БАГАТОТОЧКОВА НЕЛОКАЛЬНА НЕОДНОРІДНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ЗІ ЗМІННИМИ ЗА t КОЕФІЦІЄНТАМИ

Володимир ІЛЬКІВ

Національний університет „Львівська політехніка“
вул. Степана Бандери 12, Львів 79013

Редакція отримала статтю 20 лютого 2004 р.

У декартовому добутку часового відрізка $[0,T]$ і просторового p-вимірного тора досліджено задачу з нелокальними багатоточковими умовами для лінійної системи диференціальних рівнянь n-го порядку із частинними похідними зі змінними за часом неперервними коефіцієнтами. Ця задача некоректна за Адамаром; питання існування її розв'язку пов'язане з проблемою малих знаменників. У роботі встановлені необхідні і достатні умови єдиності та достатні умови існування розв'язку задачі. При доведенні теореми існування розв'язку використовується метричний підхід.

Задачу розглядаємо в області $\mathcal{D}^p$, що є декартовим добутком відрізка $[0,T]$ і p-вимірного тора $\Omega_p = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, причому $p \geq 2$. Вважаємо, що змінна t належить до $(0,T)$, а змінна $x = (x_1,\ldots,x_p)$ — до Ω_p. Нелокальні умови за змінною t задаються у точках $t_1,\ldots,t_M$ $(M \geq 2)$ відрізка $[0,T]$, таких що $0 \leq t_1 < \ldots < t_M \leq T$.

Розглянемо задачу про знаходження розв'язку

$$u = u(t,x) \equiv \operatorname{col}\big(u_1(t,x),\ldots,u_m(t,x)\big)$$

неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними із залежними від змінної t коефіцієнтами вигляду

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n} = \sum_{j=1}^{n} A_j(t,D)\frac{\partial^{n-j} u}{\partial t^{n-j}} + f, \tag{1}$$

УДК 517.946+511.37

який задовольняє багатоточкову умову

$$\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{j=1}^{n} B_{j\alpha}(D)\frac{\partial^{n-j}u}{\partial t^{n-j}}\Big|_{t=t_\alpha} = \varphi, \tag{2}$$

що пов'язує значення шуканого розв'язку та його похідних за змінною t у точках $t_1,\ldots,t_M$.

Вектор-функція $f = f(t,x) \equiv \operatorname{col}\big(f_1(t,x),\ldots,f_m(t,x)\big)$ та вектор-функція $\varphi = \varphi(x) \equiv \operatorname{col}\big(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_{nm}(x)\big)$ є заданими і функція $f(t,x)$ є неперервною за змінною t на проміжку $[0,T]$.

Коефіцієнти $A_j(t,D)$, $j=1,\ldots,n$, системи (1) є матричними диференціальними операторами, які неперервно залежать від змінної t. Матричні диференціальні оператори $B_{j\alpha}(D)$, $j=1,\ldots,n, \alpha=1,\ldots,M$, мають розмір $nm\times m$, а оператори $A_j(t,D)$, $j=1,\ldots,n$, — розмір $m\times m$. Символ $D=(D_1,\ldots,D_p)\equiv(-i\partial/\partial x_1,\ldots,-i\partial/\partial x_p)$ позначає операцію диференціювання за змінною x.

Задача (1), (2) для випадку двоточкових умов ($t_1=0$, $t_M=t_2=T$) розглядалася у роботі [4]. Розв'язність цієї задачі встановлена у просторах $\mathbf{E}_{h,l}=\mathbf{E}_{h,l}(\Omega_p)$, $h,l\in\mathbb{R}$, періодичних функцій $\varphi(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\widehat{\varphi}(k)e^{ikx}$, які визначаються отримуються у результаті поповнення множини тригонометричних многочленів за нормою

$$\|\varphi\|_{h,l} = \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\widehat{\varphi}^*(k)\widehat{\varphi}(k)\exp(2h\widetilde{k}^l)}, \tag{3}$$

де $kx=k_1x_1+\cdots+k_px_p$, $k=(k_1,\ldots,k_p)$ – цілочисловий вектор, число $\widetilde{k}=\sqrt{1+k_1^2+\cdots+k_p^2}$, а символ „*“ позначає операцію ермітового спряження.

Для випадку сталих коефіцієнтів ($A_j(t,D)\equiv A_j(D)$, $j=1,\ldots,n$) розв'язність задачі (1), (2) встановлено у [5, 6] у шкалі просторів Соболєва $\mathbf{H}_q$, $q\in\mathbb{R}$, де простір $\mathbf{H}_q$ є поповненням множини тригонометричних многочленів за нормою $\|\varphi\|_q=\sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\widehat{\varphi}^*(k)\widehat{\varphi}(k)\widetilde{k}^{2q}}$.

Розв'язність задачі (1), (2) пов'язана із проблемою малих знаменників [7]. Для дослідження проблеми малих знаменників використовується метричний підхід [7, 8]. У рамках цього підходу розглядається не окрема задача (1), (2), а множина таких задач. Елементами цієї множини є задачі (1), (2) із фіксованими даними (коефіцієнтами диференціальних рівнянь, коефіцієнтами крайових умов чи іншими параметрами), які утворюють певну область у просторі даних. Існування та єдиність розв'язку у відповідній шкалі просторів встановлюється для майже всіх (за мірою Лебега) точок згадуваної області або для всіх точок підобласті, міра якої відрізняється від міри області на довільне наперед задане мале число.

Метричний підхід використовуємо і для вивчення розв'язності багатоточкової нелокальної задачі (1), (2) у шкалі просторів $\mathbf{E}_{h,l}$.

Розв'язком задачі (1), (2) вважаємо вектор-функцію $u = u(t,x)$, значення якої разом із похідними за змінною t до порядку $(n-1)$ для всіх $t \in [0,T]$ належать до шкали просторів $\mathbf{E}_{h,l}$ і яка задовольняє систему (1) та умови (2) у слабкому сенсі, тобто для всіх $t \in [0,T]$ та для всіх тригонометричних многочленів $w = w(x)$ виконуються рівності

$$\int\limits_{\Omega_p} \left(\frac{\partial^n u}{\partial t^n} - \sum_{j=1}^{n} A_j(t,D) \frac{\partial^{n-j} u}{\partial t^{n-j}} - f \right) w\,dx = 0,$$

$$\int\limits_{\Omega_p} \left(\sum_{\alpha=1}^{M} \sum_{j=1}^{n} B_{j\alpha}(D) \frac{\partial^{n-j} u}{\partial t^{n-j}}\Big|_{t=t_\alpha} - \varphi \right) w\,dx = 0.$$

Матричні чи скалярні диференціальні операції $F(D)$, що діють у просторах $\mathbf{E}_{h,l}$, визначено формулою $F(D)e^{ikx} = F(k)e^{ikx}$, яка справедлива для всіх цілочислових векторів k, зокрема, операція $\widetilde{D}$ визначена рівністю $\widetilde{D}e^{ikx} = \widetilde{k}e^{ikx}$. Звідси отримаємо такий вигляд для норми у формулі (3): $\|\varphi\|_{h,l} = \|\exp(h\widetilde{D}^l)\varphi\|_{0,0}$; аналогічна формула $\|\varphi\|_q = \|\widetilde{D}^q\varphi\|_0$ пов'язує між собою норми у просторах Соболєва.

Розглянемо задачу (1), (2) при фіксованих значеннях коефіцієнтів біля степенів змінної k матричних поліномів $B_\alpha(k) = \big(B_{n\alpha}(k), \ldots, B_{1\alpha}(k)\big)$, $\alpha = 1, \ldots, M$, із багатоточкових нелокальних умов (2).

Нехай $v = \operatorname{col}(u, \partial u/\partial t, \ldots, \partial^{n-1}u/\partial t^{n-1})$, а $Z_t(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є матрицею Ляпунова [1, 2] порядку nm, тобто неперервно диференційовною на відрізку $[0,T]$ матрицею, обернена матриця $Z_t^{-1}(k)$ до якої також є неперервною матрицею на цьому відрізку. Введемо нову невідому вектор-функцію $V = \operatorname{col}(V_1, \ldots, V_{nm})$ за допомогою заміни змінних

$$v(t,x) = Z^{-1}(D) Z_t(D) V(t,x), \tag{4}$$

де $Z(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, — матриця Ляпунова спеціального вигляду

$$Z(k) = \operatorname{diag}\big(\widetilde{k}^{d_1}, \ldots, \widetilde{k}^{d_{nm}}\big),$$

у якій $d_1, \dots, d_{nm}$ — такі дійсні числа, що $d_1 \cdot \ldots \cdot d_{nm} = 0$. У результаті підстановки (4) у формули (1), (2), для визначення функції $V(t,x)$ отримуємо таку задачу:

$$V' = \widetilde{A}(t,D)V + \widetilde{F}, \tag{5}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{M} B_\alpha(D)Z^{-1}(D)Z_{t_\alpha}(D)V(t_\alpha,x) = \varphi(x), \tag{6}$$

де матриці $\widetilde{A}(t,k) = Z_t^{-1}(k)Z(k)A(t,k)Z^{-1}(k)Z_t(k) - Z_t^{-1}(k)Z_t'(k)$ неперервно залежать від змінної $t \in [0,T]$, вектор-функція $\widetilde{F} = \widetilde{F}(t,x) = Z_t^{-1}(D)Z(D)F(t,x)$ також неперервна за змінною t, а функція $F(t,x) = \operatorname{col}\big(0,\dots,0,f(t,x)\big)$ є вектор-функцією розміру nm. Матриця $A(t,k)$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ є блочною матрицею $\big(A_{ij}(t,k)\big)_{i,j=1,\dots,n}$ із блоками $A_{i,i+1}(k) = I$ при $i = 1,\dots,n-1$, блоками $A_{n,i}(k) = A_{n-i+1}(k)$ при $i = 1,\dots,n$ та нульовими іншими блоками (тут I — одинична матриця порядку m).

Введемо позначення $S_{t,\tau}(k)$, $t,\tau \in [0,T]$, $k \in \mathbb{Z}^p$, для такого матричного розв'язку диференціального рівняння

$$\frac{dS_{t,\tau}(k)}{dt} = \widetilde{A}(t,k)S_{t,\tau}(k),$$

що $S_{\tau,\tau}(k) = Z_\tau^{-1}(k)$. Якщо $Y_t(t)$ — фундаментальна система розв'язків останнього рівняння, то $S_{t,\tau}(k) = Y_t(t)Y_\tau^{-1}(k)Z_\tau^{-1}(k)$.

Розв'язок системи (5) у просторі узагальнених періодичних (за змінною x) функцій шукаємо у вигляді

$$V(t,x) = S_{t,0}(D)C(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} S_{t,0}(k)\widehat{C}(t,k)e^{ikx},$$

де вектор-функції $\widehat{C}(t,k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є коефіцієнтами Фур'є невідомої вектор-функції $C(t,x)$. Для визначення цієї функції отримаємо рівняння

$$S_{t,0}(D)\frac{\partial C(t,x)}{\partial t} = \widetilde{F}(t,x),$$

яке має загальний розв'язок $C(t,x) = C(x) + \int\limits_0^t S_{\vartheta,0}^{-1}(D)\widetilde{F}(\vartheta,x)\,d\vartheta$, де $C(x)$ — довільна узагальнена періодична функція.

Отже, загальний розв'язок системи (5) зображується формулою

$$V(t,x) = S_{t,0}(D)\left(C(x) + \int\limits_0^t S_{\vartheta,0}^{-1}(D)\widetilde{F}(\vartheta,x)\,d\vartheta\right),$$

з якої, на основі рівності $S_{t,0}(D)S^{-1}_{\vartheta,0}(D)\widetilde{F}(\vartheta,x) = S_{t,\vartheta}(D)Z(D)F(\vartheta,x)$, дістанемо

$$V(t,x) = S_{t,0}(D)C(x) + \int\limits_0^t S_{t,\vartheta}(D)Z(D)F(\vartheta,x)\,d\vartheta. \tag{7}$$

Із умови (6) випливає, що $\Delta_0(D)C(x) = \psi(x)$, де

$$\Delta_0(D) = \sum_{\alpha=1}^{M} B_\alpha(D)Z^{-1}(D)Z_{t_\alpha}(D)S_{t_\alpha,0}(D),$$

$$\psi(x) = \varphi(x) - \sum_{\alpha=1}^{M} B_\alpha(D)Z^{-1}(D)Z_{t_\alpha}(D)\int\limits_0^{t_\alpha} S_{t_\alpha,\vartheta}(D)Z(D)F(\vartheta,x)\,d\vartheta.$$

Теорема 1. *Задача* (5), (6) *має єдиний розв'язок* $V(t,x)$ *у просторі узагальнених періодичних функцій тоді і тільки тоді, коли існує обернений оператор* $\Delta_0^{-1}(D)$*. Якщо існує оператор* $\Delta_0^{-1}(D)$*, то розв'язок* $V(t,x)$ *має вигляд*

$$V(t,x) = S_{t,0}(D)\Delta_0^{-1}(D)\Bigg(\varphi(x)+$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{M} B_\alpha(D)Z^{-1}(D)Z_{t_\alpha}(D)\int\limits_{t_\alpha}^{t} S_{t_\alpha,\vartheta}(D)Z(D)F(\vartheta,x)\,d\vartheta\Bigg). \tag{8}$$

Доведення. Необхідність. Припустимо, що задача (5), (6) має єдиний розв'язок $\widetilde{V}(t,x)$ і оператор $\Delta_0^{-1}(D)$ не існує. Це означає, що існує нетривіальний розв'язок $\widetilde{C}(x)$ рівняння $\Delta_0(D)C(x) = 0$ і тоді функція $V_1(t,x) = \widetilde{V}(t,x) + S_{t,0}(D)\widetilde{C}(x)$ є розв'язком задачі (5), (6), який не співпадає із розв'язком $\widetilde{V}(t,x)$. Отримана суперечність доводить необхідність умови теореми.

Достатність. Нехай існує оператор $\Delta_0^{-1}(D)$, тоді функція $C(x) = \Delta_0^{-1}(D)\psi(x)$ буде єдиним розв'язком рівняння $\Delta_0(D)C(x) = \psi(x)$. На основі формули (7) будуємо єдиний розв'язок задачі (5), (6)

$$V(t,x) = S_{t,0}(D)\Delta_0^{-1}(D)\psi(x) + \int\limits_0^t S_{t,\vartheta}(D)Z(D)F(\vartheta,x)\,d\vartheta.$$

Використовуючи рівність $S_{t,\vartheta}(D)=S_{t,0}(D)Z_0(D)S_{0,\vartheta}(D)$, дістанемо

$$V(t,x)=S_{t,0}(D)\Delta_0^{-1}(D)\left(\psi(x)+\Delta_0(D)\int\limits_0^t Z_0(D)S_{0,\vartheta}(D)Z(D)F(\vartheta,x)\,d\vartheta\right),$$

із якої отримуємо формулу (8). Теорему доведено.

Коефіцієнти Фур'є $\widehat{v}(t,k),\widehat{V}(t,k),\widehat{\varphi}(k),\widehat{F}(t,k),k\in\mathbb{Z}^p$, вектор-функцій $v(t,x)$, $V(t,x)$, $\varphi(x)$, $F(t,x)$, відповідно, пов'язані рівністю

$$Z(k)\widehat{v}(t,k)=Z_t(k)\widehat{V}(t,k)=Z_t(k)S_{t,\tau}(k)\Delta_\tau^{-1}(k)\Big(\widehat{\varphi}(k)+$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{M}B_\alpha(k)Z^{-1}(k)Z_{t_\alpha}(k)\int\limits_{t_\alpha}^{t}S_{t_\alpha,\vartheta}(k)Z(k)\widehat{F}(\vartheta,k)\,d\vartheta\Big),\tag{9}$$

де $\tau=\tau_t(k)$ може дорівнювати не лише нулю, але й бути довільним числом із відрізка $[0,T]$, а матриця $\Delta_\tau(k)=\sum\limits_{\alpha=1}^{M}B_\alpha(k)Z^{-1}(k)Z_{t_\alpha}(k)S_{t_\alpha,\tau}(k)$. Це випливає із тотожності $S_{t,0}(k)\Delta_0^{-1}(k)=S_{t,\tau}(k)\Delta_\tau^{-1}(k)$.

Вважаємо, що $\|Z_t(k)\|\le 1$, оскільки для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ матриця $\widetilde{A}(t,k)$ інваріантна щодо операції множення матриці $Z_t(k)$ на сталу; тоді із формули (9) для $\tau=t_\beta$, $1\le\beta\le M$, отримуємо оцінку

$$\|Z(k)\widetilde{v}(t,k)\|^2\le C_1\|S_{t,t_\beta}(k)\|^2\Big(\|\Delta_{t_\beta}^{-1}(k)Z^{-1}(k)\|^2\|Z(k)\widetilde{\varphi}(k)\|^2+$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{M}\|\Delta_{t_\beta}^{-1}(k)B_\alpha(k)Z^{-1}(k)\|^2\int\limits_0^T\|S_{t_\beta,\vartheta}(k)\|^2\|Z(k)\widetilde{F}(\vartheta,k)\|^2d\vartheta\Big)\le$$
$$\le C_2\min_{1\le\beta\le M}\|S_{t,t_\beta}(k)\|^2\Omega(k)\Big(\|Z(k)\widetilde{\varphi}(k)\|^2+$$
$$+\int\limits_0^T\max_{1\le\beta\le M}\|S_{t_\beta,\vartheta}(k)\|^2\|Z(k)\widetilde{F}(\vartheta,k)\|^2d\vartheta\Big),\tag{10}$$

де $\Omega(k)=$

$$=\max_{1\le\beta\le M}\max\Big\{\|\Delta_{t_\beta}^{-1}(k)Z^{-1}(k)\|^2,\max_{1\le\alpha\le M}\|\Delta_{t_\beta}^{-1}(k)B_\alpha(k)Z^{-1}(k)\|^2\Big\}.\tag{11}$$

Виберемо матрицю $Z(k) = \operatorname{diag}\big(\widetilde{k}^{d_1}, \ldots, \widetilde{k}^{d_{nm}}\big)$ так, щоб числа $d_1, \ldots, d_{nm}$ мінімізували вираз $\max\limits_{1 \le i,j \le nm} \{n_{ij} + d_i - d_j\}$, де n_{ij} — максимальний (за змінною t) степінь елемента матриці $A(t,k)$, що стоїть на перетині i-го рядка та j-го стовпця [4]. Позначимо цей мінімум через n_L, тоді

$$\|Z(k)A(t,k)Z^{-1}(k)\| \le C_3 \widetilde{k}^{n_L}.$$

Матрицю Ляпунова $Z_t(k) = Z_t^{\min}(k)$ вибираємо із умови мінімізації функціоналу

$$l_k\big(Z_t(k)\big) = \max_{t \in [0,T]} \min_{1 \le \beta \le M} \|S_{t,t_\beta}(k)\|^2 + \max_{\vartheta \in [0,T]} \max_{1 \le \alpha \le M} \|S_{t_\alpha,\vartheta}(k)\|^2$$

при $\max\limits_{t \in [0,T]} \|Z_t(k)\|^2 \le 1$. Тоді для всіх точок $(t,\vartheta) \in [0,T] \times [0,T]$ справджуються нерівності

$$\begin{aligned} \min_{1 \le \beta \le M} \|S_{t,t_\beta}(k)\|^2 \le l_k\big(Z_t^{\min}(k)\big) \le l_k(I), \\ \max_{1 \le \alpha \le M} \|S_{t_\alpha,\vartheta}(k)\|^2 \le l_k\big(Z_t^{\min}(k)\big) \le l_k(I). \end{aligned} \tag{12}$$

При $Z_t(k) = I$ матриця $\widetilde{A}(t,k)$ стає такою: $\widetilde{A}(t,k) = Z(k)A(t,k)Z^{-1}(k)$, причому спектр матриці $\widetilde{A}^*(t,k) + \widetilde{A}(t,k)$ є деякою підмножиною відрізка $[-2C_3\widetilde{k}^{n_L}, 2C_3\widetilde{k}^{n_L}]$, тому, внаслідок нерівностей (7) та (8), із [4] маємо нерівність $\|S_{t,\tau}(k)\|^2 \le nme^{2|t-\tau|C_3\widetilde{k}^{n_L}}$. Із цієї нерівності отримуємо, що

$$\begin{aligned} l_k(I) \le nm\Big(\max_{t \in [0,T]} \min_{1 \le \beta \le M} e^{2|t-t_\beta|C_3\widetilde{k}^{n_L}} + \\ + \max_{\vartheta \in [0,T]} \max_{1 \le \alpha \le M} e^{2|t-t_\alpha|C_3\widetilde{k}^{n_L}} \Big) \le 2nme^{2\max(t_M, T-t_1)C_3\widetilde{k}^{n_L}}. \end{aligned}$$

Знайдемо тепер оцінку зверху для функції $\Omega(k)$. Використаємо для цього метричний підхід [4, 8] у просторі векторів, компонентами яких є коефіцієнти біля степенів змінної k елементів матриць $B_\alpha(k)$, $\alpha = 1, \ldots, M$. Функція $\Omega(k)$ при кожному фіксованому $k \in \mathbb{Z}^p$ є дробово-раціональною функцією цих коефіцієнтів, знаменник якої може дорівнювати нулеві для певних наборів коефіцієнтів. Такі набори вилучаємо із розгляду у складі деякої множини малої міри.

Вважаємо, що умови (2) є нормованими у такий спосіб, що кожен із коефіцієнтів елементів матриці $B(k) = \big(B_1(k), \ldots, B_M(k)\big)$ належить до одиничного круга K із центром у початку координат комплексної площини. Для кожного вектора $k \in \mathbb{Z}^p$ і кожного елемента $\sum\limits_s b_{ijs}k^s$ матриці $B(k) = \big(\sum\limits_s b_{ijs}k^s\big)_{i,j=1,\ldots,nm}$ виберемо коефіцієнт b_{ijs} із найбільшим модулем множника k^s при ньому. Із всіх таких коефіцієнтів утворимо вектор $b = (b_1, \ldots, b_r) \in K^r$.

Теорема 2. *Для довільного $\varepsilon > 0$, довільного $d > p/2$ існує така множина W (міра W не перевищує ε), що для всіх векторів $b \in K^r \setminus W$ виконується нерівність*

$$\Omega(k) \le C_4 \varepsilon^{-nm} \widetilde{k}^{2(\sigma+nmd)}, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{13}$$

де
$C_4 = \xi nm(nm)!M(M+1)C_5^{2nm}, C_5 = \big(\pi nmM \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{-2d}\big)^{-1/2}, \xi = \binom{nmM}{nm}.$

Доведення. За формулами Крамера елемент $\big(\Delta_{t_\beta}^{-1}(k)Z^{-1}(k)\big)_{ij}$ матриці $\Delta_{t_\beta}^{-1}(k)Z^{-1}(k)$ подамо у вигляді частки

$$\big(\Delta_{t_\beta}^{-1}(k)Z^{-1}(k)\big)_{ij} = (-1)^{i+j}\frac{\det \Delta_{t_\beta}^{ji}(k)}{\Delta_{t_\beta}(k)}\widetilde{k}^{-d_j}, \quad i,j = 1,\ldots,nm,$$

де матриця $\Delta_{t_\beta}^{ji}(k)$ утворена із матриці $\Delta_{t_\beta}(k)$ вилученням j-го рядка та i-го стовпця; аналогічно

$$\big(\Delta_{t_\beta}^{-1}(k)B_\alpha(k)Z^{-1}(k)\big)_{ij} = \frac{\det \Delta_{t_\beta}^{\alpha ij}(k)}{\Delta_{t_\beta}(k)}\widetilde{k}^{-d_j}, \quad i,j = 1,\ldots,nm,$$

де матриця $\Delta_{t_\beta}^{\alpha ij}(k)$ утворена заміною i-го стовпця j-м стовпцем матриці $B_\alpha(k)$.

Правильними є такі розклади:

$$\Delta_{t_\beta}(k) = B(k)R_\beta(k), \quad \Delta_{t_\beta}^{ji}(k) = B^j(k)R_\beta^i(k), \quad \Delta_{t_\beta}^{\alpha ij}(k) = B(k)R_\beta^{\alpha ij}(k),$$

де $R_\beta(k) = \mathrm{col}\big(Z^{-1}(k)Z_{t_1}(k)S_{t_1,t_\beta}(k), \ldots, Z^{-1}(k)Z_{t_M}(k)S_{t_M,t_\beta}(k)\big)$, матриця $B^j(k)$ утворена вилученням j-го рядка із матриці $B(k)$, матриця $R_\beta^i(k)$ — вилученням i-го стовпця із матриці $R_\beta(k)$, матриця $R_\beta^{\alpha ij}(k)$ — заміною i-го стовпця матриці $R_\beta(k)$ на $(nm(\alpha-1)+j)$-ий стовпець одиничної матриці порядку nmM.

Мінори порядку $(nm-1)$ матриці $R_\beta^i(k)$ володіють такими властивостями:

мінор дорівнює нулеві, якщо він містить рядок із номером $(nm(\beta-1)+i)$; мінор, який не містить цього рядка, співпадає із помноженим на $\pm\widetilde{k}^{d_i}$ мінором матриці $R_\beta(k)$ порядку nm, який містить цей рядок і всі інші рядки мінора матриці $R^i_\beta(k)$;

мінор порядку nm матриці $R^{\alpha ij}_\beta(k)$ дорівнює нулеві, якщо він містить рядок із номером $(nm(\beta-1)+i)$ або не містить рядка із номером $(nm(\alpha-1)+j)$ і збігається із помноженим на $\pm\widetilde{k}^{d_i}$ мінором матриці $R^i_\beta(k)$ із заміненим $(nm(\alpha-1)+j)$-им рядком на $(nm(\beta-1)+i)$-ий рядок.

На підставі цих властивостей і формули Біне–Коші запишемо такі рівності

$$\begin{aligned} \det\Delta_{t_\beta}(k) &= \alpha_1^\beta(k)\Big(\gamma_1^\beta(k)+\sum_{q=2}^{\xi}\tfrac{\gamma_q^\beta(k)\alpha_q^\beta(k)}{\alpha_1^\beta(k)}\Big),\\ \det\Delta^{ji}_{t_\beta}(k) &= \widetilde{k}^{d_i}\alpha_1^\beta(k)\Big(\gamma_1^{\beta ji}(k)+\sum_{q=2}^{\xi}\tfrac{\gamma_q^{\beta ji}(k)\alpha_q^\beta(k)}{\alpha_1^\beta(k)}\Big),\\ \det\Delta^{\alpha ij}_{t_\beta}(k) &= \widetilde{k}^{d_i}\alpha_1^\beta(k)\Big(\gamma_1^{\alpha\beta ij}(k)+\sum_{q=2}^{\xi}\tfrac{\gamma_q^{\alpha\beta ij}(k)\alpha_q^\beta(k)}{\alpha_1^\beta(k)}\Big), \end{aligned} \tag{14}$$

де $\alpha_1^\beta(k),\ldots,\alpha_\xi^\beta(k)$ – всеможливі мінори порядку nm матриці $R_\beta(k)$, упорядковані за правилом $|\alpha_1^\beta(k)|\ge\ldots\ge|\alpha_\xi^\beta(k)|$, а буква γ позначає (залежно від її індексів) відповідні мінори порядку nm та $(nm-1)$ матриць $B(k)$ та $B^j(k)$ або нулі. Виконується нерівність $|\alpha_1^\beta(k)|\ge\widetilde{k}^{-(d_1+\ldots+d_{nm})}$. На підставі (11) та (14) маємо, що

$$\Omega(k)\le\max_{\substack{1\le\beta\le M,\\1\le i,j\le nm}}\frac{\Big\{\widetilde{k}^{d_i-d_j}\max\Big\{\sum\limits_{q=1}^{\xi}|\gamma_q^{\beta ji}(k)|,\ \max\limits_{1\le\alpha\le M}\sum\limits_{q=1}^{\xi}|\gamma_q^{\alpha\beta ij}(k)|\Big\}\Big\}}{|\gamma_1^\beta(k)+\bar\gamma_1^\beta(k)|}, \tag{15}$$

де $\bar\gamma_1^\beta(k)=\sum_{q=2}^{\xi}\gamma_q^\beta(k)\alpha_q^\beta(k)/\alpha_1^\beta(k)$. Оскільки мінори $\gamma_q^\beta(k)$, $\gamma_q^{\beta ji}(k)$ та $\gamma_q^{\alpha\beta ij}(k)$ є многочленами за змінною k, то $\gamma_1^\beta(k)=\sum\limits_{\alpha}\varkappa_\alpha^\beta(k)k^{s(\alpha,\beta)}$, де $s(\alpha,\beta)$ — мультиіндекс, причому $\left|k^{s(1,\beta)}\right|\ge\left|k^{s(2,\beta)}\right|\ge\ldots\ge1$, а коефіцієнт $\varkappa_1^\beta(k)=\prod\limits_{l=1}^{nm}b_{\rho(l,\beta)}$ і кожен множник $b_{\rho(l,\beta)}$ є деяким елементом вектора b (індекси $s(\alpha,\beta)$ і $\rho(l,\beta)$ також залежать від k). Функція $\gamma_1^\beta(k)+\bar\gamma_1^\beta(k)$ є лінійною щодо кожного коефіцієнта матриці $B(k)$ (при фіксованих інших коефіцієнтах) і може бути записаною у вигляді добутку

$$\widetilde{k}^{s(1,\beta)}\Big(\prod_{l=1}^{nm}b_{\rho(l,\beta)}+\ldots\Big)=\widetilde{k}^{s(1,\beta)}\delta_\beta(k),$$

де у доданках, позначених трикрапкою, відсутній вираз $\prod_{l=1}^{nm} b_{\rho(l,\beta)}$. Множник $\delta_\beta(k)$ факторизується на лінійні функції: $\prod_{l=1}^{nm} \delta_{\beta,l}(k)$, де $\delta_{\beta,l}(k) = b_{\rho(l,\beta)} + \dots$, а трикрапка означає доданки, що не залежать від елементів $b_{\rho(j,\beta)}$ вектора b при $l \le j \le nm$.

Нехай $d > p/2$ і $W_{\beta l}(k) \subset K^r$ – множина тих векторів, b для яких виконується для фіксованого $k \in \mathbb{Z}^p$ нерівність

$$|\delta_{\beta,l}(k)| \le \sqrt{\varepsilon} C_5 \widetilde{k}^{-d}, \qquad \beta = 1, \dots, M, \ \ l = 1, \dots, nm, \tag{16}$$

а $W_{\beta l}(k, b)$ — множина тих чисел $b_{\rho(l,\beta)}$, для яких справджується нерівність (16) при інших фіксованих елементах вектора b. Тоді міра множини $W_{\beta l}(k, b)$ не перевищує числа $\varepsilon\pi C_5^2 \widetilde{k}^{-2d}$. Інтегруючи за всіма фіксованими елементами, одержуємо таку ж оцінку і для міри множини $W_{\beta l}(k)$: $\operatorname{mes} W_{\beta l}(k) \le \varepsilon\pi C_5^2 \widetilde{k}^{-2d}$. Звідси випливає, що на множині $K^r \setminus W_{\beta l}(k)$ правильною є протилежна до (16) нерівність $|\delta_{\beta,l}(k)| > \sqrt{\varepsilon} C_5 \widetilde{k}^{-d}$ і нерівності

$$|\delta_\beta(k)| > \varepsilon^{nm/2} C_5^{nm} \widetilde{k}^{-nmd}, \qquad 1 \le \beta \le M, \tag{17}$$

виконуються на множині $K^r \setminus W(k)$, де

$$W(k) = \bigcup_{\beta=1}^{M} \bigcup_{l=1}^{nm} W_{\beta l}(k), \quad \operatorname{mes} W(k) \le \varepsilon\pi nm M C_5^2 \widetilde{k}^{-2d}.$$

Покладаючи $W' = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^p} W(k)$, звідси отримуємо, що $\operatorname{mes} W' \le \varepsilon$, якщо $C_5 = \big(\pi nm M \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{-2d}\big)^{-1/2}$. Для отримання шуканої множини W об'єднаємо множину W' із множиною міри нуль тих векторів b, які мають нульові елементи.

Із нерівності (15) випливає нерівність (13), де число σ справджує нерівність

$$\max_{\substack{1 \le \beta \le M \\ 1 \le i,j \le nm}} \Big\{ \widetilde{k}^{d_i - d_j - s(1,\beta)} \max \Big\{ \sum_{q=1}^{\xi} |\gamma_q^{\beta j i}(k)|, \max_{1 \le \alpha \le M} \sum_{q=1}^{\xi} |\gamma_q^{\alpha\beta i j}(k)| \Big\} \Big\} \le$$

$$\le \xi nm (nm)! M (M+1) \widetilde{k}^{\sigma}.$$

Теорему доведено.

Із нерівностей (12) отримуємо існування таких дійсних чисел l_u та l_f, що вирази

$$\max_{k\in\mathbb{Z}^p}\min_{1\le\alpha\le M}\frac{\ln\|S_{t,t_\alpha}(k)\|}{\widetilde{k}^{l_u}},\quad \max_{k\in\mathbb{Z}^p}\max_{1\le\alpha\le M}\frac{\ln\|S_{t_\alpha,t}(k)\|}{\widetilde{k}^{l_f}}$$

є обмеженими при всіх значеннях $t\in[0,T]$, а, отже, існують обмежені функції $U(t)$ та $F(t)$, які справджують нерівності

$$\min_{1\le\alpha\le M}\|S_{t,t_\alpha}(k)\|^2\le e^{2U(t)\widetilde{k}^{l_u}},\quad \max_{1\le\alpha\le M}\|S_{t_\alpha,t}(k)\|^2\le e^{2F(t)\widetilde{k}^{l_f}}. \tag{18}$$

Теорема 3. *Нехай*

1) $\widetilde{D}^{l_\varphi+d_j}\varphi_j\in E_{0,0}$, $j=1,\dots,nm$,

2) $\widetilde{D}^{l_\varphi+d_{(n-1)m+j}}f_j\in E_{F(t),l_f}$, $j=1,\dots,m$, *де* $l_\varphi>\sigma+(nm-1)p/2$.

Тоді для довільного $\varepsilon>0$ *існує така множина* W *з мірою* $\operatorname{mes}W\le\varepsilon$, *що для всіх векторів* $b\in K^r\setminus W$ *існує єдиний розв'язок* $V(t,x)$ *задачі* (5), (6) (*задачі* (1), (2)), *який зображується формулою* (8). *До того ж* $\widetilde{D}^{d_j}V_j(t,\cdot)\in E_{-U(t),l_u}$ *і виконуються оцінки*

$$\sum_{j=1}^{nm}\|\widetilde{D}^{d_j}V_j(t,\cdot)\|^2_{-U(t),l_u}\le$$

$$\le\frac{C_4}{\varepsilon^{nm}}\left(\|\widetilde{D}^{l_\varphi+d_j}\varphi\|^2_{0,0}+\int\limits_0^T\|\widetilde{D}^{l_\varphi+d_{(n-1)m+j}}f(\tau,\cdot)\|^2_{F(\tau),l_f}d\tau\right). \tag{19}$$

Доведення. Виберемо множину векторів W таку, як у теоремі 2, тоді для кожного вектора $b\in K^r\setminus W$ виконуються умови теореми єдиності, тобто для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$ визначник $\Delta_0(k)\ne0$. Отже, розв'язок задачі (5), (6) – єдиний. Підставимо нерівності (18) у формулу (10) для отримання нерівності

$$e^{-2U(t)\widetilde{k}^{l_u}}\|Z(k)\widehat{v}(t,k)\|^2\le$$

$$\le\Omega(k)\left(\|Z(k)\widehat{\varphi}(k)\|^2+\int\limits_0^T e^{2F(\vartheta)\widetilde{k}^{l_f}}\|Z(k)\widehat{F}(\vartheta,k)\|^2d\vartheta\right).$$

Перехід до нерівності (19) здійснюємо за допомогою формули (13).

[1] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

[2] *Гащук П. М.* Лінійні динамічні системи і звичайні диференціальні рівняння. – Львів: Українські технології, 2002. – 608 с.

[3] *Гребенников Е. А., Рябов Ю. А.* Резонансы и малые знаменатели в небесной механике. – М.: Наука, 1978. – 128 с.

[4] *Ільків В. С.* Двоточкова нелокальна крайова задача для системи неоднорідних рівнянь із частинними похідними // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 4. – С. 87–94.

[5] *Ільків В. С.* Нелокальна крайова задача для нормальних анізотропних систем із частинними похідними і сталими коефіцієнтами // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-матем. – 1999. – Вип. 54. – С. 96–107.

[6] *Ільків В. С.* Нелокальна крайова задача для систем із частинними похідними в анізотропних просторах // Нелинейные граничные задачи. – 2001. – Вып. 11. – С. 57–64.

[7] *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

[8] *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

MULTIPOINT NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SYSTEM OF NONHOMOGENEOUS PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH TIME VARIABLE CONTINUOUS COEFFICIENTS

Volodymyr ILKIV

Lviv Polytechnic National University
12 S.Bandery Str., Lviv 79013, Ukraine

The problem with nonlocal boundary conditions for linear system of general partial n-order differential equations in time variable continuous coefficients in Cartesian product of a time interval and a spatial p-dimensional torus is considered. This problem is noncorrect in the Hadamard sense and connected with problem of small denominators. We establish necessary and sufficient uniquenes conditions and sufficient existence conditions of solution of the problem. The proof of the existence theorem of solution is based on metric approach.