvierenden Gleichung:

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda \int_a^b \mathfrak{K}(x) f(s)\, ds$$

dem Kern — mit einer Konstanten multipliziert — gleich. Als Beispiel wurde $K(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ behandelt; die Richtigkeit der Lösung ist auch aus der Schwarz'schen Ableitung der obigen Integralgleichung ersichtlich.

(Erschienen im Bd. XVIII–XIX der Sammelschrift der Sektion S. 309–313).

LXXXII. Sitzung am 30. August 1919.

Vorsitzender Hr. LEVYC'KYJ.

1. Die Sektion nimmt den Plan der Eröffnung der ukrainischen privaten Universitätskurse im allgemeinen und das Verzeichnis der Dozenten und der Lehrkurse für mathematische und naturwissenschaftliche Disziplinen im speziellen zur Kenntniss an.*)

2. Es wurde das Erscheinen des Doppelbandes XVIII. und XIX. der Sammelschrift der Sektion zur Kenntniss genommen.

3. Hr. RUDNYC'KYJ gibt zur Genehmigung der Sektion, dass seine grosse Karte der Ukraina bei Freytag und Berndt auf Kosten der Gesellschaft erschienen ist. Auflage 5000 Exemplare.

LXXXIII. Sitzung am 5. März 1920.

Vorsitzender Hr. LEVYC'KYJ.

1. Der Vorsitzende widmet einen warmen Nachruf dem grossen Gelehrten, ersten Vorsitzenden der Sektion und Stifter der naturhistorischen Abteilung des Museums der Gesellschaft weil. Professor Johann VERCHRATS'KYJ.

2. Für das nächste Jahr wurden zum Vorstand der Sektion gewählt:

zum Direktor Hr. S. RUDNYC'KYJ,

zum Stellvertreter des Direktors Hr. Vl. LEVYC'KYJ,

zum Sekretar Hr. Vl. KUČER,

zum Delegierten in den Ausschuss der Gesellschaft Hr. J. HIRNJAK.

Die Redaktion der Sammelschrift der Sektion bilden die Herren LEVYC'KYJ, RAKOVS'KYJ, RUDNYC'KYJ.

3. Hr. RAKOVS'KYJ legt die Monographie des Hrn N. MELNYK u. T. Ukrainische Nomenklatur der höheren Pflanzen vor.

---

*) Da die Eröffnung dieser Kurse seitens der Behörden verboten wurde, hat sich später die Gesellschaft mit der weiteren Aktion mit Rücksicht auf statutäre Grunde nicht mehr befasst.

4. Hr. PANČYŠYN legt seine Arbeit: Über den Bau und die Verteilung der Pyramiden in der menschlichen Niere vor.

Es wurde beschlossen alle obigen Abhandlungen in den Publikationen der Sektion zu veröffentlichen.

5. Es wurde beschlossen eine physiographische Kommission zu bilden. Zum Vorsitzenden derselben wurde Hr. med. et phil. Dr. Michael KOCIUBA gewählt.

BERICHTE.

Zur Theorie der Evolventen

(von Vl. LEVYC'KYJ).

In dieser Abhandlung befaßt sich der Verfasser mit der Lösung der Differentialgleichung einer Evolvente in zwei Fällen.

1. Ist die Evolute eine Gerade, dann bilden die Evolventen entweder eine Schar der parallelen Geraden oder eine Kreiseschar. Die zur xx-Achse gehörigen Evolventen bilden eine Schar der imaginären Kreise.

2. Ist die Evolute eine Hyperbel von der Form $xy = c$, dann bekommen wir zwei Evolventenscharen; eine bildet eine Kreiseschar, die zweite ist durch die Differentialgleichung:

$$x + yy' = 2a\sqrt{y'} + b$$

($a = \pm\sqrt{c}$, b const.) charakterisiert. Die letzte Gleichung ist vom Lagrange-typus und lässt sich in die Euler'sche Formel:

$$x = Ce^{-\int I(p)\,dp} - e^{-\int I(p)\,dp}\int Z(p)\,e^{\int I(p)\,dp}\,dp$$

$$p = y',\quad I(p) = \frac{1}{p(p^2+1)},\quad Z(p) = -\frac{b + ap^{\frac{1}{2}}}{p(p^2+1)}$$

überführen. Da — wie Verfasser zeigt — das Integral $\int Z(p)\,e^{\int I(p)\,dp}\,dp$ nach einer entsprechenden Transformation in die Form:

$$-\frac{b\,c_1\,p}{\sqrt{1+p^2}} - b\,c_1\,c_2 + \frac{ac_1}{\sqrt{2}}\int\frac{ds}{s\sqrt{4s^3-4s}} \quad (c_1\ c_2 \text{ const. } s = \wp(u) \text{ von Weierstrass})$$

übergeht, so bekommt man für die zweite Evolventenschar einer Hyperbel eine Schar von transzendenten Kurven, die der Gleichung:

$$G(x\,y\,b\,c_1\,C_1) = 0 \quad (c_1\ C_1 \text{ const.})$$

Genüge leisten.

3. Lehrsatz. Jede zur beliebigen Evolute gehörige Evolventenschar besteht im allgemeinen aus zwei Scharen, u. zw. einer speziellen

Kurvenschar, die für gegebene Evolute charakteristisch ist, und einer allgemeinen, für alle Evoluten derselben Kreiseschar.

(Erschienen im Bd. XXI der Sammelschrift der Sektion S. 65—76).

Die Schwungfedern und ihre Anlagen an den Flügeln

(von A. KOTOVYČ).

In diesem anathomisch-histologischen Studium werden die Entstehung, die Entwickelung und der Bau der Schwungfedern auf Grund der originellen Untersuchungen des Verfassers besprochen. Die Ansichten von Schrenk, Studer, Lvov u. a. über die Entwickelung der Hornbildungen der Spule werden unzweifelhaft bestättigt.

Über den Bau und die Verteilung der Pyramiden in der menschlichen Niere

(von M. PANČYŠYN).

In der menschlichen Niere trifft man ausnahmsweise einzelne Pyramiden, im Gegenteil fast immer zusammengesetzte Pyramiden. Die letzteren entstehen durch Zusammentrieb einiger oder mehreren einfachen Pyramiden an den Papillen. Mindestens zwei, höchstens einige zusammengesetzte Pyramiden bilden Pyramidenkomplexe. Diese Pyramidenkomplexe gruppieren sich nach folgenden Gesetzen. An der lateralen Nierengrenze schneidet sich in die Nierensubstanz die Rindensubstanz in Form einer ununterbrochenen Bertinischen Hauptsäule (Columna Bertini) und teilt die Pyramidenkomplexe in die ventralen und dorsalen. Die Rindensubstanzhauptsäule gelangt jedoch nicht bis zu den Nierenpolen, da an den Nierenpolen sich einzelne grösseren Pyramidenkomplexe finden. Auf diese Weise kann man in den Nieren 4 Gruppen der Pyramidenkomplexe unterscheiden:

1) die Gruppe der ventralen Pyramidenkomplexe;
2) die Gruppe der dorsalen Pyramidenkomplexe;
3) den oberen Polkomplex;
4) den unteren Polkomplex.

Die Gruppe der ventralen Pyramidenkomplexe besteht meistens aus 5, der dorsalen aus 4 Pyramidenkomplexen. Die ventrale Gruppe der Pyramidenkomplexe kann bis auf drei Pyramidenkomplexe, die dorsale bis auf 2 reduziert werden. Seltener vermehrt sich die Anzahl der ventralen Pyramidenkomplexe auf 6, der dorsalen auf 5. An den Nierenpolen findet man regelrecht je einen Pyramidenkomplex. Die Pyramidenkomplexe bestehen aus einer einfachen, oder zusammengesetzten Axenpyramide und rund um gruppieren sich rosettenartig andere einfache, oder zusammengesetzte Nierenpyramiden, Die ventralen und dorsalen Pyramidenkomplexe sind von einander durch horizontale Columnae Bertini geschieden. Sekundäre Columnae Bertini verlaufen an den Basen der Pyramidenkomplexe in verschiedenen Richtungen, meistens sagittal und paralell zur Hauptsäule, aber auch in transversaler und schiefer Richtung. Diese sekundären Bertinischen Säulen kommen bis zum Nierenbecken nicht an, sondern schneiden sich tief in die Basen und die Seitenflächen der Pyramidenkomplexe. In den tiefsten Einsenkungen liegen Blutgefässe.

LXXXVI. Sitzung am 3. Februar 1922.

Vorsitzender Hr. LEVYC'KYJ.

1. Der Vorsitzende gibt an die Grunde, warum die Tätigkeit der Sektion durch längere Zeit lahmgelegt wurde.

2. Derselbe gibt zur Kenntniss der Sektion, dass der Bd. XX der Sammelschrift der Sektion den II. Teil der Arbeit des Hrn RAKOVS'KYJ u. T. Über die Rassen der Slaven, Bd. XXI Arbeiten aus der Mathematik und Physik, Bd. XXII die Arbeit des Hrn MELNYK u. T. Ukrainische Nomenklatur der höheren Pflanzen enthalten werden.

3. Derselbe legt die Abhandlung des Hrn N. SADOVS'KYJ u. T. Dyade als affine Transformation vor.

4. Es wurde beschlossen, eine terminologische Kommission für Mathematik und Physik mit den Hrn CEHELS'KYJ, HRYCAK, KUČER, LEVYC'KYJ, SITNYC'KYJ zu bilden.

5. Es wurde beschlossen, Berichte über die neuesten Errungenschaften der Wissenschaften in Form von populären Broschüren in einer zwanglosen Reihenfolge zu publizieren.

BERICHT.

Dyade als affine Transformation

(von N. SADOVS'KYJ).

Auf Grund der Definition der Dyade als affiner Transformation ohne Parallelverschiebung führt der Verfasser die Grundoperationen, Spaltung der Dyade in drei Teile: Achsenstreckdyade, Medianstreckdyade und reine Drehdyade an, zeigt die Bedeutung der Dyade a) bei der Division der Vektore, b) bei der Untersuchung der Felder, c) in der Differentialrechnung, im speziellen bei der Taylor'schen Entwickelung.

Bei der Untersuchung der Felder führt der Verfasser den Einheitskreis an und zeichnet die längs des Umfanges angreifenden Vektore. Dadurch gewinnt man neue Methode zur Darstellung der Spannungsfelder (im Raume Einheitskugel). Zum Schluss gibt der Verfasser einen neuen rein vektoriellen Beweis für die Sätze von Gauss und Stockes.

Bei jedem Kapitel führt der Verfasser einige Aufgaben an, die zum Verständnisse der behandelten Probleme und als Wegweiser für weitere Forschungen dienen sollen.

Beitrag zur Anomalie der Arteria carotis communis et Art. carotis externa beim Menschen

(von M. PANČYŠYN).

Eine bisher weder beim Menschen noch bei den Tieren beschriebene Anomalie der Äste der Arteria carotis communis und zwar: die rechte Arteria carotis communis teilt sich auf der Höhe der oberen Grenze der Luftröhre in drei Arterienstämme, welche paralell in sagittaler Ebene cranialwärts verlaufen. Der vordere, oder ventrale Arterienstamm bildet den Truncus thyreo-linguo-maxillaris, der mittlere teilt sich in die übrigen Äste der normalen Arteria carotis externa, der dorsale Stamm bildet die Art. carotis interna. Bemerkenswert ist die Koincidenz dieser Anomalie mit der Arteria anonyma maxima. Die Entstehungsweise der bezeichneten Anomalie ist nicht aufgeklärt.

XCII. Sitzung am 16. Mai 1923.

Vorsitzender Hr. LEVYC'KYJ.

1. Die Sektion hat zu wirklichen Mitgliedern der Gesellschaft folgende Herren gewählt: Paul TUTKOVS'KYJ, Demetrius GRAVE, Vladimir KOŠONOGOFF, Stefan TIMOŠENKO, Alexander JANATA, alle in Kyjiv, und Dr. Nestor HAMORAK in Kamjanetz Podolśkyj.

2. Den Bericht über die Tätigkeit der physiologischen Kommission legt Hr. MELNYK vor. Die Sektion beschliesst Arbeiten der Kommission in zwanglosen Heften unter Redaktion des Hrn MELNYK zu publizieren.

XCIII. Sitzung am 4. Juli 1923.

Vorsitzender Hr. LEVYC'KYJ.

1. Hr. KUČER legt die Abhandlung des Hrn ČAJKOVS'KYJ u. T. Einige Verallgemeinerungen der Cissoide vor.

2. Derselbe legt seine Abhandlung u. T. Thermoelektrische Erscheinungen in Elektrolyten vor.

3. Hr. RAKOVS'KYJ legt seine Arbeit u. T. Aufgaben der ukrainischen Anthropologie vor.

Alle diese Arbeiten wurden für die Jubiläumspublikationen bestimmt.

BERICHTE.

Einige Verallgemeinerungen der Cissoide

(von N. ČAJKOVS'KYJ).

Der Verfasser betrachtet die sg. Cissoide zweier Kurven C und Γ in Bezug auf einen Pol und zwar in folgenden Spezialfällen:

1) C ist ein Kegelschnitt, im Speziellen eine Ellipse (resp. ein Kreis), Γ eine Gerade, im Speziellen eine Tangente an C; O liegt auf C. 2) C und Γ zwei Kreise, O liegt ausserhalb der beiden. Artet aber Γ in eine Gerade aus und rücken O und Γ derart auseinander, dass O und der Berührungspunkt von Γ Endpunkte desselben Durchmessers von C sind, so erweitert sich die anfangs geschlossene Kurve in eine endlose gewöhnliche Cissoide; demgemäß ist die Bezugstangente Γ der gewöhnlichen Cissoide als eine auch zur Kurve gehörige zu betrachten.

Thermoelektrische Erscheinungen in Elektrolyten

(von Vl. KUČER).

Wie bei Metallen, so entsteht auch bei Elektrolyten durch ihre Berührung eine Potentialdifferenz, deren richtige Messung überhaupt schwierig ist. Diese Spannungsunterschiede, die mit den Thermoströmen nichts gemeinsames haben, lassen sich in eine Spannungsreihe, die sg. Berührungsspannungsreihe, ordnen. Was die thermoelektrische Spannungsreihe anbelangt, so ist ihr Vorhanden bei den Metallen eine längst bekannte Tatsache, wobei die Stellung einzelner Glieder dieser Reihe im hohen Grade von ihrer chemischen Beschaffenheit und innerer Struktur abhängt, da schon eine geringfügige Aenderung der letzteren genügt, die Stellung des betreffendes Gliedes der obigen Spannungsreihe um ein bedeutendes zu verschieben. Es war deswegen leicht vorauszusehen, dass dieselbe Eigenschaft im noch höheren Masse bei den Elektrolyten sich zeigen müsse, um so mehr, als hier die thermoelektrischen Spannungsunterschiede an und für sich bedeutend kleiner sind und dabei die sogenannten Konzentrationsströme die Genauigkeit der Resultate beeinträchtigen.

Zuerst hat der Verfasser organische Säuren, und zwar: Isobuttersäure, Buttersäure, Propionsäure, Ameisensäure, Apfelsäure, Weinsäure, Malonsäure, Oxalsäure und zuletzt Salzsäure untersucht. Aus der Verschiedenheit der beobachteten und berechneten Werte ergab sich das gänzliche Abhandensein irgend welcher thermoelektrischen Spannungsreihe. Der Spannungsabfall wurde in Kurvenformen dargestellt, wobei ein von übrigen organischen Säuren abweichendes Verhalten der Oxalsäure konstatiert wurde.

Auch bei der zweiten untersuchten Elektrolytenreihe, u. zw. $Na_2\,CO_3$, $Na_2\,SO_4$, $K_2\,SO_4$, $K_2\,CO_3$, $NaO.CO.CH_3$, $Na\,Cl$, $K\,NO_3$, KBr, $KS\,(CN)$ wurde keine thermoelektrische Spannungsreihe gefunden.

Als die dritte Reihe wurden die Nitrate von Cu, Co, Sr, Pb und Ag untersucht. Bei diesen Versuchen hat der Verfasser nur 0·1 der Normallösung gebraucht, denn sonst bildeten sich bei mehr konzentrierten Lösungen während der Erkaltens Kristalle, die ganz andere unkontrollierbache Vorgänge verursachten.

Zuletzt wurden noch Chloride und zwar $(Fe\,Cl_3)_2$, $SrCl_2$, KCl und $Na\,Cl$ untersucht. Die Sr-Verbindungen haben eine grosse Verschiedenheit von den allen übrigen Chloriden, was Spannungsabfall betrifft, gezeigt.

Der Verfasser konnte also bei allen obigen Elektrolyten kein thermoelektrisches Spannungsgesetz nachweisen, jedenfalls decken sich die Begriffe „Berührungsreihe“ und „thermoelektrische Spannungsreihe“ nicht. Es schliesst aber nicht aus, dass bei der ungeheueren Mannigfaltigkeit von Elektrolyten doch eine derartige thermoelektrische Spannungsreihe bei anderen Verbindungen, als die untersuchten, existieren kann.

Aufgaben der ukrainischen Anthropologie

(von J. RAKOVS'KYJ).

Die ukrainische Anthropologie hat außer einer Lösung von allgemeinen Fragen auch spezielle Probleme zu untersuchen. Das ukrainische Volk lebt in den Grenzgebieten, wo verschiedenartige anthropologische Typen, u. zw. Nord-, Orient-, Alpen- und Adria-rassen zusammenstossen und sich gegenseitig beeinflüssen. Nur die ukrainische Anthropologie ist in der Lage zu untersuchen, wie und in welchem Maße diese mannigfaltigen anthropologischen Faktore die Bildung eines uralten Grundtypus, der in der Neolithperiode als Basis des anthropologischen Typus des ukrainischen Volkes diente, beeinflusst haben.

Hiezu gehört auch die Frage, zu welchem anthropologischen Typus das ukrainische Volk gehört und welcher Typus als urslavisch zu betrachten wäre.

XCIV Sitzung am 6. November 1923.

Vorsitzender Hr. LEVYC'KYJ.

1. Für die weitere Kadenz wurde zum Direktor der Sektion und Delegierten in den Ausschuss der Gesellschaft Hr. LEVYC'KYJ, zum Direktorstellvertreter Hr. RAKOVS'KYJ, zum Sekretar Hr. KUČER gewählt.

2. Hr. LEVYC'KYJ legt seine Note u. T. Krümmung der Evolvente vor.

Dieselbe erscheint in den Jubiläumspublikationen der Gesellschaft.

3. Hr. RAKOVS'KYJ legt die Abhandlung des Hrn L. BAČYNS'KYJ u. T. Ein Beitrag zur Kenntniss der Gift- und Dufour-Drüsen bei Apis mellifica vor.

Experimentelle Bestätigung der Giftigkeit der Exkretionen der Dufour'schen Drüsen. Die Arbeit wird in der Sammelschrift der Sektion erscheinen.

BERICHT.

Krümmung der Evolvente

(von Vl. LEVYC'KYJ).

In der Abhandlung „Zur Theorie der Evolventen“ (Sammelschrift der Sektion Bd. XXI) hat der Verfasser gezeigt, dass zu jeder Evolute zwei Evolventenscharen, eine spezielle, und eine zweite Kreiseschar, durch die Gleichung:

$$\frac{y'''}{y''} = \frac{3\,y'y''}{1+y'^2} \qquad 1)$$

charakterisiert, gehören.

Die Integration der Glg. 1) führt zur Formel:

$$\frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} = \varkappa.$$

Da nun $y' = tg\alpha$ (Richtungskoöffizient der Kurve),

$$y'' = (1+y'^2)\,\frac{d\alpha}{dx} \text{ ist,}$$

so ist: $\varkappa = \frac{d\alpha}{ds}$, also Krümmungsmass der Kurve.

Da nun aus der sogenannten euklidischen Transformationsgruppe (Lie) folgt, dass $\varkappa$ und alle Ableitungen desselben $\frac{d^n\varkappa}{ds^n}$ Invarianten sind, so muss also die Gleichung 1) im Problem, den der Verfasser in der oben zitierten Abhandlung behandelt hat, notwendig vorkommen

XCV. Sitzung am 29. Dezember 1923.

Vorsitzender Hr. LEVYC'KYJ.

1. Der Vorsitzende legt eine Abhandlung des Hrn N. SADOVS'KYJ u. T. Begrenzte Vektorfelder und zwei Abhandlungen des Hrn M. KRAVČUK u. T. a) Note sur la longueur de la circonférence en géometrie non-euclidienne, b) Démonstration du théorème fondamentale d' algèbre vor.

Es wurde beschlossen die Abhandlung des Hrn SADOVS'KYJ in den Jubiläumspublikationen der Gesellschaft, die Arbeiten des Hrn KRAVČUK in der Sammelschrift der Sektion zu publizieren.

2. Aus Anlass des Jubiläumsjahres der Gesellschaft wurden zu wirklichen Mitgliedern der Gesellschaft Hr. Dr. David HILBERT und Hr. Dr. Felix KLEIN in Göttingen, Hr. Dr. Max PLANCK in Berlin, Hr. Dr. Fritz PREGL in Graz und Hr. Vladimir VERNADS'KYJ in Paris gewählt.

3. Hr. MELNYK legt folgende Arbeiten vor, die nach dem Beschluss der physiographischen Kommission in der Sammelschrift derselben Heft I. erscheinen sollen: a) Hr. J. POLANS'KYJ: Geologisch-morphologische Beobachtungen in der Umgebung von Novosilka-Kostiukowa bei Zališčyki,

b) Hr. MELNYK: Dr. Franz-Herbich als Erforscher der Flora Ostgaliziens und Bukovina, c) Hr. ZAN'KO: Bericht über das Erscheinen einer Käferart (Chlaenius) in Bilohoršča (bei Lemberg), d) Hr. RAKOVS'KYJ: Anthropologische Eigentümlichkeiten der galizischen Volhynier, e) Hr. BAČYNS'KYJ: Die Schmetterlinge als Schädlinge unserer Obstgärten, f) Miscellanea, g) Berichte der physiographischen Kommission.

Den Bericht des Hrn MELNYK und den Plan der Sammelschrift der Kommission hat die Sektion zur Kenntniss genommen.

BERICHTE.

Begrenzte Vektorfelder

(von N. SADOVS'KYJ).

Der Verfasser befasst sich mit dem Problem: es ist das begrenzte Vektorfeld: $\mathfrak{y} = \varphi(r) j$ mit den Nebenbedingungen:

1) div $\mathfrak{y} = o$
2) $\mathfrak{y}$ = maxim. für $r = o$
3) $\mathfrak{y}$ = minim. für $r = a$
4) $r = (o \ldots a)$

zu untersuchen. Dies Problem löst der Verfasser in drei einfachen Fällen (Fluss und Wasserleitung) auf.

Note sur la longueur de la circonférence en géometrie non-euclidienne

(par M. KRAVČUK).

Dans cette note l' auteur démontre indépendamment de l' axiome des parallèles que la longueur de la circonférence est une limite des perimètres des polygones réguliers inscrits et circonscrits.

Démonstration du théorème fondamentale d' algèbre

(par M. KRAVČUK).

L' auteur démontre le connu théorème de l' existence d' une racine de l' équation algébrique à l' aide des lemmes suivantes:

I. Soit $|a_n| < q^n \ (o < q < 1)$,
la somme $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ a pour n assez grand une limite constante S:

$$\lim_{n=\infty} S_n = S.$$

II. La fonction $f(z)$ étant continue dans le point $z = S$ et $f(S_n)$ peu différent de nombre A et $|S - S_n|$ assez petit, $f(S)$ est égal à A:

$$f(S) = A.$$

III. Les moduls de coëfficients $a_1\ a_2 \ldots a_n$ d' un polynome:

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$$

étant plus petit qu' une nombre donnée a et $| a_0 |$ plus grand q' une nombre donnée α, on peut trouver pour chacun $\varkappa > o$ une telle nombre $L > o$, que pour $| z | \geqq L$ $| f(z) |$ serait $> \varkappa$.

IV. Les valeurs de polynomes $f(z)$ et $f'(z)$ étant dans un point x différents du zéro, on existe dans le voisinage du point x un tel point

$$y = x - \delta \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad (o < \delta < 1),$$

que:

$$| f(y) | < | f(x) |$$

A l' aide de ces lemmes l' auteur passe très facilement à la démonstration du théorème même.

Geologisch-morphologische Beobachtungen in der Umgebung von Novosilka-Kostiukova bei Zališčyki

(von J. POLANS'KYJ).

Der Zweck der Untersuchungen des Verfassers war, auf Grund eines Detailstudiums möglichst klaren Einblick in die Chronologie des Quartärs Südpodoliens, sowie in die zyklische Erklärung der Landschaftsformen zu gewinnen.

Das Detailstudium des genannten Rayons ergab in mehreren Fällen eine Richtigstellung und Ergänzung der bisherigen Kenntnisse über den geologischen Bau. Der Verfasser zeigt die Unrichtigkeit zweier Sätze von Teisseyre (Atlas geol. Galicji. Tekst do zeszytu ósmego. Kraków 1900) und zwar, dass auf der Karte von Mielnica:

a) keine Dnisterschotter oberhalb Isohipse 300 m vorkommen (l. c. 285),

b) in den Grenzen des verborgenen Sarmats Südpodoliens nie diluviale Flusschotter bestanden haben (ibid. 216).

Der Verfasser hat unzweifelhaft karpatische Diluvialschotter nicht nur längst der linken Dnisterzuflüsse (Seret, Hrumowyj; Höhe ca 250—260 m), sondern auch auf den kulminierenden Punkten der Seret-Hrumowyj Wasserscheide (△ 316) festgestellt. Man habe also hier zwei ausgeprägte dilluviale Schotterhorizonte. Die oberen Schotter oberhalb Isohipse 300 m liegen auf dem Sarmat und weisen nur den karpatischen Element aus; die unteren Schotter (Höhe 250 m) weisen wieder im karpatischen Element einen namhaften nordpodolischen Zusatz (Devon, Cenoman, Tertiär). Die oberen sind immer mit dem typischen eolischen Löss bedeckt, die unteren stellenweise, sonst ganz frei von ihm und bilden Schotterboden.

Morphologische Charakteristik des Rayons: Die zerschnittene Platte Südpodoliens weist zwei scharf ausgeprägte, vertikal aufeinandergelegte, zyklisch verschiedene Elemente.

Die trennende Linie beider landschaftlicher Elemente liegt im Horizonte der unteren Diluvialschotter; unterhalb derselben haben wir

Herbich's, die sich im Archiv der Ševčenko-Gesellschaft befinden, gaben dem Verfasser eine Anregung, den Forscher seiner Heimat dem ukrainischen Publikum bekannt zu machen. In seiner Abhandlung führt der Verfasser außer den Originalzeichnungen einiger Pflanzen auch ein Bild an, worin Herbich während des Feldzuges nach Neapel zu Pferde mit einem Pflanzenbündel auf dem Sattel dargestellt wird. Auch zwei Gedichte Herbich's finden ihren Platz in der Abhandlung; eins den Manen der Erforscher der Flora von Galizien und zwar dem Prof. Besser, dem Dr. Friedländer, Christiani und den Brüdern Kosinski, das andere dem Kreisarzte Leopold Zacherl in Kolomea als Dank für die vom ihm überschickten Pflanzen gewidmet.

XCVI. Sitzung am 6. Februar 1924.

Vorsitzender Hr. LEVYC'KYJ.

1. Die neuen wirklichen Mitglieder der Gesellschaft Hrn Grave, Planck, Klein u. Hilbert übergeben an die Adresse des Hrn Präsidenten der Gesellschaft ihren Dank für die Ernennung, so wie ihre besten Glückwünsche für die Gesellschaft.

2. Hr. LEVYC'KYJ legt die Abhandlung des Hrn GRAVE u. T. Elektromagnetische Kräfte im Sonnensystem vor.

Diese Abhandlung erscheint in den Jubiläumspublikationen der Gesellschaft.

BERICHT.

Elektromagnetische Kräfte im Sonnensystem

(von D. GRAVE).

Sonnenflecke sind nach dem Verfasser Krateröffnungen, die in den Raum eine elektromagnetische Substanz emanieren; dieselbe besteht teilweise aus zerstreuten, elektrisch geladenen materiellen Partikeln, teilweise aus reinen Elektronen. Mit Vermehrung der Flecke wird Emanation grösser. Emanation der Kathodenstrahlen erklärt nach dem Verfasser das Erscheinen des Nordlichtes. Daß ionisierter Stoff die Erde erreichen kann, erklärt der Verfasser damit, dass ein Teilchen, mit der Anfangsgeschwindigkeit 613 $\frac{km}{s}$ von der Sonne hinausgeschleudert, nicht mehr zurückkehren kann, und in den Protuberanzen beobachten wir grössere Geschwindigkeiten. Der Verfasser begann eben mit Hilfe seiner Schüler den Versuch, die Unregelmässigkeiten in der Bewegung des Enckeschen Kometen mit der periodischen Tätigkeit der Sonne in Abhängigkeit zu bringen.

XCVII. Sitzung am 30. März 1924.

Vorsitzender Hr. LEVYC'KYJ.

Hr. LEVYC'KYJ legt folgende Abhandlungen vor: