Конструкция плоскої кривої V-го степ. з почвірною точкою.

В. Калїцун.

B. Kalicun. Die Konstruktion der ebenen Kurve V-ter Ord. mit einem vierfachen Punkte.

В розвідцї п. з. „Über die Eigenschaften der ebenen Kurven etc", предложеній Цїсарскій Академії Наук у Відни 9. червня 1910, подав я загальні свійства кривої V-го степ. з почвірною точкою і спосіб, в який би та крива дала ся начеркнути при помочи двох одно-чотирозначних вязок лучів.

В отсїй розвідцї перепроваджую конструкцию доповненя двох одно-чотирозначних вязок (Рис. I), а відтак чертаю образ двох ґатунків згаданої кривої V-го степеня (Рис. II, III), якого то образу, о скілько менї звісно, нїхто еще не пробував начертати.

I. Доповнене двох одно-чотирозначних вязок лучів.

1. Звісно, що дві одно-чотирозначні вязки лучів будуть визначені, коли приймемо довільно девять пар відповідаючих собі лучів[1]), отже: W^1 $(a_1, b_1, \dots i_1)$, W^4 $(a_4, b_4, \dots i_4)$. [Рисунок I].

Коли ми перетнемо вязку W^1 $(a_1, \dots i_1)$ лучем a_4, а вязку W^4 $(a_4, \dots i_4)$ лучем a_1, то одержимо два одно-чотирозначні ряди: a_4 $(A_1, B_1, \dots I_1)$, a_1 $(A_4, B_4, \dots I_4)$ в зредукованім положеню.

Прямі, які сполучують відповідні точки тих рядів, обвивають криву IV-ої кляси c_4, яка дотикає три рази основи a_1 чотирозначного ряду a_1[2]). З кождої точки якоїнебудь стичної з кривої c_4 виходить еще по три стичні тої кривої. Сї стичні визначують на по-

[1]) „Über die Eigenschaften der ebenen Kurven" стор. 4.
[2]) „Über die Eigenschaften etc." стор 3.

трійній стичній a_1 ряд, який є тризначний з рядом на стичній s, визначеним поодинокими стичнями, які, виходять з точок потрійної стичної a_1. Отже стична $\overline{B_1 B_4} \equiv s$ перетинає стичні кривої c_4: $\overline{C_1 C_4}$ $\overline{D_1 D_4}, \ldots \overline{I_1 I_4}$ в точках $C, D, E, \ldots I$, які творять однозначний ряд з тризначним рядом $C_4, D_4, E_4, \ldots I_4$.

Ті одно-тризначні ряди є докладно визначені через сїм згаданих пар відповідних точок, а їх доповнене провадить до доповненя одно-чотирозначних рядів a_1, a_4, а відтак даних вязок W^1, W^4.

Щоби доповнити одно-тризначні ряди: s $(C, D, E, \ldots I)$ і a^1 $(C_4, D_4, \ldots I_4)$ сполучуємо точку G_4 з елементами ряду $s\,(C, D, \ldots I)$, а точку G з елементами ряду a_1 $(C_4, D_4, \ldots I_4)$; тим способом одержані дві одно-тризначні вязки: G_4 $(C, D, \ldots I)$ і G $(C_4, D_4, \ldots I_4)$ в зредукованім положеню визначують криву III-го ст. c^3, яка переходить два рази через вершок G тризначної вязки. Крива c^3 є визначена подвійною точкою G і точками: $(G_4 C, G C_4) \equiv 1^2$, $(G_4 D, G D_4) \equiv 2^2$, $(G_4 E, G E_4) \equiv 3^2$, $(G_4 F, G F_4) \equiv 4^2$, $(G_4 H, G H_4) \equiv 5^2$, $(G_4 I, G I_4) \equiv 6^2$.

Кожда прямa, що переходить через подвійну точку G, перетинає криву c^3 еще в одній точцї, а прямі, що переходять через довільну точку тої кривої, перетинають її в дальших двох точках. З сего слїдує, що вязки лучів, які сполучують точку 1^2 з точками G, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, а точку G з точками 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, — є одно-двозначні.

Доповнене одно-двозначних вязок 1^2 $(2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2)$ і $G\,(2^2, 3^2, 4^2\ 5^2, 6^2) \equiv G$ $(C_4, E_4, \ldots I_4)$ не представляє найменьшої трудности: Іменно перетинаємо однозначну вязку $1^2\,(2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2)$ лучем $\overline{G\,3^2}$, а двозначну вязку G $(2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2)$ лучем $\overline{1^2\,3^2}$, наслїдком чого одержимо два одно-двозначні ряди: (II, IV, V, VI) і (II', IV', V', VI') в зредукованім положеню, які визначують криву другої кляси c_2, що дотикає підстави $\overline{1^2\,3^2}$ двозначного ряду. З кождої точки стичної $\overline{1^2\,3^2}$ мож еще повести одну стичну до кривої c_2; сї стичні визначують на прямій $\overline{G\,3^2}$ однозначний ряд, а пари стичних, які виходять з точок прямої $\overline{G\,3^2}$, визначують на $\overline{1^2\,3^2}$ двозначний ряд.

2. По сих загальних увагах приступлю до розвязаня слїдуючих завдань:

а) „Даний є луч x_4 чотирозначної вязки (W^4), визначити відповідаючий єму луч x_1 в однозначній вязцї (W^1)“.

Визначім точку X_4 пересїчи луча x_4 з прямою a_1 (рис. I), то пряма $G X_4$ є лучом двозначної вязки G $(C_4, E_4, \dots I_4)$ $[\equiv G(2^2, 3^2, \dots 6^2)]$ і перетинає пряму $\overline{1^2 3^2}$ в точцї X^{IV}. Коли ми з точки X^{IV} поведемо способом Brianchon'а стичну s_x до кривої c_2 і сполучимо точку ${}^1X^{IV}$ пересїчи тої стичної з прямою $\overline{G 3^2}$ з точкою 1^2, то одержимо луч $(1^2\, {}^1X^{IV})$ однозначної вязки 1^2 $(2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2)$, який відповідає лучеви $G X_4$ $(\equiv G X^{IV})$ двозначної вязки G $(2^2, 3^2, \dots 6^2)$. Сї два лучі перетинають ся в точцї X^2 кривої III-го ст. c^3, яка сполучена з G_4 дає луч однозначної вязки G_4 $(C, D, E, \dots I)$. Луч $\overline{G_4 X^2}$ перетинає пряму s $(\equiv B_1 B_4)$ в точцї X, а пряма $\overline{X_4 X}$, яка сполучує точку X з точкою X_4 є стичною кривої c_4 і перетинає a_4 в точцї X_1, яка сполучена з W^1 дає луч x_1 однозначної вязки, що відповідає даному лучеви x_4 чотирозначної вязки.

б) „**Даний є луч y_1 однозначної вязки, визначити відповідаючі єму лучі в чотирозначній вязцї**“.

Луч y_1 перетинає підставу a_4 однозначного ряду $(A_1, B_1, C_1, \dots I_1)$ в точцї Y_1, якій в чотирозначнім рядї на a_1 відповідають чотири точки Y^1_4, Y^2_4, Y^3_4, Y^4_4; сї точки сполучені з вершком W^4 дають лучі y^1_4, y^2_4, y^3_4, y^4_4 чотирозначної вязки, які відповідають лучеви y_1 однозначної вязки.

Щоби визначити сї лучі, сполучуємо точку Y_1 з точками одно-тризначних рядів: s $(C, D, E, \dots I)$, a_1 $(C_4, D_4, E_4, \dots I_4)$ і визначуємо спільні лучі сих одно-тризначних вязок. Спільні лучі перетнуть пряму a_1 в чотирох точках, які лежать на шуканих лучах чотирозначної вязки[1]).

Спільні лучі тих вязок визначимо в слїдуючий спосіб: Через вершок Y_1 чертаю довільне коло K, яке перетинає вязки Y_1 $(C, D, \dots I;\ C_4, D_4 \dots I_4)$ після двох одно-тризначних рядів: (c, d, e, f, g, h, i), $(c_4, d_4, e_4, f_4, g_4, h_4, i_4, f)$; спільні точки сих рядів лежать на спільних лучах повисших вязок.

Щоби вишукати згадані спільні точки, сполучуємо точку d з точками $c_4, d_4, e_4, \dots i_4$, а точку d_4 з точками: c, d, e, f, g, h, i. Тим способом одержимо одно-тризначні вязки в зредукованім положеню, які як звісно, утворять криву III-го ст. c^3, що посїдає в d подвійну точку. Крива c^3 перетинає коло K єще в чотирох точках, які якраз є шуканими спільними точками згаданих рядів.

---

[1]) Знане є твердженє Chasles'а, що: Два $(m\text{-}n)$ — значні твори мають $m + n$ спільних елементів.

Однак повисше завдане IV-го ряду дасть ся розвязати без помочи кривої c^3, виключно при помочи двох кривих II-го степеня:

Іменно крива c^3 є докладно визначена подвійною точкою d і точками: $(dc_4, d_4c) \equiv 1$, $(de_4, d_4e) \equiv 2$, $(df_4, d_4f) \equiv 3$, $(dg_4, d_4g) \equiv 4$, $(dh_4, d_4h) \equiv 5$, $(di_4, d_4i) \equiv 6$. Коли ми сполучимо точку 2 з точками 1, 3, 4, 5, 6, то одержимо вязку лучів, з яких кождий перетинає криву c^3 еще в одній дальшій точцї 2', 3', 4', ..., а коло K в парах точок: a', a''; b', b''; c', c''; ..., які творять, як звісно, квадратову інволюцию. Коли ми відтак сполучимо точку d кривої c^3 з її точками 2, 2'; 3, 3'; 4, 4'; ..., одержимо вязку двозначну з вязкою 2 (1, 3, 4, ...); пари лучів сеї двозначної вязки перетинають коло K в парах точок: c_4, c_4'; e_4, e'_4; f_4, f'_4; ... квадратової інволюциї. Інволюциї (c_4, c'_4; e_4, e'_4; ...) і (a', a''; b', b''; c', c''; ...) є однозначні і мають чотири спільні точки, які є якраз точками пересїчи кривої c^3 з колом K. Однак через сї точки переходить, як легко запримітити, стіжковий переріз p^2, який визначують дві однозначні вязки: 2 (1, 3, 4, 5) і $S\,(\overline{c_4\, c'_4}, \overline{e_4\, e'_4}, \overline{f_4\, f'_4} \ldots)$.

Коли отже начеркнемо переріз стіжковий p^2, то він перетне коло K в чотирох точках: η_1, η_2, η_3, η_4; прямі, які сполучують сї точки з точкою Y_1, є спільними лучами одно-тризначних вязок: $Y_1\,(C, D, \ldots I; C_4, D_4, \ldots I_4)$. Сї лучі перетинають пряму a_1 в чотирох точках: Y^1_4, Y^2_4, Y^3_4 Y^4_4, які сполучені з вершком W^4 дадуть лучі: y^1_4, y^2_4, y^3_4, y^4_4, чотирозначної вязки, що відповідають принятому лучеви y_1 однозначної вязки.

Увага: Лучі $d2'$ $d3'$ $d4'$, ... двозначної вязки d (1, 3, 4, 5, 6, ...) визначив я на рисунку в слїдуючий спосіб:

Вязки 2 (1, 3, 4, 5, 6 ...) і d (1, 3, 4, 5, 6 ...) є одно-двозначні і сими 5 парами відповідних лучів докладно визначені. Коли перетнемо однозначну вязку 2 (1, 3, 4, 6 ...) лучем $\overline{d4}$, а двозначну вязку d (1, 3, 4, 5, 6, ...) лучем $\overline{24}$, то одержимо одно-двозначні ряди: (I'', III'', V'', VI'',...) і (I', III', V', VI'...) в зредукованім положеню, які визначують криву II-ої кляси c_2', що стикає ся з основою $\overline{24}$ двозначного ряду. З кождої точки однозначного ряду виходить еще по одній стичній до c_2', які перетинають пряму $\overline{24}$ в точках I_1', III'_2, V'_1, ...; точки сї творять по черзї з точками I', III', V', ... пари елементів двозначного ряду на прямій $\overline{24}$. Пари точок I' I', III' III'_1, ... творять, як звісно, квадратову інволюцию, отже коли їх получимо з точкою d, одержимо пари лучів двозначної вязки d (1, 3, 4, 5, ...).

II. Конструкция кривої V-го ст. (Рис. II, III).

1. Крива V-го ст. з почвірною точкою буде визначена, коли крім почвірної точки W_4 приймемо еще десять еї довільних точок: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, [рис. II, III]. Бо коли ми получимо точки 10 і W^4 з иньшими точками: 1, 2, 3, ... 9, то одержимо девять пар відповідних лучів двох одно-чотирозначних вязок, які то пари визначують цїлковито сї вязки[1]).

Коли отже доповнимо ті вязки що йно представленим способом, то точки пересїчи відповідних лучів утворять криву c^5. Щоби однак визначити точки кривої c^5 дорогою лінїйною, треба при доповненю згаданих вязок виходити від лучів чотирозначної вязки [с. є від розвязаня завданя a)].

2. Стична s_w до кривої c^5 в довільній точцї 10 (W^1) є лучем однозначної вязки W^1 (1, 2, ... 9), який відповідає спільному лучеви W^4 W^1, зачисленому до чотирозначної вязки W^4 (1, 2, ... 9).[2]).

Отже сю стичну визначимо способом лінїйним.

Щоби начертати стичні (s_1, s_2, s_3, s_4) кривої c^5 в почвірній точцї W^4, належить памятати, що сї стичні є лучами почвірної вязки, які відповідають спільному лучеви $\overline{W^4 W^1}$, зачисленому до однозначної вязки. Отже знайдемо їх, коли розвяжемо завдане б) уст. I-го.

[В принятім положеню одно-чотирозначних вязок (рис. II), почвірна точка посїдає тільки дві дїйсні стичні t^1, t^2].

3. Безконечно далекі точки кривої c^5 найдемо в слїдуючий спосіб:

Пересуньмо однозначну вязку W^1 (1, 2, ...9) так рівнобіжно до первісного положеня, щоби еї вершок W^1 зійшов ся з вершком W^4 чотирозначної вязки, а відтак через вершок W^4 поведїм довільне коло K. Се коло перетне сї вязки після двох одно-чотирозначних рядів: (a_1, b_1, c_1, d_1, ... i_1) і (a_4, b_4, ... i_4). Коли отже сполучимо точку i_4 чотирозначного ряду з елементами однозначного ряду, а відповідну точку i_1 з точками чотирозначного ряду, то одержимо одно-чотирозначні вязки в зредукованім положеню. Сї вязки визначують криву c^4 четвертого степеня, яка посїдає в i_1 потрійну точку[3]).

---

[1]) „Über die Eigenschaften der ebenen etc." ст. 4.

[2]) „Über die Eigen. etc." ст. 17.

[3]) Über die Eigenschaften der eb. Kur. etc. ст. 3. Гляди рівнож: „Dr. M. Łazarski. Konstrukcye krzywej rz. IV..." Академія Наук в Кракові т. XV.

Крива c^4 перетне коло K крім точки i_1 еще в пять дальших точках (які можуть бути парами мнимі), що є спільними точками згаданих рядів. Прямі, що сполучують сї точки з W^4, є спільними лучами одно-чотирозначних вязок W^1 і W^4 і вказують на безконечно далекі точки кривої c^5.

В данім положеню перетинає крива c^4 коло K тілько в трох дійсних точках; крива c^5 посїдає тілько три дійсні безконечно далекі точки.

Асимптоти $(a_1, a_2, \ldots)$ кривої c^5 начеркнемо, коли будемо приймати по черзї безконечно далекі точки за вершки однозначних вязок і в тих точках чертати стичні — способом поданим в уст. 2.

4. На рисунку III. начертав я криву V-го степ. з двома дїйсними стичними $(s_1\ s_2)$ в почвірній точцї і з одною дїйсною асимптотою (a).

In der der kaiserlichen Akademie am 9. Juni 1910 vorgelegten Abhandlung habe ich die allgemeinen Eigenschaften der ebenen Kurve V-ter Ord. mit einem vierfachen Punkte entwickelt und auf die Art und Weise hingewiesen, auf welche diese Kurve mit Hilfe von zwei ein-vierdeutigen Strahlenbüscheln gezeichnet werden kann.

In der gegenwärtigen Abhandlung wird die Konstruktion zwei ein-vierdeutiger Strahlenbüschel und der genannten Kurve selbst durchgeführt.