Електромаґнетна теорія лучистого тисненя.

написав

Володимир Кучер.

Вступ.

Електромаґнетна теорія сьвітла, збудована Cl. Maxwell-ем, довела до дуже цікавих вислідів, а іменно, що поверхня кождого тіла, на яке паде сьвітляна филя, діэнае певного рода тисненя, яке називаємо нині лучистим тисненем. Се тиснене удалось вже навіть означити чисельно на одиницю поверхні і як досьвіди дальші оказали, рівнае ся воно лучистій енерґії, яка містить ся в одиниці обему в случаю зовсім чорної поверхні тіла т. з. що згадана поверхня тіла поглотила всю енерґію падучих лучів.

Першим, якому прийшло на думку тиснене сьвітла на поверхню ним осьвітлену, був Keppler (1619); однак пояснював він его, як взагалі всі сьвітляні явища в тодішних часах, еміснйною теорією. На основі сего тисненя старав ся Keppler вже пояснити хвости комет. Зі смертию Keppler-а однак пішла в забуте також его думка про лучисте тиснене, а підніс еї знов до значіня Euler (1746). Досьвідом викрити се тиснене старали ся насамперед De Mairan та Du Fay. Але обом не удалось отримати ясних вислїдів. Се саме можнаб віднести також до вислідів, отриманих досьвідною дорогою через Fresnel а (1825), Zöllner-а, Bartoli-ого та Crookes-а; проби послїдного довели до відкритя радіометричних явищ. Аж П. Лебедевови (1901) удалось виказати досьвідною дорогою єствоване лучистого тисненя; єму першому довелось отримати вислїди, які годились з теоретичними обчисленями. Опісля Nichols і Hull (1902) робили поміри лучистого тисненя і дїйшли до дуже точних дат, які лише

$$U = \frac{1}{2}\iiint \operatorname{div} \mathfrak{d} \,.\, \varphi \,.\, d\,v + \frac{1}{2}\iint \mathfrak{d}_n \,.\, \varphi \,.\, d\,S.$$

Знаємо однак, що:

$$\mathfrak{d} = \frac{k}{4\,\pi}\,\mathfrak{E},$$

де k є постійною діелектричною; для етеру $k = 1$, отже:

$$\mathfrak{d} = \frac{1}{4\,\pi}\,\mathfrak{E}.$$

З огляду на III. маємо:

$$\operatorname{div} \mathfrak{d} = 0. \qquad 1)$$

По узглядненю сего в послїднім вираженю на енерґію, отримаємо:

$$U = \frac{1}{2}\iint \mathfrak{d}_n \,.\, \varphi \,.\, d\,S,$$

що після теореми Gauss-а можна перетворити на:

$$\iint \mathfrak{d}_n \;\; \varphi \,.\, d\,s = \iiint \operatorname{div} \mathfrak{d} \,.\, \varphi\, d\,v - \iiint \left(\mathfrak{d}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathfrak{d}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathfrak{d}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) d\,v.$$

Перший член правої сторони з огляду на 1.) є зером, а остане лише другий. Отже електрична енерґія представить ся, як:

$$U = -\iiint \left(\mathfrak{d}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathfrak{d}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathfrak{d}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) d\,v.$$

А що:

$$\mathfrak{E}_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x},\quad \mathfrak{E}_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y},\quad \mathfrak{E}_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

тому по вставленю тих реляцій в послїдне рівнане на U, отримаємо:

$$U = \frac{1}{2}\iiint (\mathfrak{E}_x\,\mathfrak{d}_x + \mathfrak{E}_y\,\mathfrak{d}_y + \mathfrak{E}_z\,\mathfrak{d}_z)\, d\,v.$$

або:

$$U = \frac{1}{2}\iiint (\mathfrak{E}\,\mathfrak{d})\, d\,v.$$

В нашім случаю беремо під увагу плоску филю, яка розходить ся в напрямі оси z. Всї величини, які впливають на зміну величини филї, є тодї функціями лише двох змінних, а се: z і часу t. В тім случаю:

$$\mathfrak{E}_y = \mathfrak{E}_z = 0.$$

Електрична енерґія такої филї на одиницю обему буде:

$$U = \frac{1}{2}\,\mathfrak{E}_x\,\mathfrak{d}_z.$$

По узглядненю однак, що:

$$\mathfrak{d}_x = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}_x,$$

дістанемо:

$$U = \frac{1}{8\pi}\mathfrak{E}_x^2. \qquad 2)$$

З електродинаміки знов знаємо, що вектор на магнетну силу $\mathfrak{H}$ представляє ся все як curl векторового потенціялу пр. $\mathfrak{A}$, зі складовими: $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$, отже:

$$\mathfrak{H} = \operatorname{curl}\mathfrak{A}. \qquad 3)$$

Похідна вектору $\mathfrak{A}$ зі згляду на час t дає нам силу індукції. Коли зіставимо реляцию 3) в рівнанем II., тоді легко побачимо, що:

$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}.$$

По заступленю $\mathfrak{E}$ послїдним вираженем в реляції 2), дістанемо:

$$U = \frac{1}{8\pi c^2}\left(\frac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial t}\right)^2 \qquad 4)$$

Зовсім анальоґічно можна обчислити електрокінетичну енерґію T. Поступимо тут в той спосіб, що ролю вектора $\mathfrak{E}$ заступимо вектором $\mathfrak{H}$, а вираженє діелектричного пересуненя $4\pi\mathfrak{d}$ заступимо маґнетною індукцією $\mathfrak{B}$. З огляду на се одержимо:

$$T = \iiint(\mathfrak{H}\,.\,\mathfrak{B})\,d\,v.$$

А що для етеру $\mathfrak{H} = \mathfrak{B}$, тому напишемо:

$$T = \frac{1}{8\pi}\iiint\mathfrak{H}^2\,d\,v.$$

В нашім случаю филя має напрям оси z, отже:

$$\mathfrak{H}_x = 0,\ \mathfrak{H}_z = 0,$$

і остає, що:

$$T = \frac{1}{8\pi}\iiint\mathfrak{H}_y^2\,d\,v.$$

З розвиненя знов взору $\mathfrak{H} = \operatorname{curl}\mathfrak{A}$, дістанемо:

$$\mathfrak{H}_y = \frac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{A}_z}{\partial x}.$$

Але для плоскої филї в напрямі оси z також складові потенціялу векторового $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A}_y = 0,\ \mathfrak{A}_z = 0,\ \text{лише}\ \mathfrak{A}_x \neq 0,$$

тому:

$$\mathfrak{H}_y = \frac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial z}.$$

З огляду на се:

$$T = \frac{1}{8\pi} \iiint \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z}\right)^2 d\,v,$$

а на одиницю обему:

$$T = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z}\right)^2. \qquad 5)$$

Цїла отже енерґія филї в одиници обему виносить:

$$W = U + T = \frac{1}{8\pi}\left\{\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z}\right)^2\right\}.$$

Докажемо тепер, що обі енерґії електромаґнетної филї є собі рівні. В тій цїли розважимо ще деякі взори з електродинаміки.

Густота найзагальнїйшої електричної струї складає ся з проводженої струї, із струї дієлектричного пересуненя та з конвекційної струї, іменно:

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial t} + \varrho\,\mathfrak{v},\ ^{1)} \qquad 6)$$

де $\mathfrak{i}$ є проводженою струєю, $\frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial t}$ струєю дієлектричного пересуненя, а $\varrho\,\mathfrak{v}$ конвекційною струєю. Але в нашім случаю маємо до дїла тільки зі струєю дієлектричного пересуненя; перший і третий складник рівнаня 6) відпадають, остає лише:

$$\mathfrak{u} = \frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial t},$$

або:

$$\mathfrak{u} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}.$$

Коли знов $\mathfrak{E}$ виразимо через силу індукциї і підставимо в послїднім рівнаню, тодї дістанемо:

$$\mathfrak{u} = \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial t^2}. \qquad 7)$$

Дальше знаємо з електродинаміки, що вир маґнетного поля $\mathfrak{H}$ є пропорціональний до густоти струї $\mathfrak{u}$, а іменно:

$$\mathrm{curl}\ \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\,\mathfrak{u},\ ^{2)}$$

або:

$$\mathfrak{u} = \frac{c}{4\pi}\,\mathrm{curl}\ \mathfrak{H}.$$

Коли в тім рівнаню за $\mathfrak{H}$ підставимо 3), то отримаємо:

$$\mathfrak{u} = \frac{c}{4\pi}\,\mathrm{curl}^2\,\mathfrak{A},$$

[1]) M. Abraham. — A. Föppl: Theorie d. Elektr. B. I. 1907. §§ 54—55.

[2]) L. c. § 62.

або на основі взору з векторової анаĺізи про curl², маємо:

$$\mathfrak{u} = \frac{c}{4\pi}(\nabla \operatorname{div} \mathfrak{A} - \nabla^2 \mathfrak{A}).$$ [1]

А що:

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = 0,$$

тому остане ся лише:

$$\mathfrak{u} = -\frac{c}{4\pi}\nabla^2 \mathfrak{A}.$$

В послїднім взорі треба знов узглянити, що: $\mathfrak{A}_y = \mathfrak{A}_z = 0$, та що всї величини, які спричиняють якунебудь зміну филї, є функціями t і z; по узглядненю сего отримаємо:

$$\mathfrak{u} = -\frac{c}{4\pi}\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial z^2}. \tag{9}$$

Коли тепер зіставимо рівнаня 7. і 9. з собою, тодї отримаємо таке ріжничкове рівнане другого ряду:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial z^2}. \tag{10}$$

Інтеґралом сего рівнаня є функція такого типу:

$$\mathfrak{A}_x = f(z - c\,t).$$

По зріжничкованю її раз з огляду на t, а другий раз з огляду на z і по вставленю одержаних вартостий в 4) і 5), отримаємо такі взори на U і T:

$$U = \frac{1}{8\pi c^2}\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{8\pi} f'^2,$$

$$T = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{8\pi} f'^2,$$

отже:

$$U = T.$$

Вся енерґія даної плоскої филї складає ся в половині з електричної, а в половині з електрокінетичної енерґії. Приймім, що e представляє нам чисельну вартість обох енерґий, тодї ціла енерґія системи виносить:

$$W = 2\,e.$$

Вислїдом єствованя тих двох енерґий є тиснене в напрямі розходженя филї т. є. в напрямі оси z, якого величина рівнає ся сумі обох тих енерґий то є т. зв. густотї енерґії W. Вартість отже, лучистого тисненя виносить:

$$p = W = 2\,e. \tag{11}$$

---

[1] L. c. § 28.

Послїдний взір походить від Maxwell-а; его можна примінити лише до тїл зовсїм блискучих і то для случаю, коли лучі падуть нормально. Коли спроможність відбиваня е $r < 1$, тодї дістанемо на лучисте тисненe з огляду на 11) такий взір:

$$p = e(1 + r).$$

* * *

Загальна теорія лучистого тисненя.

Взір Maxwell-а нїчого не говорить нам про пондеромоторичні сили, які дїлають на границї двох осередків. Вислїди із взорів Maxwell-а остають тільки так довго важні, як довго дїланя пондеромоторичних сил складають ся із самого лучистого тисненя, а електромаґнетні натуги зовсїм на внутрішні елементи обему не дїлають. Hertz показав однак в своїй електродинаміцї, що взір сей не можна уважати як загальний случай. Тому будемо старати ся із електродинамічних рівнань Hertz-а для тїл в руху найти загальну форму для лучистого тисненя.

Возьмім під увагу осередок, який порушае ся зі скоростию $\mathfrak{v}$, тодї для него сила маґнетного поля $\mathfrak{H}$ буде визначена рівнанем:

$$\text{I}'.^{1)} \quad \operatorname{curl} \mathfrak{H} = \frac{1}{c}\left\{4\pi \mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \operatorname{curl}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{E}] + \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{E}\right\}.$$

Подібно друге рівнане для електричної сили $\mathfrak{E}$:

$$\text{II}'.^{2)} \quad \operatorname{curl} \mathfrak{E} = \frac{1}{c}\left\{\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} + \operatorname{curl}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{H}] + \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{H}\right\}.$$

В рівнаню II'. зникне третий член, бо як висше ми заложили $\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0$; те саме дїе ся з третим членом правої сторони рівнаня I'. з огляду, що $\mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{E}$ представляе індукцийну струю, яка е зером, бо вона в сїм случаю витворюе те саме маґнетне поле, що проводжена струя.

Помножім I'. і II'. через $\frac{c}{4\pi}$, а опісля перше через $\mathfrak{E}$, а друге через $\mathfrak{H}$ і зінтеґруймо їх над простором v та додаймо оба рівнаня, то отримаемо:

$$\frac{1}{4\pi}\iiint\left\{\mathfrak{E}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \mathfrak{H}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\right\}dv + \frac{1}{4\pi}\iiint\left\{\mathfrak{E}\operatorname{curl}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{E}] + \mathfrak{H}\operatorname{curl}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{H}]\right\}dv =$$
$$= \frac{c}{4\pi}\iiint\left\{\mathfrak{H}\operatorname{curl}\mathfrak{E} - \mathfrak{E}\operatorname{curl}\mathfrak{H}\right\}dv - \iiint(\mathfrak{E}\,\mathfrak{i})\,dv.$$

В послїднім рівнаню маемо чотири інтеґрали; назвім їх по черзї кождий е осібна через I_1, I_2, I_3, I_4, тодї послїдне рівнане буде мати форму:

[1] M. Abraham — A. Föppl: Theorie der Elektrizität, Bd. I. 1907. § 94. [2] Ibidem.

$$I_1 + I_2 = I_3 - I_4.$$

Розберім тепер з фізичної сторони значіне кождого інтеґралу з осібна. Перший з них:

$$\mathrm{I}_1 = \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iiint (\mathfrak{H}^2 + \mathfrak{E}^2)\, d\, v,$$

означає зміну електромаґнетної енерґії з часом t; інтеґрал знов I_2:

$$I_2 = \frac{1}{4\pi}\iiint\left\{\mathfrak{E}\operatorname{curl}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{E}] + \mathfrak{H}\operatorname{curl}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{H}]\right\} d\, v,$$

представляє працю, яка походить від тиснень, що ділають на елементи обему v. Третий інтеґрал можемо написати ще так:

$$I_3 = -\frac{c}{4\pi}\iiint\left\{\mathfrak{E}\operatorname{curl}\mathfrak{H} - \mathfrak{H}\operatorname{curl}\mathfrak{E}\right\} d\, v,$$

або:

$$I_3 = -\frac{c}{4\pi}\iint [\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}]\, d\, S,$$

де S означає поверхню, яка ограничає простір v. Послїдний взір є нїчим іншим, як відємним вектором Poynting-а; він означає приплив лучистої енерґії через поверхню $d\, S$. — Четвертий інтеґрал:

$$I_4 = -\iiint (\mathfrak{E}\,\mathrm{i})\, d\, v,$$

подає нам часть енерґії, яка перемінилась в тепло Joule-а.

Розвинім тепер інтеґрал I_2 виконуючи назначені дїланя під знаком інтеґрованя, то отримаємо:

$$I_2 = -\frac{1}{4\pi}\iiint\Big\{\Big[\frac{\partial\mathfrak{v}_x}{\partial x}(\mathfrak{E}_y{}^2 + \mathfrak{E}_z{}^2) + \frac{\partial\mathfrak{v}_y}{\partial y}(\mathfrak{E}_x{}^2 + \mathfrak{E}_z{}^2) + \frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial z_z}(\mathfrak{E}_x{}^2 + \mathfrak{E}_y{}^2)\Big] +$$

$$+\Big[\mathfrak{E}_x\,\mathfrak{E}_y\,.\,c + \mathfrak{E}_y\,\mathfrak{E}_z\,.\,a + \mathfrak{E}_z\,\mathfrak{E}_x\,.\,b\Big]\Big\}\, d\, v -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint\Big\{\Big[\frac{\partial\mathfrak{v}_x}{\partial x}(\mathfrak{H}_y{}^2 + \mathfrak{H}_z{}^2) + \frac{\partial\mathfrak{v}_y}{\partial y}(\mathfrak{H}_x{}^2 + \mathfrak{H}_z{}^2) + \frac{\partial\mathfrak{v}_z}{\partial z}(\mathfrak{H}_x{}^2 + \mathfrak{H}_y{}^2)\Big] +$$

$$+\Big[\mathfrak{H}_x\,\mathfrak{H}_y\,.\,c + \mathfrak{H}_y\,\mathfrak{H}_z\,.\,a + \mathfrak{H}_z\,\mathfrak{H}_x\,.\,b\Big]\Big\}\, d\, v,$$

де a, b, c мають слїдуюче значіне:

$$a = \frac{\partial\mathfrak{v}_y}{\partial z} + \frac{\partial\mathfrak{v}_z}{\partial y},\ b = \frac{\partial\mathfrak{v}_z}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{v}_x}{\partial z},\ c = \frac{\partial\mathfrak{v}_x}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{v}_y}{\partial x}.$$

Інтеґрал I_2, як вже висше ми згадали, представляє працю, котра походить від пондеромоторичних сил, пр. L. Для простїйшої форми вираженя на L впровадьмо ще слїдуючі знаки:

$$\mathfrak{X}_x = \frac{1}{8\pi}\left\{(-\mathfrak{H}_x{}^2 + \mathfrak{H}_y{}^2 + \mathfrak{H}_z{}^2) + (-\mathfrak{E}_x{}^2 + \mathfrak{E}_y{}^2 + \mathfrak{E}_z{}^2)\right\}.$$

$$\mathfrak{X}_y = \mathfrak{Y}_x = -\frac{1}{4\pi}(\mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_y + \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y)$$

$$\mathfrak{Y}^y = \frac{1}{8\pi}\left\{(\mathfrak{H}_x^2 - \mathfrak{H}_y^2 + \mathfrak{H}_z^2) + (\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2)\right\}$$

$$\mathfrak{Y}_z = \mathfrak{Z}_y = -\frac{1}{4\pi}(\mathfrak{H}_y \mathfrak{H}_z + \mathfrak{E}_y \mathfrak{E}_z)$$

$$\mathfrak{Z}_z = \frac{1}{8\pi}\left\{(\mathfrak{H}_x^2 + \mathfrak{H}_y^2 - \mathfrak{H}_z^2) + (\mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2)\right\}$$

$$\mathfrak{Z}_x = \mathfrak{X}_z = -\frac{1}{4\pi}(\mathfrak{H}_z \mathfrak{H}_x + \mathfrak{E}_z \mathfrak{E}_x).$$

Тоді отримаємо:

$$I_z = L = \iiint\left\{\mathfrak{X}_x \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x} + \mathfrak{Y}_y \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial y} + \mathfrak{Z}_z \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial z} + \mathfrak{X}_y . c + \mathfrak{Y}_z . a + \mathfrak{Z}_x . b\right\} d v.$$

Коли послідне рівнане зінтеґруємо щераз частково, то одержимо:

$$L = \iiint\left\{ \mathfrak{v}_x \left(-\frac{\partial \mathfrak{X}_x}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{Y}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Z}_x}{\partial z}\right) + \mathfrak{v}_y \left(-\frac{\partial \mathfrak{X}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{Y}_y}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Z}_y}{\partial z}\right) + \right.$$

$$\left. + \mathfrak{v}_z \left(-\frac{\partial \mathfrak{X}_z}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{Y}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Z}_z}{\partial z}\right)\right\} d v + \iint\left\{ \mathfrak{v}_x \left[-\mathfrak{X}_x \cos(x n) - \mathfrak{X}_y \cos(n y) \right.\right.$$

$$\left. - \mathfrak{X}_z \cos(n z)\right] + \mathfrak{v}_y \left[-\mathfrak{Y}_x \cos(n x) - \mathfrak{Y}_y \cos(n y) - \mathfrak{Y}_z \cos(n z)\right] +$$

$$\left. + \mathfrak{v}_z \left[-\mathfrak{Z}_x \cos(n x) - \mathfrak{Z}_y \cos(n y) - \mathfrak{Z}_z \cos(n z)\right]\right\} d S,$$

або в скороченій формі:

$$12)\ L = \iiint\left\{\mathfrak{T}_x . \mathfrak{v}_x + \mathfrak{T}_y \mathfrak{v}_y + \mathfrak{T}_z . \mathfrak{v}_z\right\} d v + \iiint\left\{\mathfrak{T}'_x \mathfrak{v}_x + \mathfrak{T}'_y \mathfrak{v}_y + \mathfrak{T}'_z \mathfrak{v}_z\right\} d S,$$

де $\mathfrak{T}_x$, $\mathfrak{T}_y$, $\mathfrak{T}_z$ та $\mathfrak{T}'_x$, $\mathfrak{T}'_y$, $\mathfrak{T}'_z$ означають:

$$\mathfrak{T}_x = -\left(\frac{\partial \mathfrak{X}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}_x}{\partial z}\right)$$

$$\mathfrak{T}_y = -\left(\frac{\partial \mathfrak{X}_y}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}_y}{\partial z}\right)$$

$$\mathfrak{T}_z = -\left(\frac{\partial \mathfrak{X}_z}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}_z}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}_z}{\partial z}\right),$$

$$\mathfrak{T}'_x = -(\mathfrak{X}_x \cos(n x) + \mathfrak{X}_y \cos(n y) + \mathfrak{X}_z \cos(n z))$$

$$\mathfrak{T}'_y = -(\mathfrak{Y}_x \cos(n x) + \mathfrak{Y}_y \cos(n y) + \mathfrak{Y}_z \cos(n z))$$

$$\mathfrak{T}'_z = -(\mathfrak{Z}_x \cos(n z) + \mathfrak{Z}_y \cos(n y) + \mathfrak{Z}_z \cos(n z)).$$

З рівнаня 12) бачимо, що пондеромоторичні сили складають ся з двох частий, а іменно з сил $\mathfrak{T}$, які ділають на елементи обєму $d v$, та з сил $\mathfrak{T}'$, що ділають на граничну поверхню $d S$.

Возьмім тепер під увагу спецыяльний случай, а іменно, що филя паде в площі (yz); тоді маємо:

$$\mathfrak{E}_y = \mathfrak{E}_z = 0, \text{ та } \mathfrak{H}_x = 0,$$

а всї похідні з огляду на y і z знвкають. Що стане ся тепер із силами першого рода $\mathfrak{T}$? В сїм спеціяльнім случаю:

$$\mathfrak{T}_x = -\frac{\partial \mathfrak{X}_x}{\partial x} = \frac{1}{8\pi}\left(\mathfrak{H}_y \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} + \mathfrak{H}_z \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}\right):$$

а що:

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} = 0,$$

так само:

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} = 0,$$

тому:

$$\mathfrak{T}_x = 0.$$

А дальше:

$$\mathfrak{X}_y = 0, \ \mathfrak{X}_z = 0,$$

з чого слїдує, що:

$$\mathfrak{T}_y = 0, \ \mathfrak{T}_z = 0.$$

Всї отже пондеромоторичні сили, що ділають на обєм v, знвкають, остають лише сили, які ділають на граничну поверхню S. На тій поверхні маємо $\cos(nz) = 1$, отже:

$$\mathfrak{T}'_x = 0, \ \mathfrak{T}'_y = \overline{\mathfrak{Y}}_z, \ \mathfrak{T}'_z = \overline{\mathfrak{Z}}_z, \tag{13}$$

де перечеркненя в горі означає пересїчну вартість.

Приймім, що послїдні рівнаня справджує слїдуюча вартість для $\mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}$:

$$\mathfrak{E} = A e^{i\vartheta},$$

де A є амплїтудою дроганя, а ϑ означає:

$$\vartheta = 2\pi\left(\frac{-z\cos\varphi + y\sin\varphi}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right);$$

притім φ є кутом паданя, λ довготою филї, τ періодом дроганя.

Означім вартість на електричну силу впадаючої филї:

$$\mathfrak{E}_i = A_i e^{i\vartheta}$$

для відбитої филї знов:

$$\mathfrak{E}_r = A_r e^{i(\vartheta + \varepsilon)},$$

де ε означає фазу, тоді сума дійсних частий обох виражень:

$$\mathfrak{E}' = \text{real. part. з } e^{i\vartheta}(A_i + A_r e^{i\varepsilon})$$

буде представляти повну електричну силу филї. Легко тепер запримітити, що:

$$(A_i + A_r e^{i\varepsilon}) e^{i\vartheta} = (A_i + A_r\cos\varepsilon)\cos\vartheta - A_r\sin\vartheta\sin\varepsilon;$$

положім дальше:

$$A_i + A_r \cos \varepsilon = A_1 \cos \omega$$

а:

$$A_r \sin \varepsilon \qquad = A_1 \sin \omega,$$

тодї дїйсна часть для $\mathfrak{E}$:

$$\mathfrak{E}' = A_1 \cos (\omega + \vartheta),$$

з заміткою, що: $A_1^2 = A_i^2 + A_r^2 + 2 A_i A_r \cos \varepsilon,$

а:

$$tg\,\omega = \frac{A_r \sin \varepsilon}{A_i + A_r \cos \varepsilon}.$$

В граничній площі:

$$\mathfrak{H}_x = - \mathfrak{H} \cos \varphi = - \mathfrak{E} \cos \varphi,$$
$$\mathfrak{H}_z = \mathfrak{H} \sin \varphi = \mathfrak{E} \sin \varphi,$$

тому:

$$\frac{1}{8\pi} \overline{\mathfrak{H}}_x^2 = \frac{1}{16\pi} (A_i^2 + A_r^2 - 2 A_i A_r \cos \varepsilon) \cos^2 \varphi,$$
$$\frac{1}{8\pi} \overline{\mathfrak{H}}_z^2 = \frac{1}{16\pi} (A_i^2 + A_r^2 + 2 A_i A_r \cos \varepsilon) \sin^2 \varphi,$$

а дальше:

$$\frac{1}{4\pi} \overline{\mathfrak{H}}_x \,.\, \overline{\mathfrak{H}}_z = - \frac{1}{8\pi} (A_i^2 - A_r^2) \cos \varphi \sin \varphi,$$

притім перечеркненя означають пересічні вартости.

Впровадьмо дальше для $\mathfrak{E}^2$ т. зв. єї пересічну квадрадну вартість, отже:

$$\overline{\mathfrak{E}}^2 = \frac{1}{2} A^2.$$

котра послужить нам до обчисленя тисненя филї на поверхню S.

Тиснене се спричинене силами $\mathfrak{T}'$ є в звязи з густотою енерґії филї W. Коли W_i буде відносити ся до впадаючої филї, W_r знов до відбитої филї, то після взорів електромаґнетної теорії сьвітла маємо:

$$W_i = \frac{1}{8\pi} A_i^2, \quad W_r = \frac{1}{8\pi} A_r^2.$$

По узглядненю послїдних взорів в рівнанях для $\mathfrak{T}'$ отримаємо:

$$\mathfrak{T}_x' = 0$$
$$\mathfrak{T}_y' = - \frac{1}{4\pi} \overline{\mathfrak{H}}_y \,.\, \overline{\mathfrak{H}}_z = (W_i - W_r) \sin \varphi \cos \varphi,$$
$$\mathfrak{T}_z' = \frac{1}{8\pi} [(\overline{\mathfrak{H}}_y^2 - \overline{\mathfrak{H}}_z^2) + \overline{\mathfrak{E}}_x^2] = (W_i + W_r) \cos^2 \varphi.$$

Площа, від котрої филя відбиває ся, дізнає тисненя p, якого напрям є згідний з площею паданя, а з осию z заключає кут пр. ψ. Напрям тисненя визначимо в сей спосіб:

$$tg\,\psi = \frac{\mathfrak{T}_y'}{\mathfrak{T}_z'} = \frac{W_i - W_r}{W_i + W_r}\, tg\,\varphi.$$

Що до величини тисненя p, то є воно вислїдною дїланя сил $\mathfrak{T}'$, іменно:

$$p = \sqrt{\mathfrak{T}_x'^2 + \mathfrak{T}_y'^2 + \mathfrak{T}_z'^2},$$

або по вираженю складових $\mathfrak{T}'$ через густоту енерґії, отримаємо:

$$p = \sqrt{(W_i - W_r)^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi + (W_i + W_r)^2 \cos^4\varphi},$$

або:

$$p = \cos\varphi \sqrt{W_i^2 + W_r^2 + 2\, W_i\, W_r \cos 2\,\varphi}.$$

Рівнанє се є загальною формою на лучисте тисненє.

Коли r означати буде рефлексийну спроможність, то заходити буде така звязь між W_i а W_r:

$$r = \frac{W_r}{W_i},$$

а дальше:

$$tg\,\psi = \frac{1 - r}{1 + r}\, tg\,\varphi.$$

В наслїдок сего маємо:

$$p = W_i \cos\varphi \sqrt{1 + 2\,r \cos 2\,\varphi + r^2}.$$

Для зовсїм відбиваючої поверхнї є рефлексийна спроможність $r = 1$, тому

$$tg\,\psi = 0, \text{ отже } \psi = 0,$$

і одержимо:

$$p = 2\; W_i \cos^2\varphi.$$

Для зовсїм чорної поверхнї $r = 0$, отже:

$$tg\,\psi = tg\,\varphi, \text{ т. зн. } \psi = \varphi,$$

в наслїдок чого:

$$p = W_i \cos\varphi.$$

В першім случаю напрям тисненя p є згідний з осию z, в другім случаю є він зовсїм згідний з напрямом падаючої филї. Коли лучі падали би нормально на поверхню, тодї $\varphi = 0$, а також $\psi = 0$, а для тисненя p отримаємо форму:

$$p = W_i (1 + r),$$

а ся форма є саме формою Maxwell-а, висше наведеною.

Для зовсїм блискучої поверхнї $r = 1$, тодї:

$$p = 2\,W_i,$$

а для зовсїм чорної поверхнї $r = 0$, отже:

$$p = W_i.$$

Лучисте тисненє для зовсїм блискучої поверхнї рівнає ся подвійному лучистому тисненю зовсїм чорної поверхнї.

Лучисте тиснене порожного простору.

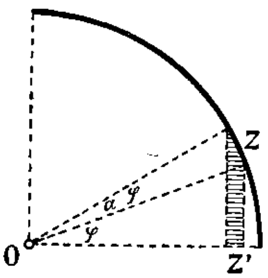
В порожнім просторі проміноване розходить ся рівномірно у всїх напрямах. Подумаймо собі в такім просторі зовсїм блискучу поверхню; най її трафляє сьвітляна филя під кутом φ. Заложім дальше, що у всїх напрямах з O (фіґ. 1) виходять лучі і падуть на елемент кулистої стрефи ZZ', якого поверхня

$$dF = 2\pi \sin\varphi \, d\varphi.$$

Густота цїлої висланої енерґії виносить:

$$W = 2\pi\varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi =$$

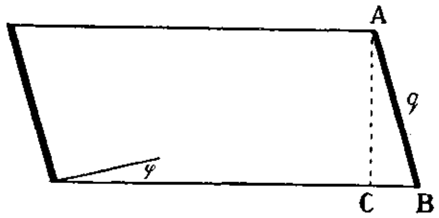
$$= -\frac{\pi\varepsilon}{2} \cos 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi\varepsilon,$$



Фіґ. 1.

притім ε означає емісийну спроможність.

Коли q представляє величину промінюючої поверхнї AB (фіґ. 2), то тиснене на поверхнї AC в безоглядних одиницях виносить:



Фіґ. 2.

$$dp' = 2\frac{dW}{AC.c}, \quad \text{де} \quad c = 3.10^{10};$$

або:

$$dp' = \frac{2}{c} \frac{dW}{q\cos\varphi}.$$

Кождому елементови поверхнї AC відповідає анальоґічний елемент поверхнї AB $\frac{1}{\cos\varphi}$ разів більший. Тому тиснене на одиницю поверхнї AB є $\cos\varphi$ разів менше від dp'. А що напрям того тиснення замикає з нормальною до AB кут φ, тому:

$$dp = dp' \cos^2\varphi = \frac{2\,dW\cos\varphi}{c\,.\,q};$$

тиснене знов на одиницю поверхнї є:

$$dp = 2\frac{dW}{c}\cos\varphi = \frac{4\pi\varepsilon}{c}\cos^2\varphi \sin\varphi \, d\varphi.$$

По зінтеґрованю отримаємо:

$$p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\pi\varepsilon}{c} \cos^2\varphi \sin\varphi \, d\varphi = \frac{4}{3}\frac{\pi\varepsilon}{c}.$$

В случаю нормальних лучів до поверхні, густота енерґії буде:

$$W_e = \frac{2\,W}{c}.$$

Коли знов енерґія промінюе під кутом, який лежить між φ а $(\varphi + d\,\varphi)$, тоді будемо мати:

$$W_e = 4\,\pi\,\varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi \cos\varphi\, d\,\varphi}{c \cos\varphi} = \frac{4\,\pi\,\varepsilon}{c}.$$

По вставленю послїдної вартости у взорі на p, дїстанемо:

$$p = \frac{1}{3}\,W_e$$

а се значить, що лучисте тиснене в порожнім просторі на зовсїм відбиваючу поверхню рівнає ся третій части цїлої густоти енерґії филї.