2.

Спроваджене ренти для вижчого проценту на ренту для низчого проценту.

(Zurückführung einer Rente mit höherem Zinsfuß auf diejenige mit niederem Zinsfuß).

Тут також приймаємо,* що табеля смертности вирівнана після взірця (1) Ґомперца-Мекегема, і провадимо доказ для тяглої ренти.

Тягла рента, як відомо, рівнаєть ся:

$$\bar{a}_x^{(v)} = \frac{1}{D_x}\int_0^\infty D_{x+t}\, dt, \qquad (7).$$

де

$$D_{x+t} = l_{x+t} \quad v^{x+t}$$

Вставлю в (7) вартість за l_x із (1):

$$\bar{a}_x^{(v)} = \frac{1}{k(sv)^x g^{q^x}}\int_0^\infty k\,(sv)^{x+t} \quad g^{q^{x+t}}\, dt$$

або

$$\bar{a}_x^{(v)} = \frac{1}{g^{q^x}}\int_0^\infty (sv)^t \quad g^{q^{x+t}} dt \qquad (8).$$

Зінтеґруймо тепер сей інтеґрал частинно, то одержимо:

$$a_x = \frac{1}{g^{q^x}}\left\{ \frac{(sv)^t\, g^{q^{x+t}}}{ln\,(sv)}\Bigg|_0^\infty \quad \frac{1}{ln\,(sv)}\int_0^\infty (sv)^t\, g^{q^{x+t}} q^{x+t} \quad lng\; lnq\; dt \right\}$$

або

$$\bar{a}_x^{(v)} = -\frac{1}{ln\,(sv)}\left\{1 + lng\; lnq \quad q^x . \frac{1}{g^{q^x}}\int_0^\infty (svq)^t\, g^{q^{x+t}} dt\right\}.$$

Після взірця (8)

$$a_x^{(vq)} = \frac{1}{g^{q^x}}\int_0^\infty (s\,vq)^t\, g^{q^{x+t}}\, dt$$

є рентою для процентового відчинника

$$v_1 = vq,$$

отже буде

$$a_x^{(v)} = -\frac{1}{ln\,(sv)}\left\{1 + lng\,.\,lnq\,.\,q^x\,.\,a_x^{(vq)}\right\}$$

або

$$\underline{a_x^{(v)} = \frac{1}{ln\frac{1}{sv}}\left\{ 1 + lng \, . \, lnq \, . \, q^x \, . \, a_x^{(vq)} \right\}.} \qquad (9).$$

На підставі сього взірця всї ренти для процентового відчинника $v \leqq \frac{1}{q}$, отже для процентової стопи $p \geqq (q-1).\ 100$, дадуть ся спровадити на ренти, для яких процентовий відчинник v лежить у межах

$$1 \geqq v > \frac{1}{q},$$

отже процент p у межах

$$o \leqq p < (q-1).\ 100.$$

При тім взорець (9) треба приміняти 1, 2, n разів, відповідно до того, чи v лежить у межах

$$\frac{1}{q} \geqq v > \frac{1}{q^2},$$

$$\frac{1}{q^2} \geqq v > \frac{1}{q^3},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

або

$$\frac{1}{q^n} \geqq v > \frac{1}{q^{n+1}}.$$

Примір: Обчислити тяглу ренту для віку 30 лїт для австрийської табелї смертности AH^m і для відсоткової стопи $p = 7.999\%$.

Для табелї AH^m постійні величини Ґомперца-Мекегема є:

$$q = 1{\cdot}07999$$
$$g = 0{\cdot}995683,$$
$$q = 0{\cdot}998118.$$

У нашім примірі

$$v = \frac{1}{1+0{\cdot}07999} = \frac{1}{1{\cdot}07999},$$

отже

$$v = \frac{1}{q}.$$

На підставі взірця (9) рента для процентового відчинника $v = \frac{1}{q}$ дасть ся виразити рентою для відчинника

$$v_1 = vq = \frac{1}{q} \cdot q = 1,$$

отже для процентової стопи

$$p = 0\%.$$

Взірець (9) для нашого приміру перейде у такий:

$$\bar{a}_{30}^{\left(\frac{1}{q}\right)} = \frac{1}{ln\left(\frac{q}{s}\right)}\left\{1 + lng \,.\, lnq \,.\, q^{30} \,.\, \bar{a}_{30}^{(1)}\right\}.$$

Провірюймо тепер сей взірець:

$$\bar{a}_{30}^{(1)} = \frac{\Sigma D_{30}^{(1)}}{D_{30}^{(1)}} = \frac{\Sigma l_{30}}{l_{30}} = \frac{3,305.590}{95.867} = 34{\cdot}481.$$

Се рента для процентового відчинника $v = 1$, отже $p = 0\%$, платна річно з гори. Однак нам потрібно тяглої ренти, яку доволї докладно обчислюєть ся при помочи рівнаня

$$\bar{a}_x = a_x - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{12}(\delta + \mu_x), \qquad (10).$$

де

$$\delta = ln\,(1 + i),$$

а

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x} \cdot \frac{dl_x}{dx}.$$

У нашім випадку $p = 0$, отже

$$\delta = 0.$$

Дальше ми приймили, що табеля вирівнаня Ґомперца-Мекегема [взірець (1)], отже буде

$$\mu_x = -\,lns - lng\,.\,lnq\,.\,q^x,$$

отже тут буде:

$$\bar{a}_{30}^{(1)} = a_{30} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\,\mu_{30},$$

де

$$\mu_{30} = -\,ln\,s - ln\,g\,.\,ln\,q\,.\,q^{30}.$$

Для табелї AH^m є

$$\begin{aligned} ln\,s &= -\,0{\cdot}0018837, \\ ln\,g &= -\,0{\cdot}0043263, \\ ln\,q &= 0{\cdot}0769518; \end{aligned}$$

Як у попереднім примірі:

$$q^{30} = 10{\cdot}0598,$$

$$\begin{aligned} -\,ln\,s &= 0{\cdot}0018837, \\ -\,ln\,g\,.\,ln\,q\,.\,q^{30} &= \underline{0{\cdot}0033491} \\ \mu_{30} &= 0{\cdot}0052328, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{30}^{(1)} &= \underline{34.481} \\ -\left\{\begin{aligned} \tfrac{1}{2} &= 0{\cdot}500 \\ \tfrac{1}{12}\mu_{30} &= \underline{0{\cdot}000} \end{aligned}\right. & \\ \bar{a}_{30}^{(1)} &= 33{\cdot}981. \end{aligned}$$

Дальше одержимо:

$$ln\,g\,.\,ln\,q\,.\,q^{30}\,.\,\overline{a}_{30}^{(1)} = -\,0{\cdot}11381$$

$$1 + ln\,g\,.\,ln\,q\,.\,q^{30}\,.\,\overline{a}_{30}^{(1)} = \quad 0{\cdot}88619,$$

$$ln\left(\tfrac{q}{s}\right) = \quad 0{\cdot}0788355,$$

$$\underline{\overline{a}_{30}}^{\left(\frac{1}{q}\right)} = \frac{1}{ln\left(\frac{q}{s}\right)}\left\{1 + ln\,g\,.\,ln\,q\,.\,q^{30}\,.\,\overline{a}_{30}^{(1)}\right\} = \underline{11{\cdot}241.}$$

Се вартість ренти для $p = 7{\cdot}999 = (q-1)\,.\,100$, випроваджена на підставі ренти для $p = 0\%$.

Для контролї обчислїм тепер ту ренту впрост.

$$a_{30}^{\left(\frac{1}{q}\right)} = \frac{\Sigma D_{30}^{\left(\frac{1}{q}\right)}}{D_{30}^{\left(\frac{1}{q}\right)}} = \frac{102.419{\cdot}15}{8.776{\cdot}71} = 11{\cdot}741.$$

Відносну тяглу ренту дістанемо із взірця (16).

$$\begin{array}{r}
\mu_{30} = 0{\cdot}0052328 \\
\underline{\delta = ln\,q = 0{\cdot}0769518} \\
\delta + \mu_{30} = \underline{0{\cdot}0821846,}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
& a_{30}^{\left(\frac{1}{q}\right)} = \underline{11{\cdot}747} \\
- & \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{12}(\delta + \mu_{30}) = \quad 0{\cdot}007 \\ \quad \frac{1}{2} \quad\quad\quad = \quad \underline{0{\cdot}500} \end{array}\right.
\end{array}$$

$$\underline{\overline{a}_{30}}^{\left(\frac{1}{q}\right)} = a_{30}^{\left(\frac{1}{q}\right)} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{12}(\delta + \mu_{30}) = \underline{11{\cdot}240.}$$

Як у попереднїм примірі, оба вислїди ріжнять ся тільки о одну одиницю на останнїм десяточнім місці.

INHALT.

Für die nach Gompertz-Makeham ausgeglichenen Sterbetafeln werden hier zwei Sätze aus der Theorie der Renten abgeleitet.

Es wird gezeigt, dass eine Verbindungsrente für n Personen durch eine Rente für eine Person ersetzt werden kann. Zwischen den Altern und den Zinsfüssen bestehen die Gleichungen (3) und (4). Als einen Spezialfall dieses Satzes erhält man den der Morgan-schen Satz für die nach der Gompertz-schen Formel ausgeglichenen Tafeln.

Der zweite Satz-Formel (9) — ermöglicht die Zurückführung der Renten mit den Zünsfüssen

$$p \geqq (q-1) \,.\, 100\%$$

auf die Renten mit den Zinsfüssen, die zwischen folgenden Grenzen liegen:

$$o \leqq p < (q-1) \,.\, 100.$$

Dabei ist q die bekannte Konstante der Gompertz-Makeham-schen Formel.