Тома Цюропайлович
(Яворів).

Про одну теорему альґебри.

(Узагальнене теореми Айзенштайна).

(Thomas Cjuropajlowytsch: Die Verallgemeinerung eines Theorems von Eisenstein).

В р. 1850 доказав Айзенштайн (Crelle's Journ. Bd. 39, ст. 166) теорему, що цілочислова функція n-того степеня, яка має співчинник найвисшого ступіня змінної $= 1$, всї прочі співчинники подільні первим числом p, а вільний член неподільний на p^2, але подільний на p, є незведима. Від того часу сю теорему узагальнено, а кілька доказів сеї узагальненої теореми подає Бахман у своїй „Науцї про поділ кола" (Bachmann: Lehre von der Kreisteilung, 5 відчит, ст. 33 і сл.).

Тут подасть ся дуже простий доказ узагальненої теореми Айзенштайна враз із обмеженєм її важности, бо того нема у Бахмана.

Най

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = o \tag{1}$$

сповняє умови:

$$(a_i, p^m) = p^m, \ (a_n, p^{n+1}) = p^m, \tag{2}$$

де a, n числа цілі, а $(a, b) = c$ означає найбільший спільний подільник чисел a і b, то тоді (1) має, як відомо, або всї корінї цілі, або всї невимірні, бо для незведимого дроба $x = \frac{p}{q}$ слїдувало би із (1) $\frac{p^n}{q} = -(a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} q + a_3 p^{n-3} q^2 + \ldots) = c$, т. зн. незведимий дріб був би рівний цїлости. Єлїдує отже із (1), що $x = py$, бо инакше (1) дає при умові (2)

$$x^n = p^m s, \tag{3}$$

одно ціле число неподільне на p рівне другому подільному на p, якщо (1) мало би бути зведимим рівнанєм, т. зн. заключати хоч один чинник форми $x-g$, або інакше: мати хоч один цілий корінь.

Тоді однак можна в (3) заложити, що $m<n$. Бо, якщо $m=nc+d$, $d<n$, то (3) дає $y_1{}^n=p^{(c-1)n}s$, отже $y_1=py_2$ і т. д. аж до $y_c{}^n=p^d s$ так, що (1) тепер скорочене числом p^{nc}, а $d<n$ заняло місце m. Як щож тепер $f(x)=o$ було би зведиме, то було би

$$f(x)=(x-pu)(x^{n-1}+v_1x^{n-2}+v_2x^{n-3}+\ldots.+v_{n-2}x+v_{n-1})=$$
$$=x^n+(v_1-pv)x^{n-1}+(v_2-pvv_1)x^{n-2}+\ldots.+(v_{n-1}-pvv_{n-2})x_{n-2}-$$
$$pvv_{n-1}=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots.+a_{n-1}x-a_n=o. \qquad (4)$$

Але тут мають бути всї a_i подільні на p^m, мусить отже бути для кождого $i=1, 2, 3\ldots n-1$ принайменче

$$(v_i,p)=p. \qquad (5)$$

Бо, як би було $(v_i,p)=1$, то $v_i-pvv^{i-1}=a_i$ не було би навіть на p подільне, а тим більше на p^m. Отже для $m=1$, а $(a_n,p^2)=p$ доказана теорема Айзенштайна, бо (4) заключає в заложеню, що має цілий корінь, суперечність, є отже незведиме, т. зн. не має цілого, а тим самим ізза $a_0=1$ і вимірного коріня. Для $m>1$ є очивидно $(pv\,.\,v_{n-1},p^2)=p^2$, бо після (5) є $(v_{n-2},p)=p$, отже мусить бути в a_{n-1} також $(v_{n-1},p^2)=p^2$, і $(a_n,p^3)=p^3$; а се суперечне із заложенєм для $m=2<n$. Т. зн. теорема доказана також для $m=2<n$.

Але для $m=n=2$ видко хочби із $(x-3)(x-6)=x^2-9x+2.9=0$, що вона не важна. Важна вона зате для кождого m, такого, що $2<m<n$. Бо тодї ізза (6) в a_2 є $(v_2,p^2)=p^2$, в a_3 так само $(v_3,p^3)=p^3$ і т. д. до a_m, де $(v_m,p^m)=p^m$, отже і $(v_{n-1},p^m)=p^m$, $(pvv_{n-1},p^{m+1})=a_np^{m+1}=p^{m+1}$, а се противить ся заложеню (2) так, що дїйсно теорема доказана для кождого m при $2<m<n$.

Очивидно, що для $m=n$ рівнанє (1) не сповняє умов (2) по скороченю числом p^m, а як видко із попередного і із $x^3-7^3x^2+7^5x-7^3\,.\,3\,.\,5\,.\,41=(x-21)(x-35)\,.\,(x-287)=0$ є воно для $m=2$, 3 зведиме. Які тодї умови тої зведимости — се отверте питанє.

А що кожде число $g=p_i{}^m s$, де $(s_1p_i)=1$ є добутком ступінів первих чисел, то теорема важна для кождого g, що не є (одиницею або) n-тим ступінем. Вона звучить: „Цїлочислова функція n-того ступіня $f(x)=o$ є зведима, коли співчинник її найвисшого ступіня змінної є одиницею, всі прочі співчинники є подільні цїлим числом g, що не є n-тим ступінем, а вільний від змінної член також подільний на g, але неподільний на p_ig, де p_i число просте, заключене в g“.

INHALT.

Beweis des (verallgemeinesten) Eisensteinschen Satzes der Algebra, daß eine ganze, ganzzahlige Funktion $f(x) = o$ vom Grade $n > 1$, der Einheit als dem Koeffizienten der höchsten Potenz der Variablen, allen anderen durch eine ganze Zahl $c \neq 1$, g^n teilbaren Koeffizienten, dem ebenso durch c, nicht aber durch das Produkt von c in eine in demselben enthaltene Primzahl teilbaren · freien Gliede, irreduzibel ist (— besteht in dem Widerspruche der Gleichheit zweier ganzen Zahlen, wovon die eine durch die Zahl p teilbar, die andere nicht teilbar ist).